

# MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH  
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH  
FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN  
VON

DAVID HILBERT  
IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL  
IN AACHEN

ERICH HECKE  
IN HAMBURG

104. BAND



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER  
1931

[illegible]



# MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH  
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH  
FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN  
VON

DAVID HILBERT  
IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL  
IN AACHEN

ERICH HECKE  
IN HAMBURG

104. BAND



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER  
1931

80



# Inhalt des einhundertundvierten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

	Seite
Achyeser, N., in Kiew. Über ein Tschebyscheffsches Extremumproblem . . .	739
Bergmann, St., in Berlin. Über die ausgezeichneten Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen . . .	611
Bochner, S., in München. Über gewisse Differential- und allgemeinere Gleichungen, deren Lösungen fastperiodisch sind. III. Teil: Systeme von Gleichungen . . .	579
Brunn, H., in München. Sätze über zwei getrennte Eikörper . . .	300
Colucci, A., in Neapel. Trattazione in grande del problema di Cauchy per le equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine a caratteristiche reali e distinte . . .	161
Doetsch, G., in Stuttgart. Über den Zusammenhang zwischen Abelscher und Borelscher Summabilität . . .	403
Hamburger, H., in Köln. Über die Laplacesche Kaskadenmethode . . .	96
Hartogs, F., in München, und A. Rosenthal in Heidelberg. Über Folgen analytischer Funktionen. (Ergänzung zur Arbeit im 100. Band) . . .	606
Hasse, H., in Marburg. Über $p$ -adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlensysteme . . .	495
Heilbronn, H., in Göttingen. Über die Verteilung der Primzahlen in Polynomen . . .	794
Hilbert, D., in Göttingen. Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre . . .	485
Hopf, H., in Zürich. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche . . .	637
Kolmogoroff, A., in Moskau. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . .	415
Koschmieder, L., in Brünn. Über die $C$ -Summierbarkeit gewisser Reihen von Didon und Appell . . .	387
Kulakoff, A., in Moskau. Über die Anzahl der eigentlichen Untergruppen und der Elemente von gegebener Ordnung in $p$ -Gruppen . . .	778
Leja, F., in Warschau. Sur une propriété des séries entières . . .	143
Lewy, H., in Göttingen. Eindeutigkeit der Lösung des Anfangsproblems einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen . . .	325
Lüneburg, R., in Göttingen. Das Problem der Irrfahrt ohne Richtungsbeschränkung und die Randwertaufgabe der Potentialtheorie . . .	700
Maier, W., in Lafayette (Ind., USA.). Theorie der $t$ -Funktionen . . .	588
Maier, W., in Lafayette (Ind., USA.). Zur Theorie der elliptischen Funktionen . . .	745
Mehmke, R., in Stuttgart. Berichtigung, das Aufstellen der identischen Gleichung einer Matrix betreffend . . .	167
Mehmke, R., in Stuttgart. Zum Nachweis der Proben beim Eliminieren . . .	296
v. Neumann, J., in Berlin. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren . . .	570
Niemytzki, V., in Moskau. Über die Axiome des metrischen Raumes . . .	666
Nöbeling, G., in Wien. Über eine $n$ -dimensionale Universalmenge im $R_{2n+1}$ . . .	71
Nöbeling, G., in Wien. Über regulär-eindimensionale Räume . . .	81
Perron, O., in München. Ganze transzendente Funktionen mit rationalen Taylorkoeffizienten und vorgeschriebenen Nullstellen . . .	139
Pfaffner, G., in Kiew. Über die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die in bezug auf die partiellen Differentialquotienten homogen sind und die Funktion nicht enthalten . . .	363
Pietrkowski, St., in Göttingen. Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen . . .	533

<b>Rosenthal, A.</b> , in Heidelberg und <b>F. Hartogs</b> in München. Über Folgen analytischer Funktionen. (Ergänzung zur Arbeit im 100. Band) . . . . .	606
<b>Rothe, E.</b> , in Breslau. Über die Wärmeleitungsgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten im räumlichen Falle. I. Mitteilung . . . . .	340
<b>Rothe, E.</b> , in Breslau. Über die Wärmeleitungsgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten im räumlichen Falle. II. Mitteilung . . . . .	355
<b>Schilling, Fr.</b> , in Danzig-Langfuhr. Neue Beispiele von ebenen Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind . . . . .	672
<b>Schoeneberg, B.</b> , in Hamburg. Zur Theorie der automorphen Formen . . . . .	150
<b>Seidel, W.</b> , in München. Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen . . . . .	182
<b>Seifert, H.</b> , und <b>W. Threlfall</b> in Dresden. Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes . . . . .	1
<b>Subbotin, M. Th.</b> , in Leningrad. Sur les propriétés-limites du module des fonctions entières d'ordre fini . . . . .	377
<b>Szász, O.</b> , in Frankfurt a. M. Über die Approximation stetiger Funktionen durch gegebene Funktionenfolgen . . . . .	155
<b>Threlfall, W.</b> , und <b>H. Seifert</b> in Dresden. Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes . . . . .	1
<b>Thullen, P.</b> , in Münster (Westf.). Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern . . . . .	244
<b>Thullen, P.</b> , in Münster (Westf.). Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. Die Starrheit der nicht überall pseudokonvexen Gebiete . . . . .	373
<b>Tschebotarëw, N.</b> , in Kasan. Über ein algebraisches Problem von Herrn Hilbert. Erste Abhandlung . . . . .	459
<b>Turkin, W. K.</b> , in Moskau. Die Nichtexistenz einfacher Gruppen der Ordnungen $p^2 q^2 r$ und $p^4 q^2 r$ . . . . .	770
<b>Vahlen, K. Th.</b> , in Wien. Über endlich gleiche Polyeder. II. . . . .	298
<b>van der Waerden, B. L.</b> , in Groningen. Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen der symmetrischen und der linearen Gruppen . . . . .	92
<b>van der Waerden, B. L.</b> , in Groningen. Zur Begründung des Restsatzes mit dem Noetherschen Fundamentalsatz . . . . .	472
<b>van der Waerden, B. L.</b> , in Groningen. Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen der symmetrischen und der linearen Gruppe. Nachtrag zu meiner Arbeit in diesem Band, S. 92—95) . . . . .	800
<b>Wald, A.</b> , in Wien. Axiomatik des Zwischenbegriffes in metrischen Räumen . . . . .	476
<b>Walther, A.</b> , in Darmstadt. Verknüpfung einiger Rechenproben von R. Mehmke für das systematische Eliminieren bei linearen Gleichungssystemen mit bekannten Sätzen der Determinantentheorie . . . . .	291
<b>Wiman, A.</b> , in Upsala. Über eine asymptotische Eigenschaft der Ableitungen der ganzen Funktionen von den Geschlechtern 1 und 2 mit einer endlichen Zahl von Nullstellen . . . . .	169
<b>Young, R. C.</b> , in Cambridge (England). The algebra of many-valued quantities . . . . .	260
Bemerkung der Redaktion zu der Arbeit von R. Caccioppoli Math. Ann. 101 . . . . .	324
Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis . . . . .	324

# Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes.

Von

W. Threlfall und H. Seifert in Dresden.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	1
§ 1. Bewegungen der dreidimensionalen sphärischen Geometrie . . . . .	3
§ 2. Rechts- und Linksdrehung . . . . .	9
§ 3. Abbildung in Paare euklidischer $R_3$ -Drehungen . . .	10
§ 4. Gruppenpaarung . . . . .	14
§ 5. Einstufungsfrage . . . . .	22
§ 6. Erzeugende und Relationen aller Bewegungsgruppen .	24
§ 7. Konformer Modellraum $K_3$ . . . . .	37
§ 8. Bewegungsgruppe und Fundamentalgruppe . . . .	40
§ 9. Numerische Invarianten . . . . .	45
§ 10. Kombinatorische Topologie . . . . .	52
§ 11. Drehgruppen . . . . .	57
§ 12. Dodekaederraum . . . . .	66

## Einleitung.

Unter den geschlossenen dreidimensionalen Räumen haben nur zwei in der außertopologischen Mathematik allgemeine Bedeutung erlangt: der *projektive Raum*  $P_3$  und der *konforme Raum*  $K_3$ . Der projektive Raum entsteht, wenn man den euklidischen Raum — eine offene Punktmenge — durch uneigentliche Punkte so schließt, daß die projektiven Abbildungen umkehrbar eindeutig werden, der konforme, wenn man die gleiche Forderung

für die reellen konformen Abbildungen, die Kugelverwandtschaften, stellt. Die Aufzählung aller nicht stetig ineinander abbildbaren, geschlossenen, dreidimensionalen Räume ist eine ungelöste Aufgabe. Eine Dimension tiefer tritt jede geschlossene Fläche als Diskontinuitätsbereich einer diskreten Gruppe von metrisch starren Bewegungen der Kugel, der euklidischen oder der hyperbolischen Ebene auf. Es liegt daher nahe, die Diskontinuitätsbereiche dreidimensionaler diskreter Bewegungsgruppen der Hypersphäre, des euklidischen und des hyperbolischen Raumes auf ihre topologischen Eigenschaften zu untersuchen. Die vorliegende Arbeit<sup>1)</sup>, die übrigens keine besonderen topologischen Kenntnisse voraussetzt, beschränkt sich auf die starren Bewegungen der Hypersphäre<sup>2)</sup>, und zwar auf die der ersten Art. Es werden also nur orientierbare Räume von endlichen Fundamentalgruppen (also ohne wesentliche Bettische Zahlen) gewonnen (§ 9). Fundamentalgruppe und numerische Invarianten aller vorkommenden Diskontinuitätsbereiche werden ermittelt. Die Ausdehnung der Untersuchung auf die Bewegungen zweiter Art und auf den euklidischen und hyperbolischen Raum liefert weitere Ergebnisse, ist aber noch nicht systematisch durchgeführt worden.

Die Untersuchung des sphärischen Falles zerfällt in zwei Teile: *Bewegungsgruppe* und *Fundamentalgruppe des Diskontinuitätsbereiches*. Im ersten Teil werden die endlichen Gruppen sphärischer Bewegungen vollständig abgehandelt (§ 1 bis 7). Der zweite Teil setzt mit dem Zusammenhang von Bewegungsgruppe und Fundamentalgruppe ein (§ 8). Nach einer Erinnerung an die numerischen Invarianten (§ 9, § 10) findet das eigentliche Thema: die topologisch interessanten unter den Diskontinuitätsbereichen, seine Behandlung. Wir beschränken uns im hier vorliegenden Teil der Arbeit auf die Drehgruppen (§ 11); unter ihnen erscheint ein einziger Poincaréscher Raum, der Dodekaederraum (§ 12). Die zur Demonstration der numerischen Invarianten geeigneten Schulbeispiele, die sich besonders unter den Drehgruppen finden, können auch, ohne ihre metrische Herkunft und ihre Stellung im Systeme der Bewegungsgruppen zu kennen, benutzt werden. — Die übrigen Gruppen werden einer Fortsetzung der Arbeit vorbehalten. Es treten unter ihnen nichtähnliche Bewegungsgruppen auf, die nichthomöomorphe Diskontinuitätsbereiche haben, obwohl sie zur gleichen abstrakten Fundamentalgruppe gehören.

<sup>1)</sup> Die Arbeit ist aus einer Beispielsammlung einer von W. Threlfall an der Technischen Hochschule Dresden gehaltenen Topologievorlesung hervorgegangen.

<sup>2)</sup> Die reelle Punktmenge der Hypersphäre des  $R_4$ , der konforme Raum und der abstrakte dreidimensionale sphärische Raum, der Schauplatz der sphärischen Geometrie, sind isomorph im Sinne von H. Weyl, Philosophie d. Math. u. Naturwiss., Sonderdruck a. d. Handbuch d. Philos. (München 1927), S. 21.

## § 1.

## Bewegungen der dreidimensionalen sphärischen Geometrie.

Die euklidisch starren Bewegungen des reellen<sup>3)</sup> vierdimensionalen Raumes  $R_4$  um einen festen Punkt, den Nullpunkt, werden durch die reellen linearen homogenen Transformationen der Koordinaten gegeben, die die Quadratsumme  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ , die Entfernung vom Nullpunkt, ungeändert lassen. Sie führen insbesondere die *Einheitshypersphäre*  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$  in sich über. Nur mit solchen Bewegungen haben wir es zu tun; wir nennen sie die *sphärischen Bewegungen* des  $R_4$ . Die reellen Punkte der Hypersphäre bilden nämlich den Schauplatz der reellen dreidimensionalen *sphärischen* oder *konformen Geometrie*; sie werden in die später untersuchten Diskontinuitätsbereiche der endlichen sphärischen Bewegungsgruppen zerlegt.

Um die sphärischen Bewegungen zu überblicken, betrachten wir den nullteiligen Hyperkegel  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ , der ebenfalls in sich bewegt wird. Er trägt zwei Scharen von (zweidimensionalen) Ebenen auf sich, die durch den Nullpunkt gehenden *isotropen Ebenen* des reellen  $R_4$ . Die beiden Scharen sind nur durch eine sphärische Bewegung zweiter Art (Transformationsdeterminante  $-1$ ) ineinander überführbar und werden darum als *rechte* und *linke Schar* unterschieden. Zwei Ebenen derselben Schar haben nur den Nullpunkt gemein, zwei Ebenen verschiedener Scharen schneiden sich in einer Mantellinie des Hyperkegels: *isotrope Gerade des reellen  $R_4$* . Wir haben es nur mit solchen Geraden, Ebenen und Hyper-ebenen des  $R_4$  zu tun, die durch den Nullpunkt gehen, und wir werden diese Beschränkung hinfort nicht immer ausdrücklich wiederholen.

Durch Projektion der Punkte des  $R_4$  vom Nullpunkt aus in die uneigentliche Hyperebene  $P_3$  — ein dreidimensionaler projektiver Raum — gehen die isotropen Ebenen in die geradlinigen Erzeugenden der nullteiligen Kugel des  $P_3$  über, welche der Schnitt des Hyperkegels und der Hypersphäre mit der uneigentlichen Hyperebene ist, die Gruppe sphärischer Bewegungen aber in die automorphen Kollineationen der nullteiligen Kugel des  $P_3$ . Der  $P_3$  wird durch diese Bewegungsgruppe zum dreidimensionalen elliptischen Raum, der auch durch Diametralpunktidentifizierung der reellen Punkte der Hypersphäre entsteht und der Schauplatz der elliptischen Geometrie ist. Weil der sphärische, nicht der elliptische Raum die universelle

<sup>3)</sup> Der komplexe  $R_4$  ist eine offene Punktmenge, deren Punkte sich umkehrbar eindeutig den Quadrupeln komplexer Zahlen  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  zuordnen lassen. Der *reelle*  $R_4$  geht dadurch aus ihm hervor, daß die Punkte, die in einem bestimmten Koordinatensystem reelle Koordinaten haben, als reelle Punkte ausgezeichnet werden.



Überlagerungsmannigfaltigkeit unserer Diskontinuitätsbereiche ist, interessiert uns nicht die elliptische, sondern nur die zu ihr zweistufig isomorphe sphärische Geometrie.

Den Mantellinien des nullteiligen Hyperkegels, also den isotropen Geraden, kann man umkehrbar eindeutig die reellen *orientierten Ebenen* des  $R_4$ , die durch den Nullpunkt gehen, zuordnen<sup>4)</sup>. Jede nichtorientierte reelle Ebene schneidet den Hyperkegel in ihren beiden isotropen Geraden. Einer nichtorientierten Ebene ist damit ein Paar konjugiert komplexer isotroper Geraden zugeordnet. Diese Geraden werden in einem aus den beiden reellen senkrechten Einheitsvektoren  $e_1$  und  $e_2$  bestehenden Koordinatensystem der Ebene von den beiden Vektoren  $\pm ie_1 + e_2$  aufgespannt. Orientiert man nun die Ebene durch Hinzufügung eines Koordinatensystems, so kann man die orientierte Ebene mit der von  $\pm ie_1 + e_2$  aufgespannten isotropen Geraden koppeln. Umgekehrt bestimmt jede isotrope Gerade  $j$  mit ihrer konjugiert komplexen  $\bar{j}$ <sup>5)</sup> eine nichtorientierte reelle Ebene, und diese erhält eine Orientierung durch Auszeichnung derjenigen Koordinatensysteme, in denen die isotrope Gerade  $j$  vom Vektor  $\pm ie_1 + e_2$  aufgespannt wird. Die zu zwei konjugiert komplexen isotropen Geraden gehörigen reellen orientierten Ebenen heißen entgegengesetzt orientiert und überlagern dieselbe nichtorientierte Ebene.

Die sphärischen Bewegungen erster Art des  $R_4$  werden nach den isotropen Geraden eingeteilt, die sie in sich überführen. Mindestens vier solche isotrope Fixgeraden sind vorhanden. Denn die isotropen Ebenen jeder der beiden Scharen bilden ein binäres Gebiet<sup>6)</sup>, das von einer sphärischen Bewegung des  $R_4$  eine lineare Transformation in sich erleidet. Wenn eine isotrope Ebene bei dieser Transformation festbleibt, so auch ihre konjugiert komplexe, die zur selben Schar gehört. Da keine isotrope Ebene reell ist, fallen die beiden Fixelemente dieser Transformation nicht in eines zusammen; es gibt daher in jeder Schar mindestens zwei getrennte isotrope Fixebenen, die nur in sich bewegt werden. Wir nennen die der rechten Schar  $E_{13}$  und  $E_{24} = \bar{E}_{13}$ , die der linken  $E_{23}$  und  $E_{14} = \bar{E}_{23}$ . Sie schneiden sich in vier

<sup>4)</sup> Wir treiben hier nicht algebraische Geometrie und bauen daher nicht die reelle sphärische Geometrie in die komplexe der nichtausgearteten Hyperfläche zweiten Grades ein, sondern stellen die unseren topologischen Bedürfnissen genügenden Tatsachen der reellen sphärischen Geometrie zusammen.

<sup>5)</sup> Mit Überstreichen wird der Übergang zum konjugiert komplexen Wert bezeichnet.

<sup>6)</sup> Ein binäres Gebiet wird von Elementen gebildet, die umkehrbar eindeutig den Paaren von Verhältniszahlen  $k_1$  und  $k_2$  zugeordnet sind.  $k_1$  und  $k_2$  durchlaufen unabhängig alle komplexen Zahlen mit Ausnahme des Paares  $(0, 0)$ . Man nennt ein binäres Gebiet wohl auch Grundgebilde erster Stufe. Vgl. E. Study, Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln, Math. Annalen 86 (1922), S. 44.

paarweise konjugiert komplexen isotropen Geraden

$$j_1, j_2 = \bar{j}_1, j_3, j_4 = \bar{j}_3,$$

die zwei weitere reelle Verbindungsebenen  $E_{12}$  und  $E_{34}$  haben. Die Geraden  $j_i$  und  $j_k$  spannen immer die mit  $E_{ik}$  bezeichnete Ebene auf. — Die ersten vier Ebenen, die paarweise konjugiert komplexen isotropen, schneiden aus der nullteiligen Kugel des uneigentlichen  $P_3$  gleichsam ein windschiefes Viereck von geradlinigen Erzeugenden aus, die beiden reellen Ebenen schneiden den  $P_3$  in den beiden reellen Kanten (konjugierten Polaren der nullteiligen Kugel), die das Viereck zum Tetraeder ergänzen. Diese beiden Ebenen  $E_{12}$  und  $E_{34}$  stehen total senkrecht aufeinander. Denn  $j_1$  steht senkrecht auf  $j_3$ , weil alle Geraden derselben isotropen Ebene aufeinander senkrecht stehen; aus demselben Grunde steht  $j_2$  senkrecht auf  $j_4$ , also auf allen Geraden von  $E_{34}$ , und gleiches gilt von  $j_3$ . Also stehen alle Geraden von  $E_{12}$ , als linear abhängig von  $j_1$  und  $j_2$ , senkrecht auf allen von  $E_{34}$ , d. h.  $E_{12}$  und  $E_{34}$  sind total senkrecht und haben daher nur den Nullpunkt des  $R_4$  gemeinsam. Die schematische Fig. 1 deutet die Lageverhältnisse eines Schnittes mit dem uneigentlichen  $P_3$  an. Die ausgezogenen Linien stellen die beiden reellen Diagonalen des windschiefen Vierecks dar. Von jeder sphärischen Bewegung des  $R_4$  werden daher mindestens zwei reelle total senkrechte Ebenen in sich gedreht. — Die vier isotropen Geraden  $j_1, j_2, j_3, j_4$  sind hiernach linear unabhängig und spannen den ganzen  $R_4$  auf.

Nun tritt eine dreifache Fallunterscheidung ein, je nachdem

I. es sowohl in der rechten als in der linken isotropen Schar nur zwei Fixebenen gibt, oder

II. in einer Schar zwei, in der andern alle Ebenen Fixebenen sind, oder

III. in beiden Scharen alle Ebenen Fixebenen sind.

### I. Allgemeine sphärische Bewegung.

Die beiden Ebenen  $E_{12}$  und  $E_{34}$  sind jetzt die einzigen reellen Ebenen, die in sich gedreht werden,  $j_1, j_2$  und  $j_3, j_4$  die einzigen konjugiert komplexen Geradenpaare, die in sich bewegt werden, deren Vektoren also etwa mit den Faktoren

$$\begin{matrix} e^{i\varphi} & e^{-i\varphi} & e^{i\psi} & e^{-i\psi} \\ (j_1) & (j_2) & (j_3) & (j_4) \end{matrix}$$

sich multiplizieren. Die Faktoren haben den Betrag 1 als Eigenwerte einer reellen orthogonalen Matrix. — Wäre  $\varphi = \psi$ , so würde die isotrope Ebene  $E_{13}$

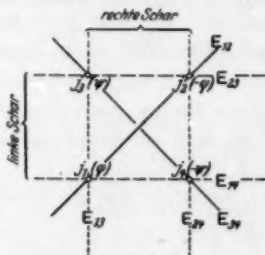


Fig. 1.

der rechten Schar eine homogene Ähnlichkeitstransformation mit dem Faktor  $e^{i\varphi}$  erleiden, weil zwei unabhängige ihrer Vektoren, nämlich zwei, die die Geraden  $j_1$  und  $j_3$  aufspannen, sich mit diesem Faktor multiplizieren. Das gleiche geschähe mit der konjugiert komplexen Ebene  $E_{24}$  der rechten Schar. Also würde eine ganze Schar reeller Ebenen durch den Winkel  $\varphi$  in sich gedreht, nämlich jede Ebene, die von einem Vektor der Ebene  $E_{13}$  und dem konjugiert komplexen der Ebene  $E_{24}$  aufgespannt wird. Wäre  $\varphi = -\psi$ , so träte ein gleiches für die beiden konjugiert komplexen Ebenen  $E_{23}$  und  $E_{14}$  der linken Schar ein — gegen die Voraussetzung der Einzigkeit von  $E_{13}$  und  $E_{24}$ . *Eine allgemeine sphärische Bewegung dreht daher zwei bestimmte reelle, total senkrechte Ebenen durch Winkel, die dem absoluten Betrage nach verschieden sind, starr in sich; Lage und Orientierung dieser Ebenen sowie die Drehwinkel bestimmen die Bewegung eindeutig.* — Legt man ein Koordinatensystem in den  $R_4$ , dessen 1–2- und 3–4-Ebene mit den orientierten, zu  $j_1$  und  $j_3$  gehörigen reellen Ebenen übereinstimmt, so nimmt in ihm die Matrix der sphärischen Bewegung des  $R_4$  die Winkelform an:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq \psi < 2\pi \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten: Das Koordinatensystem ist so gewählt, daß die Gerade  $j_1$  von dem Vektor  $+i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$  und  $j_3$  von  $+i\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1$  aufgespannt wird;  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$  sind die Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen, und die sphärische Bewegung ist in ihm durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi \\ x'_2 &= x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \\ x'_3 &= x_3 \cos \psi - x_4 \sin \psi \\ x'_4 &= x_3 \sin \psi + x_4 \cos \psi \end{aligned}$$

gegeben. — Für  $\varphi = 0$  und  $\psi = \pi$  ergibt sich die „Spiegelung“ des  $R_4$  an der Ebene  $E_{12}$ .

## II. Rechts- und Linksdrehung.

Wenn alle isotropen Ebenen einer und nur einer Schar in sich bewegt werden, so gehen die Schnittgeraden dieser isotropen Ebenen mit den beiden einzigen (konjugiert komplexen) Fixebenen der anderen Schar einzeln in sich über. Also gehen alle isotropen Geraden dieser beiden isotropen Fixebenen einzeln in sich über und keine ändern. Je nachdem diese Ebenen der rechten Schar, wie  $E_{13}$  und  $E_{24}$ , oder der linken, wie  $E_{23}$  und  $E_{14}$ ,

angehören, heißt die Bewegung eine *Rechtsdrehung* oder eine *Linksdrehung*. Eine Rechtsdrehung liegt daher vor, wenn  $\varphi = \psi$ , etwa  $= \chi_r$ , eine Linksdrehung, wenn  $\varphi = -\psi \pmod{2\pi}$ , etwa  $= \chi_l$  ist. In dem erwähnten Koordinatensystem nimmt daher eine Rechts- bzw. Linksdrehung die Winkelform an:

*Rechts:*  $\varphi = \psi = \chi_r$

*Links:*  $\varphi = -\psi \pmod{2\pi} = \chi_l$

$$\begin{pmatrix} \cos \chi_r & -\sin \chi_r & 0 & 0 \\ \sin \chi_r & \cos \chi_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \chi_r & -\sin \chi_r \\ 0 & 0 & \sin \chi_r & \cos \chi_r \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \cos \chi_l & -\sin \chi_l & 0 & 0 \\ \sin \chi_l & \cos \chi_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \chi_l & \sin \chi_l \\ 0 & 0 & -\sin \chi_l & \cos \chi_l \end{pmatrix}.$$

$$0 \leq \chi_r < 2\pi \qquad 0 \leq \chi_l < 2\pi.$$

Die reellen Ebenen, die durch eine Rechts- oder Linksdrehung in sich gedreht werden, stehen paarweise aufeinander senkrecht, weil mit einer Ebene wegen der Orthogonalität der Bewegung auch die total senkrechte Ebene in sich gedreht wird. Wir sagen, daß sie eine *Rechts- oder Linksdrehebene* bilden. Die Kongruenz wird durch zwei isotrope, konjugiert komplexe *Leitebenen* der rechten oder linken Schar bestimmt, das sind bei einer Rechtsdrehung die beiden einzigen in sich bewegten Ebenen  $E_{13}$  und  $E_{24}$  der rechten Schar, deren sämtliche isotrope Geraden einzeln in sich übergehen, bei einer Linksdrehung entsprechend die Ebenen  $E_{23}$  und  $E_{14}$ . Jede isotrope Gerade der einen Leitebene spannt mit der konjugiert komplexen der andern eine reelle Kongruenzebene auf, und umgekehrt schneidet jede Kongruenzebene die beiden Leitebenen in konjugiert komplexen isotropen Geraden. Eine Kongruenz enthält daher so viele Ebenen wie eine isotrope Ebene (durch den Nullpunkt gehende) isotrope Geraden, also  $\infty^2$ . Durch jede Gerade geht genau eine Kongruenzebene hindurch. — Wie man eine Ebene durch Auszeichnung einer ihrer beiden isotropen Geraden orientiert, so eine Drehebenekongruenz durch Auszeichnung einer ihrer beiden konjugiert komplexen Leitebenen: *orientierte Rechts- bzw. Linksdrehebenekongruenz*. Zwei entgegengesetzt orientierte Drehebenekongruenzen überlagern dieselbe nichtorientierte Drehebenekongruenz. *Orientierte Drehebenekongruenz und Drehwinkel bestimmen die Drehung eindeutig*. Mit veränderlichem Drehwinkel beschreibt jeder Punkt des  $R_4$  einen Kreis um den Nullpunkt in der durch ihn gehenden Kongruenzebene.

Um uns hiervon ein dreidimensionales Bild zu machen, betrachten wir die Schnittgeraden der Kongruenzebenen mit dem uneigentlichen  $P_3$  des  $R_4$  (in § 7 über dies die stereographischen Projektionen der Schnitte der Kongruenzebenen mit der Hypersphäre). Diese machen die reellen Geraden einer elliptischen Strahlenkongruenz aus, deren Leitgeraden die Schnitte der isotropen Leitebenen mit dem  $P_3$  sind. Die

beiden Leitgeraden sind daher konjugiert komplexe geradlinige Erzeugende der nullteiligen Kugel des  $P_3$ , und zwar beide der rechten oder der linken Schar; sie schneiden einander also niemals und sind immer verschieden. Die Drehkreise von der sphärischen Länge  $2\pi$  gehen bei der Projektion in zweimal durchlaufene Kongruenzgeraden von der elliptischen Länge  $\pi$  über.

Die Bahngeraden einer Rechtsdrehung im  $P_3$  lassen sich auf  $\infty^2$  verschiedene Weisen zu einer Schar von  $\infty^1$  ineinander geschachtelten einschaligen Hyperboloiden zusammenfassen, deren „linke“ reelle geradlinige Erzeugende sie sind, während zugleich die „rechten“ Erzeugenden Bahngeraden einer Linksdrehung im  $P_3$  sind. Die beiden Leitgeraden der Rechtsdrehkongruenz bezeichnen wir mit  $E_{13}$  und  $E_{34} = \bar{E}_{13}$ , die beiden Leitgeraden einer beliebigen Linksdrehkongruenz mit  $E_{23}$  und  $E_{14} = \bar{E}_{23}$ , vgl. Fig. 1. Die vier geradlinigen Erzeugenden  $E_{13}, E_{34}$  und  $E_{23}, E_{14}$  der nullteiligen Kugel bilden ein windschiefes Viereck, in dem sich ein Büschel von Hyperboloiden, darunter auch unsere (reellen) einschaligen, schneidet. Jede reelle Gerade eines solchen einschaligen Hyperboloides trifft entweder  $E_{13}$  und  $E_{34}$  oder  $E_{23}$  und  $E_{14}$ , je nachdem sie zur linken oder rechten Schar gehört; sie ist somit eine Gerade der Rechtsdrehkongruenz oder der Linksdrehkongruenz. Die nullteilige Kugel ist selbst ein Hyperboloid des Büschels; ihre Erzeugenden  $E_{13}$  und  $E_{34}$  gehören als Bilder zweier isotroper Ebenen der rechten Schar der rechten Erzeugendenschar an. Wir nennen daher folgerichtig die Bahngeraden der Rechtsdrehkongruenz, welche alle  $E_{13}$  und  $E_{34}$  treffen, die linken Erzeugenden der Hyperboloide. — Durch jeden reellen Punkt des  $P_3$  geht genau ein Hyperboloid, also genau eine Gerade der Rechts- und eine der Linksdrehkongruenz. Diese beiden Geraden fallen zusammen, das Hyperboloidartet in sie aus, wenn der Punkt auf einer der beiden gemeinsamen Geraden der Rechts- und Linksdrehkongruenz liegt, die die Diagonalen  $E_{13}$  und  $E_{34}$  des windschiefen Vierecks sind. Man kann diese beiden Geraden als die Achsen des Hyperboloidbüschels ansprechen. Sie sind in der Rechtsdrehkongruenz nicht von anderen Kongruenzgeraden ausgezeichnet; ihre besondere Stellung hängt von der Aufteilung der Kongruenzgeraden auf Hyperboloide, oder, was dasselbe besagt, von der Auswahl der hinzugenommenen Linksdrehkongruenz ab.

### III. Identität und Diametralpunktvertauschung.

Der dritte noch mögliche Fall ist der, daß die sphärische Bewegung des  $R_4$  die Ebenen beider isotroper Scharen einzeln in sich bewegt. Dann ist sie zugleich Rechts- und Linksdrehung, daher muß in der Winkelform (S. 7)  $\varphi \equiv \psi$  und zugleich  $\varphi \equiv -\psi \pmod{2\pi}$  sein, also  $\varphi = \psi = 0$  oder  $\varphi = \psi = \pi$ . Im ersten Fall liegt die identische Bewegung  $E$ , im zweiten die Spiegelung am Nullpunkte, d. i. *Diametralpunktvertauschung*  $S$  vor. Diese beiden sphärischen Bewegungen sind die einzigen, die zugleich Rechts- und Linksdrehung sind. — Zwei Bewegungen, die sich um eine Diametralpunktvertauschung unterscheiden, heißen *entgegengesetzt* und werden bisweilen als

$$G^+ \quad \text{und} \quad G^- = G^+ S$$

voneinander unterschieden. Die Bezeichnung rechtfertigt sich damit, daß die Bewegung  $S$  die Ordnung 2 hat. Die Drehwinkel zweier entgegengesetzter Bewegungen unterscheiden sich um ein ungerades Vielfaches von  $\pi$ .

## § 2.

## Rechts- und Linksdrehung.

Nicht jede starre Bewegung des  $R_4$  um den Nullpunkt ist eine Drehung, aber jede Bewegung erster Art  $G$  ist das Produkt einer Rechtsdrehung  $G_r$  und einer Linksdrehung  $G_l$ . Zunächst nämlich ist das Produkt einer Rechtsdrehung  $G_r$  und einer Linksdrehung  $G_l$  eine allgemeine Bewegung  $G$ . Denn die Rechtsdrehebene kongruenz von  $G_r$  und die Linksdrehebene kongruenz von  $G_l$  haben genau ein reelles Paar von Ebenen,  $E_{13}$  und  $E_{34}$ , gemeinsam. Führt man ein Koordinatensystem ein, in dem beide Drehungen die Winkelform annehmen (§ 1 S. 6), so wird die eine Koordinatenebene  $E_{13}$  durch  $\varphi = \chi_r + \chi_l$ , die andere  $E_{34}$  durch  $\psi = \chi_r - \chi_l \pmod{2\pi}$  gedreht. Es werden also zwei total senkrechte Ebenen durch Winkel gedreht, die dem absoluten Betrage nach verschieden sind, falls nicht etwa  $G_r$  oder  $G_l$  Diametralpunktvertauschung oder Identität ist. Ist  $G_r$  die Diametralpunktvertauschung  $S$ , also  $\chi_r = \pi$ , so ist  $G_l G_r = G_l S$  wieder eine Linksdrehung, die entgegengesetzte von  $G_l$ , Drehwinkel  $\equiv \chi_l + \pi \pmod{2\pi}$ ; entsprechend im linken Falle. Das Produkt  $G_l G_r$  ist daher eine allgemeine Bewegung, die nur in den vier Ausnahmefällen in eine Drehung ausartet. — Da die resultierende Bewegung von der Reihenfolge von  $G_r$  und  $G_l$  unabhängig ist, weil die beiden senkrechten Drehebene und die beiden Drehwinkel  $\varphi$  und  $\psi$ , die charakteristischen Daten der Bewegung, es sind, so ist jede Rechtsdrehung mit jeder Linksdrehung vertauschbar. — Liegt umgekehrt eine allgemeine starre Bewegung  $G$  vor, so gibt es genau eine Rechtsdrehebene kongruenz und eine Linksdrehebene kongruenz, die die beiden in sich bewegten Ebenen von  $G$  zu Kongruenzebenen hat. Wird die erste durch eine Rechtsdrehung  $G_r$  um den Winkel  $\chi_r$  in sich gedreht, die linke durch eine Linksdrehung  $G_l$  um den Winkel  $\chi_l$ , so müssen, damit  $G_l G_r = G$  sei, die Gleichungen gelten (bei geeigneter Orientierung):

$$\varphi = \chi_r + \chi_l + 2k\pi,$$

$$\psi = \chi_r - \chi_l + 2k'\pi,$$

also

$$\chi_r = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) + (k + k')\pi,$$

$$\chi_l = \frac{1}{2}(\varphi - \psi) + (k - k')\pi.$$

Da die Drehwinkel  $\chi_r$  und  $\chi_l$  das ganze Intervall von 0 bis  $2\pi$  durchlaufen können, läßt sich  $G$  in genau zwei entgegengesetzte Paare von einer Rechts- und einer Linksdrehung zerlegen<sup>7)</sup>.

<sup>7)</sup> Es ist für unsere Zwecke nicht erforderlich, diese Tatsache analytisch zu verifizieren und die orthogonalen „Drehmatrizen“  $G_r$  und  $G_l$  anzugeben, in die sich jede orthogonale Matrix  $G$  zerlegen läßt. Vgl. hierzu E. Steinitz, Polyeder und Raumeinklingen. Enc. math. Wiss. III, AB 12 (1916), S. 126.

Die Reihenfolge der Faktoren eines Produktes von Bewegungen legen wir durch die Bestimmung fest, daß die Bewegung, die entsteht, wenn man erst die Bewegung  $A$  und dann die Bewegung  $B$  ausführt, die Bewegung  $BA$  ist (von rechts nach links lesen!). Sind dann

$$G_i = G_{li}^+ G_{ri}^+ = G_{li}^- G_{ri}^- \quad (i = 1, 2, 3)$$

drei in Rechts- und Linksdrehung zerlegte Bewegungen, und ist

$$G_3 = G_2 G_1,$$

so ist

$$G_{r2}^+ G_{r1}^+ = G_{r3}^+ \quad \text{oder} \quad G_{r3}^-$$

und ebenso entsprechend

$$G_{l2}^+ G_{l1}^+ = G_{l3}^+ \quad \text{oder} \quad G_{l3}^-$$

wegen der Vertauschbarkeit von rechts und links, also

$$\text{entweder} \quad G_{r3}^+ = G_{r2}^+ G_{r1}^+ \quad \text{und} \quad G_{l3}^+ = G_{l2}^+ G_{l1}^+$$

$$\text{oder} \quad G_{r3}^- = G_{r2}^- G_{r1}^- S \quad \text{und} \quad G_{l3}^- = G_{l2}^- G_{l1}^- S.$$

Die Zerlegung eines Produktes ist daher gleich dem Produkt der Zerlegungen der Faktoren in Rechts- und Linksdrehung bis auf eine Diametralpunktvertauschung.

### § 3.

#### Abbildung in Paare euklidischer $R_3$ -Drehungen.

Die Zerlegung der allgemeinen sphärischen Bewegung in Rechts- und Linksdrehung hat den Zweck, eine Gruppe sphärischer Bewegungen des  $R_4$  auf eine Gruppe von Paaren je einer Rechts- und einer Linksdrehung zurückzuführen (§ 4). Jede Gruppe von Rechts- oder von Linksdrehungen läßt sich weiter durch eine Gruppe sphärischer Bewegungen, also starrer Drehungen des euklidischen  $R_3$  ersetzen, also die endlichen Gruppen durch die bekannten endlichen Gruppen gewöhnlicher starrer Drehungen, die wir im folgenden *platonische Gruppen* nennen, weil sie einen der platonischen Körper, vielmehr eine regelmäßige Kugelteilung in sich überführen. Den Übergang von der Drehung des  $R_4$  zur Drehung dieses  $R_3$  nehmen wir folgendermaßen vor.

Wir zeichnen im  $R_4$  einen reellen Vektor  $e$ , also auf der Hypersphäre einen Punkt ein für allemal aus. Jede Rechtsdrehebene kongruenz schickt durch diesen ausgezeichneten Vektor  $e$  genau eine Kongruenzebene hindurch, ebenso jede Linksdrehebene kongruenz. Die Auszeichnung des Vektors  $e$  ermöglicht es daher, jeder Rechtsdrehebene kongruenz eine Linksdrehebene kongruenz zuzuordnen, nämlich die, die dieselbe Kongruenzebene durch  $e$  schickt wie die Rechtskongruenz. Hiermit ist zugleich jeder Rechts-



drehung  $G_r$  eine Linksdrehung  $G'_i$  eindeutig zugeordnet. Ist  $E_{34}$  die mit  $\epsilon$  inzidente Drehebene von  $G_r$  und wird sie von  $G_r$  durch den Winkel  $\chi_r$  gedreht, wenn man die Bezeichnung von § 1 S. 7 zugrunde legt, so soll  $G'_i$  die Linksdrehung sein, die dieselbe Ebene durch  $\chi'_i = -\chi_r$  dreht.  $G'_i$  ist dadurch charakterisiert, daß  $G'_i G_r = G_e$  den ausgezeichneten Vektor  $\epsilon$  festläßt. Nun kommt es uns nicht auf die Zuordnung von  $G_r$  zu  $G'_i$ , sondern auf die zu  $G_e$  an.  $G_e$  ist eine sphärische Bewegung des  $R_4$ , die  $E_{34}$  punktweise festläßt ( $\psi_e = 0$ ) und die zu  $E_{34}$  total senkrechte Ebene  $E_{12}$  durch den Winkel  $\varphi_e = 2\chi_r$  dreht. Mit dem ausgezeichneten Vektor  $\epsilon$  bewegt  $G_e$  den zu  $\epsilon$  senkrechten  $R_3$  starr um den Nullpunkt in sich<sup>\*)</sup>. Damit ist die *Abbildung einer Rechtsdrehung  $G_r$  auf eine Drehung  $G_r$  des ausgezeichneten  $R_3$*  geleistet. Die Drehung des  $R_3$ , in die sich die Rechtsdrehung  $G_r$  abbildet, kennzeichnen wir, wie auch sonst den Übergang vom  $R_4$  in den Bild- $R_3$ , durch Fettdruck. Ebenso wie eine Rechtsdrehung bildet sich jede Linksdrehung  $G_i$  in eine Drehung  $G_i$  des ausgezeichneten  $R_3$  ab.

Liegt umgekehrt eine Drehung des ausgezeichneten  $R_3$  vor, so wird sie von einer eindeutig bestimmten,  $\epsilon$  festlassenden sphärischen Bewegung des  $R_4$  hervorgerufen, und diese läßt sich nach § 2 in zwei entgegengesetzte Paare einer Rechts- und einer Linksdrehung zerlegen, so daß man jeder Drehung des ausgezeichneten  $R_3$  zwei entgegengesetzte Rechtsdrehungen  $G_r^+$  und  $G_r^-$  und nach Belieben ebenso zwei Linksdrehungen  $G_i^+$  und  $G_i^-$  zuordnen kann, die sich in sie abbilden. Je nachdem man die  $R_3$ -Drehung als Bild einer Rechts- oder Linksdrehung auffaßt, wird sie  $G_r$  oder  $G_i$  benannt.

Sind die drei Rechtsdrehungen  $G_{ri}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in die drei  $R_3$ -Drehungen  $G_{r,i}$  abgebildet und ist

$$G_{r,3} = G_{r,2} G_{r,1},$$

so auch

$$G_{r,3} = G_{r,2} G_{r,1};$$

dabei bedeutet das letzte Produkt die Drehung, die entsteht, wenn man erst  $G_{r,1}$ , dann  $G_{r,2}$  auf den  $R_3$  ausübt. Wenn nämlich  $G_{e,i} = G'_{i,i} G_{r,i}$ , so ist  $G_{e,2} G_{e,1} = (G'_{i,2} G'_{i,1})(G_{r,2} G_{r,1})$  wegen der Vertauschbarkeit von Rechts- und Linksdrehung, und weiter  $= G'_{i,3} G_{r,3}$ , wenn  $G'_{i,2} G'_{i,1} = G'_{i,3}$  gesetzt wird. Weil aber diese sphärische Bewegung den Vektor  $\epsilon$  festläßt, bewirkt sie dieselbe  $R_3$ -Drehung wie das Bild  $G_{r,3}$  der Rechtsdrehung  $G_{r,3}$ .

Da wir die allgemeine sphärische Bewegung des  $R_4$  in eine Rechtsdrehung und eine Linksdrehung und ebenso in die beiden entgegengesetzten Rechts- und Linksdrehungen zerlegen können, eine Rechtsdrehung [Links-

<sup>\*)</sup> Die punktweise feste Ebene  $E_{34}$  wird von dem ausgezeichneten Vektor  $\epsilon$  und der Drehachse  $\epsilon_i$  der starren  $R_3$ -Drehung aufgespannt,  $E_{12}$  liegt in diesem  $R_3$  und steht in ihm senkrecht auf  $\epsilon_i$ .

drehung] und ihre entgegengesetzte sich aber in ein und dieselbe Drehung  $G_r [G_l]$  des ausgezeichneten  $R_3$  abbildet, so bildet sich jede sphärische  $R_4$ -Bewegung eindeutig in ein geordnetes Paar  $(G_r, G_l)$  von Drehungen des ausgezeichneten  $R_3$  ab. Umgekehrt bestimmt jedes solche Paar eine sphärische  $R_4$ -Bewegung bis auf Diametralpunktvertauschung.

Ist insbesondere  $G_r = G_l$ , so bildet sich in das Paar  $(G_r, G_l)$  die sphärische  $R_4$ -Bewegung ab, die den Vektor  $e$  festläßt und im ausgezeichneten  $R_3$  die Drehung  $G_r = G_l$  bewirkt, und die entgegengesetzte Bewegung.

Sind hiernach die sphärischen  $R_4$ -Bewegungen  $G_1$  und  $G_2$  in die Paare von  $R_3$ -Drehungen  $(G_{r1}, G_{l1})$  und  $(G_{r2}, G_{l2})$  abgebildet, so das Produkt  $G_2 G_1$  in das Paar  $(G_{r2} G_{r1}, G_{l2} G_{l1})$ . Jede richtige Beziehung zwischen  $R_4$ -Bewegungen geht daher in eine richtige Beziehung zwischen den rechten und zwischen den linken Bilddrehungen über.

Es geht uns noch die Frage an, wie sich die beiden Bilddrehungen einer sphärischen Bewegung des  $R_4$  in dem ausgezeichneten  $R_3$  ändern, wenn man diesen  $R_3$  durch einen neuen  $R_3$ , den Vektor  $e$  also durch einen andern ausgezeichneten Vektor ersetzt. Anstatt den Übergang von einem ausgezeichneten  $R_3$  zu einem andern vorzunehmen, wollen wir den ursprünglichen  $R_3$  beibehalten, dafür aber alle Bewegungen des  $R_4$  mit einer Bewegung  $T = T_r T_l$  transformieren. Eine Bewegung  $G$  des  $R_4$  geht hierbei über in die transformierte Bewegung  $G' = T G T^{-1}$ . Bildet sich nun  $G$  in das Paar  $(G_r, G_l) = G$ ,  $T = T_r T_l$  in das Paar  $(T_r, T_l) = T$  ab, so ist das Bild von  $G'$ :  $G' = T G T^{-1} = (T_r, T_l) \cdot (G_r, G_l) \cdot (T_r^{-1}, T_l^{-1}) = (T_r G_r T_r^{-1}, T_l G_l T_l^{-1})$ . D. h. bei Transformation der Gruppe aller  $R_4$ -Bewegungen mit  $T = T_r T_l$  transformiert sich die Gruppe der rechten [linken] Anteile der Bildpaare mit dem Bilde  $T_r [T_l]$  der Rechts- [Links-] Drehung, in die  $T$  zerlegt ist. Ist insbesondere  $T$  eine Linksdrehung, so werden nur die linken Anteile der Bildpaare transformiert.  $T_r$  und  $T_l$  sind keinen Einschränkungen unterworfen, d. h. durchläuft  $T$  alle Bewegungen des  $R_4$ , so das Bild  $(T_r, T_l)$  alle möglichen Paare von Bewegungen des  $R_3$ .

Hat man also, um die Begriffe zu fixieren, eine Reihe von Rechtsdrehungen des  $R_4$ , deren Bilder im  $R_3$  ein bestimmtes Oktaeder in sich überführen, und eine Reihe von Linksdrehungen, deren Bilder ein Tetraeder in sich drehen, so kann man durch eine Transformation aller Bewegungen des  $R_4$  mit einer geeigneten Bewegung  $T$  jede beliebige Lage der beiden Körper in dem  $R_3$ , insbesondere jede beliebige gegenseitige Lage erreichen. Wie bemerkt, könnte man ebensogut die Bewegungen des  $R_4$  ungeändert lassen, dafür aber zu einem neuen ausgezeichneten  $R_3$  übergehen, in dem die platonischen Körper die gewünschte Lage gegeneinander einnehmen. Anwendung hiervon wird in § 6 S. 28, in § 11 S. 59 und bei Behandlung der Rechtecksgruppen gemacht.

Zwei  $R_4$ -Gruppen, die ineinander durch Transformation mit einer  $R_4$ -Bewegung übergehen, heißen (metrisch) ähnlich und werden nicht als verschiedene Bewegungsgruppen angesehen. Zu einer ähnlichen  $R_4$ -Gruppe übergehen, heißt im ausgezeichneten  $R_3$  alle Drehungen  $G_r$  mit ein und derselben  $R_3$ -Drehung  $T_r$  und alle Drehungen  $G_l$  mit ein und derselben Drehung  $T_l$  transformieren. Umgekehrt sind zwei  $R_4$ -Gruppen, deren Bilder sich in dieser Weise nur durch die Orientierung der rechten und linken Anteile unterscheiden, ähnlich. Die Bilder ähnlicher  $R_4$ -Gruppen bezeichnen wir gelegentlich als *ähnliche Paargruppen* (vgl. § 4).

Das Ergebnis ist: Nach Auszeichnung eines Vektors  $\epsilon$  des  $R_4$  bilden sich umkehrbar eindeutig je zwei entgegengesetzte sphärische  $R_4$ -Bewegungen  $G^+$  und  $G^-$  in ein geordnetes Paar  $(G_r, G_l)$  starrer Drehungen des zu  $\epsilon$  senkrechten  $R_3$  derart ab, daß dem Produkt zweier  $R_4$ -Bewegungen das Paar von  $R_3$ -Drehungen entspricht, das aus den Produkten der einzelnen Drehungen  $G_r$  und  $G_l$  besteht. Durch geeignete Wahl von  $\epsilon$  kann man die Gesamtheit der Drehungen  $G_l$  gegen die Gesamtheit der Drehungen  $G_r$  beliebig orientieren. Zerlegt man die  $R_4$ -Bewegung  $G$  in Rechts- und Linksdrehung  $G_r$  und  $G_l$ , so sind die Drehwinkel  $\chi_r$  und  $\chi_l$  der beiden Bild Drehungen  $G_r$  und  $G_l$  doppelt so groß wie die Drehwinkel  $\chi_r$  und  $\chi_l$  von  $G_r$  und  $G_l$ . Zwischen den beiden Drehwinkeln  $\varphi$  und  $\psi$  der allgemeinen Bewegung  $G$  und den Drehwinkeln der beiden Bild Drehungen im  $R_3$  besteht daher (nach § 2 S. 9) die Beziehung

$$\chi_r \equiv \varphi + \psi, \quad \chi_l \equiv \varphi - \psi \pmod{2\pi}.$$

Die reellen elliptischen Bewegungen des  $P_3$  und damit bis auf Diametralpunktvertauschung die reellen sphärischen Bewegungen des  $R_4$  werden gewöhnlich durch zwei  $\zeta$ -Substitutionen

$$\zeta_r' = \frac{\alpha_r \zeta_r + \beta_r}{-\bar{\beta}_r \zeta_r + \bar{\alpha}_r} \quad \text{und} \quad \zeta_l' = \frac{\alpha_l \zeta_l + \beta_l}{-\bar{\beta}_l \zeta_l + \bar{\alpha}_l}$$

charakterisiert, die die Transformationen der rechten und linken Schar isotroper Ebenen festlegen. Die Beziehung dieser zu unserer Darstellung wird von den orientierten Drehebene kongruenzen vermittelt. Die reellen orientierten Rechtsdrehebene kongruenzen z. B. lassen sich einerseits umkehrbar eindeutig auf die isotropen Ebenen der rechten Schar, nämlich auf eine ihrer beiden konjugiert komplexen Leitebenen beziehen, anderseits auf die reellen orientierten Bildgeraden des ausgezeichneten  $R_3$ . Jede solche Rechtskongruenz schickt nämlich durch den ausgezeichneten Vektor  $\epsilon$  genau eine orientierte Ebene, der genau eine in ihr gelegene und auf  $\epsilon$  senkrechte orientierte Gerade zugeordnet werden kann; diese ist das Bild der Rechtsdrehebene kongruenz. Wir wollen den von diesen orientierten Bildgeraden der Rechtsdrehekongruenzen erfüllten Bild- $R_3$  mit  $R_3$  bezeichnen und ihn dem ausgezeichneten Teil- $R_3$  des  $R_4$  überlagert denken. Bei einer beliebigen sphärischen  $R_4$ -Bewegung geht  $R_3$  in sich über, was vom Teil- $R_3$  im allgemeinen nicht gilt. Außerdem überlagern wir dem  $R_3$  einen Bild- $R_3$ ,  $R_{31}$ , der Linksdrehebene kongruenzen. Eine Bewegung  $G_\epsilon$  des  $R_4$ , die den ausgezeichneten  $R_3$  in sich dreht, bewegt  $R_{31}$  und  $R_3$ ,

so, als ob sie starr mit dem  $R_3$  verbunden wären. Zerlegt man  $G_e$  in  $G_r$  und  $G_l'$ :  $G_e = G_l' G_r$ , und übt statt  $G_e$  die Rechtsdrehung  $G_r$  auf den  $R_4$  aus, so erleidet  $R_3$  dieselbe Bewegung wie von  $G_e$ , da  $R_3$  bei jeder Linksdrehung festbleibt.  $R_3$  führt also bei einer Rechtsdrehung  $G_r$  eine starre Drehung aus, und daher bei jeder sphärischen Bewegung des  $R_4$ . Entsprechendes gilt von dem Raum  $R_{3,1}$ , der sich unabhängig von  $R_3$  bewegt. — In dem  $R_3$  kann man die Einheitskugel um den Nullpunkt legen, sie als komplexe Zahlenkugel auffassen und damit jede orientierte Rechtsdrehebene kongruenz, also mittelbar auch jede isotrope Ebene der rechten Schar, durch einen komplexen Parameter charakterisieren, den man bei passender Nummerierung der isotropen Ebenen der rechten Schar mit dem Parameter  $\zeta$ , zur Deckung bringen kann. — Hiermit ist die bekannte Tatsache<sup>9)</sup> erklärt, daß der Parameter  $\zeta$ , der rechten isotropen Ebenen bei einer starren Bewegung des  $R_4$  um den Nullpunkt eine  $\zeta$ -Substitution erleidet, die einer starren Drehung der  $\zeta$ -Kugel entspricht, und daß der Drehwinkel der zu dieser sphärischen  $R_4$ -Bewegung gehörigen Rechtsdrehung halb so groß ist wie der Drehwinkel der  $\zeta$ -Kugel; denn wir haben gesehen, daß er halb so groß ist wie die von  $G_e$  bewirkte Drehung  $G_r$  des ausgezeichneten  $R_3$ .

#### § 4.

#### Gruppenpaarung.

Von der einzelnen sphärischen Bewegung  $G$  gehen wir zu den *Gruppen sphärischer Bewegungen*,  $\mathfrak{G}$ , über. Das Ziel ist, diese Gruppen aus den bekannten endlichen Drehungsgruppen des  $R_3$ , den platonischen Gruppen, zusammenzusetzen. Die Aufgabe zerlegt sich in die folgenden zwei Fragen.

Nach § 3 S. 12 entspricht jeder sphärischen Bewegungsgruppe  $\mathfrak{G}$  des  $R_4$  eine Gruppe von geordneten Paaren von  $R_3$ -Drehungen  $(G_r, G_l)$ . Es handelt sich also erstens darum, aus den bekannten platonischen Gruppen von einzelnen Drehungen die Gruppen von Paaren solcher Drehungen abzuleiten — *Gruppenpaarung*. Sodann aber bilden sich in jedes Paar  $(G_r, G_l)$  von  $R_3$ -Drehungen zwei entgegengesetzte sphärische Bewegungen des  $R_4$ ,  $G^+$  und  $G^-$ , ab. Es fragt sich daher zweitens, wann die  $R_4$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$  zweistufig und wann sie etwa einstufig isomorph zu der *Paargruppe*  $\mathfrak{G}$  des  $R_3$  ist — *Einstufigkeitsfrage* (§ 5).

<sup>9)</sup> E. Goursat, Substitutions orthogonales, Ann. Éc. Norm. (3) 6 (1890). Diese ergebnisreiche und leicht lesbare Arbeit behandelt nicht eigentlich die orthogonalen Substitutionen, sondern solche, deren Koeffizienten noch mit einem gemeinsamen willkürlichen Faktor behaftet sind, also nicht die sphärischen Bewegungen des  $R_4$ , sondern die elliptischen des  $P_3$ , nicht die homogenen orthogonalen Substitutionen von vier inhomogenen, sondern von vier homogenen Veränderlichen. Die endlichen Gruppen dieser Substitutionen — mit unseren Paargruppen 1-isomorph — sind mit einer Ausnahme (§ 4 S. 18 Fußnote und § 4 S. 22) vollständig angegeben. — Da es uns auf eine vollständige Ermittlung aller sphärischen Bewegungsgruppen und nicht der elliptischen ankommt, müssen wir uns der langwierigen Aufgabe ihrer Aufzählung unterziehen und können nicht auf die Goursatsche Arbeit verweisen.

Die Gruppenpaarung ist von É. Goursat (s. Fußnote <sup>10</sup>), loc. cit. § 11, 12) behandelt worden<sup>10</sup>). Wir geben hier die Lösung wieder.

Das Verknüpfungsgesetz der Paare von  $R_3$ -Drehungen  $(G_i, G_j)$  bestand darin, daß die ersten Elemente und die zweiten Elemente multipliziert werden. Wir bezeichnen das Paar  $(G_i, E)$ , das nicht in unserer Paargruppe  $\mathfrak{G}$  enthalten sein muß, mit  $R$ , das Paar  $(E, G_i)$  mit  $L$ ;  $E$  bezeichnet das Einheitsselement. Die Elemente  $R$  bilden für sich eine Gruppe  $\mathfrak{N}$ , die Elemente  $L$  eine Gruppe  $\mathfrak{Z}$ . Jedes Element von  $\mathfrak{N}$  ist mit jedem von  $\mathfrak{Z}$  vertauschbar, und die Elemente der Paargruppe  $\mathfrak{G}$  sind unter den Produkten  $RL$  enthalten. Mit anderen Worten:  $\mathfrak{G}$  ist Untergruppe des direkten Produktes der Gruppen  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{Z}$ . Umgekehrt ist jede Untergruppe des direkten Produktes eine Paargruppe  $\mathfrak{G}$ . Es erwächst uns also die Aufgabe, alle Untergruppen des direkten Produktes  $\mathfrak{N}\mathfrak{Z}$  zweier gegebener abstrakter Gruppen  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{Z}$  zu finden. Nicht jede Untergruppe des direkten Produktes  $\mathfrak{N}\mathfrak{Z}$  ist direktes Produkt einer Untergruppe von  $\mathfrak{N}$  mit einer Untergruppe von  $\mathfrak{Z}$ .

Ist  $\mathfrak{G}$  eine der gesuchten Gruppen, so enthält sie gewisse Elemente von  $\mathfrak{N}$ , mindestens das Einheitsselement. Diese bilden in ihrer Gesamtheit eine Untergruppe  $\mathfrak{r}$  von  $\mathfrak{N}$ . Andererseits bildet die Menge der Elemente von  $\mathfrak{N}$ , die an der Bildung von Elementen von  $\mathfrak{G}$  überhaupt beteiligt sind, ebenfalls eine Untergruppe von  $\mathfrak{N}$ . Wir dürfen und wollen annehmen, daß diese mit  $\mathfrak{N}$  selbst zusammenfällt, weil wir im andern Falle schon in unserer Aufgabe  $\mathfrak{N}$  durch die Untergruppe hätten ersetzen können, da doch die übrigen Elemente von  $\mathfrak{N}$  für die Paarung keine Rolle spielen würden. Die Elemente von  $\mathfrak{N}$ , die nicht zu  $\mathfrak{r}$  gehören, treten alsdann nur in Verbindung mit Elementen von  $\mathfrak{Z}$  in  $\mathfrak{G}$  auf. Entsprechendes gilt von der Gruppe  $\mathfrak{Z}$ .

Die Elemente von  $\mathfrak{N}\mathfrak{Z}$  ordnen wir in einer Tafel mit doppeltem Eingang an. Den oberen Eingang bilden die Elemente von  $\mathfrak{N}$ , den linken die von  $\mathfrak{Z}$ . Indem wir  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{r}$  und die Restklassen<sup>11</sup>) von  $\mathfrak{r}$  zerlegen und ebenso  $\mathfrak{Z}$  in die entsprechend definierte Untergruppe  $\mathfrak{I}$  und deren Restklassen, teilt sich die Tafel in kleinere Rechtecke ein. Sind  $m$  und  $n$  die Ordnungen von  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{Z}$ <sup>12</sup>),  $\mu$  und  $\nu$  die von  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{I}$ , so enthält die gesamte Tafel  $mn$  Elemente — Ordnung des direkten Produktes  $\mathfrak{N}\mathfrak{Z}$  —, die kleineren Rechtecke aber  $\mu\nu$  Elemente. Die Elemente des linken oberen Rechtecks mögen  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{I}$  zum oberen und

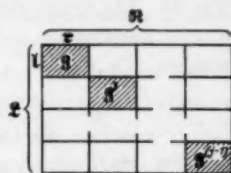


Fig. 2.

<sup>10</sup>) Vgl. auch G. Vivanti, Fonctions polyédriques (Paris 1910), S. 12.

<sup>11</sup>) Auch Nebenkomplexe oder Nebengruppen genannt. In der Bezeichnung folgen wir H. Hasse, Höhere Algebra (Sammlung Göschel 1926), I, S. 60.

<sup>12</sup>) Die hier eingeführten Bezeichnungen werden in der ganzen Arbeit beibehalten.

linken Eingang haben; sie bilden eine Gruppe, das direkte Produkt  $\mathfrak{r} \mathfrak{l} = \mathfrak{g}$ , das sicher Untergruppe unserer Paargruppe  $\mathfrak{G}$  ist und die Ordnung  $\mu \nu$  hat. —  $\mathfrak{r}$  ist invariante Untergruppe von  $\mathfrak{R}$ . Denn ist  $r$  ein Element von  $\mathfrak{r}$ ,  $RL$  irgendein Element von  $\mathfrak{G}$ , so ist  $(R \cdot L)^{-1} r (R \cdot L) = R^{-1} r R$ , weil alle Elemente von  $\mathfrak{R}$  mit allen von  $\mathfrak{L}$  vertauschbar sind. Dies Element ist daher wie  $r$  selbst ein gemeinsames Element von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{R}$ , also zu  $\mathfrak{r}$  gehörig. Ebenso ist die Gruppe  $\mathfrak{l}$  der gemeinsamen Elemente von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{L}$  invariant in  $\mathfrak{L}$  enthalten. Hieraus folgt, daß auch die Gruppe  $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \mathfrak{l}$  invariant in  $\mathfrak{G}$  enthalten ist.

Von jeder Zeile unserer rechteckigen Tafel gehören genau so viele Elemente der Untergruppe  $\mathfrak{G}$  an wie von der ersten Zeile, also  $\mu$ . Denn multipliziert man die Gruppe  $\mathfrak{G}$  mit einem ihrer Elemente  $RL$ , so geht hierdurch die gesamte Zeile mit dem linken Eingang  $L^{-1}$  in die erste Zeile über, d. h. in die mit dem Eingang  $E$ . Also enthält wegen der umkehrbaren Eindeutigkeit der Gruppenmultiplikation die Zeile mit dem Eingang  $L^{-1}$ , also jede Zeile, so viele Elemente aus  $\mathfrak{G}$  wie die erste. Die rechten Anteile der zu  $\mathfrak{G}$  gehörigen Elemente einer Zeile fallen alle in die gleiche Restklasse von  $\mathfrak{r}$  in  $\mathfrak{R}$ , denn sie gehen durch Multiplikation mit einem Elemente von  $\mathfrak{R}$  in  $\mathfrak{r}$  über; entsprechendes gilt für die linken Anteile. Mit jedem Element  $RL$  von  $\mathfrak{G}$  gehören daher die sämtlichen Elemente des Rechtecks  $RL \cdot \mathfrak{g}$  zu  $\mathfrak{G}$ . Das sind die Elemente, deren oberer Eingang die  $R$  enthaltende Restklasse von  $\mathfrak{r}$  in  $\mathfrak{R}$ , und deren linker Eingang die  $L$  enthaltende Restklasse von  $\mathfrak{l}$  in  $\mathfrak{L}$  ist. Hiermit wird  $\mathfrak{G}$  in lauter Rechtecke  $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \dots, \mathfrak{g}^{(j-1)}$  zerlegt, und diese bilden die Zerlegung von  $\mathfrak{G}$  in die Restklassen von  $\mathfrak{g}$ . Bei geeigneter Anordnung der Restklassen von  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{l}$  stoßen die Rechtecke in der Tafel längs der Hauptdiagonale aneinander (Fig. 2). Die Quotientengruppen  $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}, \mathfrak{L}/\mathfrak{l}, \mathfrak{G}/\mathfrak{g}$  sind einstufig isomorph, da die Restklassen und ihre Multiplikation in  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{L}$  einander entsprechen. Es ist

$m = j\mu$  die Ordnung von  $\mathfrak{R}$ ,

$n = j\nu$  die Ordnung von  $\mathfrak{L}$ ,

$g = j\mu\nu$  die Ordnung von  $\mathfrak{G}$ ,

$j$  der gemeinsame Index von  $\mathfrak{r}$  in  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{l}$  in  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{G}$ .

Um aus gegebenen Gruppen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{L}$  alle Untergruppen  $\mathfrak{G}$  ihres direkten Produktes  $\mathfrak{R} \mathfrak{L}$  abzuleiten (alle solchen, an deren Bildung alle Elemente von  $\mathfrak{R}$  und alle von  $\mathfrak{L}$  wirklich teilhaben), hat man daher alle invarianten Untergruppen von  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{L}$  zu durchmustern. Finden sich darunter zwei,  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{l}$ , mit einstufig isomorphen Quotientengruppen  $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{L}/\mathfrak{l}$ , so geben sie zur Bildung von einer oder mehreren Gruppen  $\mathfrak{G}$  Anlaß. Umgekehrt erhält man so alle Untergruppen der bezeichneten Art.



Zur Erläuterung führen wir drei extreme Fälle der Gruppenpaarung an:

1.  $\mathfrak{L}$  besteht aus dem Einheitsselement allein. Dann gibt es nur die eine Paargruppe  $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}$ . Den Paaren  $(G, E)$  von  $\mathfrak{N}$  entsprechen im  $R_4$  Rechtsdrehungen, die eine *Rechtsdrehgruppe*  $\mathfrak{N}$  bilden.

2. Der gemeinsame Index  $j$  ist  $= 1$ . Die Quotientengruppe besteht aus dem Einheitsselement.  $\mathfrak{G}$  wird nur von einem Rechteck, der ganzen Tafel, Fig. 2, gebildet: *direktes Produkt*  $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \mathfrak{L}$ .

3.  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{L}$  stimmen mit der Quotientengruppe überein,  $r$  und  $l$  bestehen also beide aus dem Einheitsselement;  $j = m = n$ . Die Elemente von  $\mathfrak{G}$  stehen alle in der Diagonale der alsdann quadratischen Tafel: *Diagonalgruppen*.

Die übrigen Paargruppen, bei denen also weder die Quotientengruppe  $\mathfrak{G}/g$  noch beide Untergruppen  $r$  und  $l$  aus dem Einheitsselement bestehen, nennen wir gelegentlich *Rechtecksgruppen*, weil unsere rechteckige Tafel Fig. 2 dann in kleinere Rechtecke zerfällt, die weder in einzelne Elemente (Diagonalgruppen) noch in eine Zeile (Rechtsdrehgruppen) noch in die ganze Tafel (direkte Produkte) ausgeartet sind.

Die Gruppenpaarung ist ein Verfahren, das sich auf abstrakte Gruppen bezieht. Wenden wir es insbesondere zur Bildung unserer *Paargruppen von Drehungen des  $R_3$*  an, so haben wir für  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{L}$  unabhängig voneinander die fünf verschiedenen platonischen Gruppentypen einzusetzen: zyklische, Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergruppe. Die Paargruppen zerfallen danach in 15 Klassen. Innerhalb jeder Klasse hat man die Gruppenpaarung anzuwenden, d. h.  $r$  und  $l$  von gemeinsamer Quotientengruppe aufzusuchen. Man kann daher die Gruppen jeder Klasse nach der Quotientengruppe  $\mathfrak{G}/g$  weiter feinteilen, etwa mit der aus dem Einheitsselement bestehenden Quotientengruppe, also mit den direkten Produkten beginnend. Beispiele folgen in § 6. Wir benutzen eine weniger systematische, den topologischen Zwecken angepaßte Einteilung, geben aber als Überschrift jedesmal die Klasse, also  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{L}$ , an.

Auch wenn  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{L}$ ,  $r$ ,  $l$  festliegen, gehören zu dieser Wahl unter Umständen noch mehrere verschiedene Paargruppen  $\mathfrak{G}$ . Jede Restklasse von  $\mathfrak{L}/l$  wird mit einer bestimmten Restklasse von  $\mathfrak{N}/r$  gepaart und erzeugt eine Restklasse von  $g$  in  $\mathfrak{G}$ , ein Rechteck. Die einzige Bedingung die der Paarung auferlegt ist, besteht darin, daß nur solche Elemente der beiden Quotientengruppen gepaart werden, die einander vermöge einer 1-isomorphen Abbildung von  $\mathfrak{N}/r$  und  $\mathfrak{L}/l$  entsprechen. Eine solche Abbildung läßt sich nun im allgemeinen auf verschiedene Weise vornehmen. Man gelangt von einer Abbildung zu jeder anderen, wenn man etwa die Restklassen von  $r$  in  $\mathfrak{N}$  festläßt und auf die Elemente von  $\mathfrak{L}/l$  einen



Automorphismus der Quotientengruppe ausübt<sup>1a)</sup>. Man erhält also zunächst so viele Paargruppen  $\mathfrak{G}$  als die Quotientengruppe  $\mathfrak{Z}/I$  Automorphismen zuläßt. Zwei solche Paargruppen stellen zwar verschiedene Untergruppen des direkten Produktes  $\mathfrak{N} \times \mathfrak{Z}$  dar, können aber trotzdem ähnlich sein (§ 3 S. 13). Man gelangt nämlich von einer Paargruppe  $\mathfrak{G}$  zu einer ähnlichen  $\mathfrak{G}'$ , wenn man alle Elemente von  $\mathfrak{N}$  mit ein und derselben  $R_3$ -Drehung  $T_i$  und alle Elemente von  $\mathfrak{Z}$  mit ein und derselben  $R_3$ -Drehung  $T_i$  transformiert und  $T_i G_i T_i^{-1}$  mit  $T_i G_i T_i^{-1}$  paart, wenn in  $\mathfrak{G}$   $G_i$  mit  $G_i$  gepaart waren. Die Paare  $(T_i G_i T_i^{-1}, T_i G_i T_i^{-1})$  bilden die ähnliche Gruppe  $\mathfrak{G}'$ , die als nicht verschieden von  $\mathfrak{G}$  betrachtet wird. Die zu  $\mathfrak{N} \times \mathfrak{Z}, \mathfrak{r}, \mathfrak{i}$  gehörenden Untergruppen von  $\mathfrak{N} \times \mathfrak{Z}$  zerfallen also in Klassen ähnlicher; indem man aus jeder Klasse einen Repräsentanten auswählt, erhält man ein vollständiges System nichtähnlicher Paargruppen.

Wir haben hiernach zwei Aufgaben vor uns: 1. sämtliche Automorphismen der vor kommenden Quotientengruppen aufzustellen, 2. zu untersuchen, wie viele nichtähnliche Paargruppen durch die Automorphismen entstehen. — Die Quotientengruppen der platonischen Gruppen sind bekanntlich wieder platonische Gruppen. Wir berichten daher zunächst über die Automorphismen der platonischen Gruppen. Besonders interessieren uns dabei die Automorphismen, die sich bewirken lassen durch Transformation der Gruppe mit einer Drehung des  $R_3$  (die nicht notwendig selbst zur Gruppe zu gehören, also keinen inneren Automorphismus zu bewirken braucht). Wir sagen dann, daß dieser Automorphismus innerhalb der Gruppe aller Drehungen liege.

I. *Zyklische Gruppe*, erzeugt von  $Z$ , Relation  $Z^n = E$ . Der Automorphismus ist bestimmt durch das Element, in das sich  $Z$  abbildet:  $Z \rightarrow Z^p$ .  $p$  muß prim zu  $n$  sein, damit ein Automorphismus entsteht. Die zyklische Gruppe hat, weil abelsch, nur äußere Automorphismen. Dagegen gibt es für  $n \geq 3$  einen innerhalb der Gruppe aller Drehungen gelegenen Automorphismus. Faßt man nämlich die zyklische Gruppe als Untergruppe einer Diedergruppe auf, so geht  $Z$  durch Transformation mit der Drehung um eine Nebenachse des Dieders in  $Z^{-1}$  über und somit jedes Element der zyklischen Gruppe in sein reziprokes. Dieser Automorphismus liegt innerhalb der Diedergruppe, also erst recht innerhalb der Gruppe aller Drehungen. Andere Automorphismen innerhalb der Gruppe aller Drehungen gibt es nicht.

IIa. *Diedergruppe der Ordnung  $n = 2n' \geq 6$* .  $Z$  erzeuge die größte zyklische Untergruppe,  $D$  sei eine Drehung um eine Nebenachse. Die Automorphismen sind gegeben durch  $Z \rightarrow Z^p$ ,  $D \rightarrow DZ^q$ ,  $p$  prim zu  $n'$ ,  $q$  beliebig. Innerhalb der Gruppe aller Drehungen liegen die Automorphismen  $Z \rightarrow Z$ ,  $D \rightarrow DZ^q$  und  $Z \rightarrow Z^{-1}$ ,

<sup>1a)</sup> Daß durch einen Automorphismus der Quotientengruppe  $\mathfrak{Z}/I$  — natürlich durch einen solchen, der sich nicht von einem Automorphismus der ganzen Gruppe  $\mathfrak{Z}$  bewirken läßt — schon abstrakt verschiedene (d. h. nicht 1-isomorphe) Paargruppen entstehen können, zeigt folgendes Beispiel:  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{Z}$  Diedergruppen der Ordnungen  $4\mu'$  und  $4\nu'$ ,  $\mu'$  und  $\nu'$  verschiedene Primzahlen,  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{i}$  zyklische Gruppen der Ordnungen  $\mu'$  und  $\nu'$ , gemeinsame Quotientengruppe also Vierergruppe. Die sechs äußeren Automorphismen der Vierergruppe erzeugen Paargruppen, von denen eine ein Element der Ordnung  $2\mu'\nu'$  besitzt, eine andere dagegen kein Element so hoher Ordnung aufweist. Vgl. auch § 4 S. 22.

$D \rightarrow DZ^{-q}$ . Die erstgenannten Automorphismen erhält man durch Transformation mit der Drehung um die Hauptachse des Dieders, die die Achse von  $D$  in die Achse von  $DZ^q$  überführt, die zweitgenannten durch Transformation mit einer Drehung um eine Nebenachse des Dieders oder um die Winkelhalbierende zweier benachbarter Nebenachsen.

IIb. *Diedergruppe der Ordnung 4* (Vierergruppe); hat als Abelsche Gruppe nur äußere Automorphismen, und zwar, da ihre drei Elemente der Ordnung 2 gleichberechtigt sind,  $3! = 6$ ; sie liegen alle innerhalb der Gruppe aller Drehungen.

III. *Tetraedergruppe*; hat einen einzigen<sup>14)</sup> äußeren Automorphismus. Er liegt innerhalb der Gruppe aller Drehungen, denn er ist ein innerer Automorphismus der Oktaedergruppe, als deren Untergruppe man die Tetraedergruppe ansehen kann (Vertauschung von Tetraeder und Gegentetraeder). Bei diesem Automorphismus werden die drei Restklassen der Vierergruppe innerhalb der Tetraedergruppe vertauscht.

IV. *Oktaedergruppe*; hat nur innere Automorphismen.

V. *Iksaedergruppe*; hat einen äußeren Automorphismus, der zugleich außerhalb der Bewegungsgruppe liegt. Diesen Automorphismus ermittelt man durch folgende Überlegung: Während zwei Zweierdrehungen (um „Querlinien“) des Iksaeders nicht die Iksaedergruppe, sondern eine Untergruppe (Diedergruppe der Ordnung 4, 6 oder 10) erzeugen, können uns zwei Dreierdrehungen  $C_1$  und  $C_2$  zu Erzeugenden der Iksaedergruppe dienen. Aber nur dann erzeugen  $C_1$  und  $C_2$  die Iksaedergruppe, wenn ihre Achsen durch benachbarte Eckpunkte eines Dodekaeders gehen, im anderen Falle nur eine Untergruppe, die Tetraedergruppe. Die wesentlichen Relationen sind  $C_1^3 = C_2^3 = (C_1 C_2)^5 = E$ . Man erkennt an Hand der Iksaederfigur (weniger leicht durch Rechnung), daß dies alle wesentlichen Relationen sind. Sucht man einen äußeren Automorphismus, so darf man annehmen daß die Drehung  $C_1$  in sich übergeht:  $C'_1 = C_1$ . Andernfalls könnte man durch Multiplikation mit einem geeigneten inneren Automorphismus zu diesem besonderen äußeren gelangen.  $C_2$  kann alsdann nur in eine Dreierdrehung  $C'_2$  mit einer zu  $C_1$  benachbarten Achse übergehen, da sonst  $C'_1 = C_1$  und  $C'_2$  eine Tetraedergruppe und nicht die Iksaedergruppe erzeugen würden. Durch Multiplikation des Automorphismus mit einem inneren Automorphismus, nämlich durch Transformation der Gruppenelemente mit  $C_1$  oder  $C_1^2$  kann man erreichen, daß auch die Achse von  $C'_2$  mit der von  $C_2$  zusammenfällt. Danach ist der einzige mögliche äußere Automorphismus durch  $C'_1 = C_1$ ,  $C'_2 = C_2^{-1}$  gegeben. In der Tat bestimmt diese Ersetzung der Erzeugenden einen Automorphismus, da aus den wesentlichen Relationen der alten Erzeugenden  $C_1, C_2$  dieselben Relationen für die neuen Erzeugenden  $C'_1, C'_2$  folgen. Daß  $C_1'^3 = C_2'^3 = E$  ist, ist offenbar;  $(C'_1 C'_2)^5 = E$  gilt aber, weil  $C_1 C_2^{-1}$  eine Fünferdrehung des Iksaeders ist. Der Automorphismus liegt außerhalb der Gruppe aller Drehungen, ist also erst recht ein äußerer der Iksaedergruppe, da  $C_1 C_2$  und  $C'_1 C'_2$  um absolut verschiedene Winkel drehen, die innerhalb der Gruppe aller Drehungen gelegenen Automorphismen aber die Drehwinkel ihrem absoluten Betrage nach nicht ändern.

Die zweite Frage, wie viele nichtähnliche Paargruppen durch die eben ermittelten Automorphismen der Quotientengruppe  $\mathfrak{L}/I$  entstehen, beantworten wir der Reihe nach für die einzelnen vorkommenden Quotientengruppen.

<sup>14)</sup> Die inneren Automorphismen bilden bekanntlich einen Normalteiler aller Automorphismen; äußere Automorphismen, die in derselben Restklasse des Normalteilers liegen, zählen wir als nicht verschiedene äußere Automorphismen.

1. Die Quotientengruppe sei zyklisch von der Ordnung  $j \geq 3$ . Es kann sein, daß  $\mathfrak{H}$  oder  $\mathfrak{Z}$ , sagen wir  $\mathfrak{Z}$ , die Tetraedergruppe, also  $I$  die Vierergruppe und  $\mathfrak{Z}/I$  von der Ordnung 3 ist. Man hat dann zunächst zwei Paargruppen, die zu  $\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}, \tau, I$  gehören. Sie gehen auseinander hervor, wenn man auf  $\mathfrak{Z}/I$  den einzigen Automorphismus ausübt. Andererseits gibt es aber eine Drehung  $T_i$  des  $R_2$ , nämlich Vertauschung von Tetraeder mit Gegentetraeder, die, auf die Gruppe  $\mathfrak{Z}$  ausgeübt, die drei Restklassen  $\mathfrak{Z}/I$  ebenso vertauscht wie jener Automorphismus. Die eine Paargruppe geht also aus der anderen durch Transformation aller Linksdrehungen mit  $T_i$  hervor; die beiden Paargruppen sind also ähnlich. — Sind  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{Z}$  beides zyklische Gruppen (ein dritter Fall kann bei  $j \geq 3$  nicht eintreten) und  $Z_r^*$  und  $Z_i^*$  erzeugende Elemente von  $\mathfrak{H}/\tau$  bzw.  $\mathfrak{Z}/I$ , so ist durch die Paarung der Restklasse  $Z_i^*$  mit  $Z_r^*$  eine Paargruppe vollständig bestimmt. Die übrigen Paargruppen erhält man daraus, wenn man auf  $\mathfrak{Z}/I$  alle Automorphismen  $Z_i^* \rightarrow Z_i^{*p}$  ( $p$  prim zu  $j$ ,  $0 < p < j$ ) ausübt. Man erhält also durch die Paarung von  $Z_i^{*p}$  mit  $Z_r^*$  alle möglichen Paargruppen, die zu  $\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}, \tau, I$  gehören. Sie sind paarweise ähnlich; es gehen nämlich die beiden durch die 1-isomorphe Abbildung der Restklassen

$$(1) \quad Z_i^{*p} \rightleftharpoons Z_r^* \quad \text{bzw.} \quad Z_i^{*j-p} \rightleftharpoons Z_r^*$$

bestimmten Paargruppen durch Transformation mit einer  $R_2$ -Drehung  $T_i$  ineinander über.  $T_i$  kehrt die Achse von  $Z_i$  um, führt also  $Z_i$  in  $Z_i^{-1}$ , daher  $Z_i^*$  in  $Z_i^{*-1}$  und  $Z_i^{*p}$  in  $Z_i^{*-p} = Z_i^{*j-p}$  über.

Durch die Paarung

$$(2) \quad Z_i^{*p} \rightleftharpoons Z_r^* \quad \left( 0 < p < \frac{j}{2}, p \text{ prim zu } j \right)$$

werden somit schon alle nichtähnlichen Paargruppen geliefert. Unter ihnen gibt es keine ähnlichen mehr. Denn jeder innerhalb der Gruppe aller Drehungen gelegene Automorphismus von  $\mathfrak{H}$  bzw.  $\mathfrak{Z}$  läßt entweder  $Z_i^*$  bzw.  $Z_r^*$  ungeändert oder führt  $Z_i^*$  bzw.  $Z_r^*$  in  $Z_i^{*-1}$  bzw.  $Z_r^{*-1}$  über. Durch solche Automorphismen kann man aber offenbar nicht von einer der Paargruppen (2) zu einer andern gelangen.

2. Die Quotientengruppe sei eine Diedergruppe der Ordnung  $2j' = 6$ . Jeder Automorphismus von  $\mathfrak{Z}/I$  ist dann ein innerer und kann daher durch einen inneren Automorphismus von  $\mathfrak{Z}$  bewirkt werden. Die Zahl der nichtähnlichen Paargruppen ist also 1. Dies gilt insbesondere, wenn  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{Z}$  Oktaedergruppen und demnach  $\tau$  und  $I$  Vierergruppen sind. Außerdem kommt für  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{Z}$  nur noch die Diedergruppe einer durch 6 teilbaren Ordnung in Betracht.

3. Die Quotientengruppe sei eine Diedergruppe der Ordnung  $2j' > 6$ . Dann sind auch  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{Z}$  Diedergruppen,  $\mathfrak{Z}$  etwa von der Ordnung  $2n'$ . Ist  $Z_i$  ein erzeugendes Element der größten zyklischen Untergruppe von  $\mathfrak{Z}$ ,  $D_i$  eine Drehung um eine Nebenachse und sind  $Z_i^*$  bzw.  $D_i^*$  die beiden Restklassen von  $I$  in  $\mathfrak{Z}$ , in denen  $Z_i$  bzw.  $D_i$  liegen, so können  $Z_i^*$  und  $D_i^*$  als erzeugende Elemente von  $\mathfrak{Z}/I$  dienen. Ebenso seien  $Z_r^*$  und  $D_r^*$  erzeugende Elemente von  $\mathfrak{H}/\tau$ . Dann wird durch die Zuordnung

$$Z_i^* \rightleftharpoons Z_r^*, \quad D_i^* \rightleftharpoons D_r^*$$

eine 1-isomorphe Abbildung der Restklassen von  $I$  in  $\mathfrak{Z}$  auf die von  $\tau$  in  $\mathfrak{H}$  bewirkt, also eine Paargruppe  $\mathfrak{G}$  bestimmt. Alle übrigen Paargruppen erhält man, wenn man auf  $\mathfrak{Z}/I$  alle möglichen Automorphismen, nämlich

$$Z_i^* \rightarrow Z_i^{*p}, \quad D_i^* \rightarrow D_i^{*q} Z_i^{*q} \quad (0 < p < j', p \text{ prim zu } j', 0 \leq q < j')$$

ausübt. Man hat also in den Zuordnungen

$$(3) \quad Z_i^{*p} \rightleftharpoons Z_r^*, \quad D_i^* Z_i^{*q} \rightleftharpoons D_r^*$$

alle Paargruppen erhalten. — Sie zerfallen in Klassen ähnlicher, die nur durch den Wert des Exponenten  $p$  unterschieden sind. Zu einem bestimmten Wert  $p$  gehören außer den  $j'$  Gruppen (3), die für  $q = 0, 1, \dots, j' - 1$  entstehen, die weiteren  $j'$  zu ihnen ähnlichen, die durch

$$(3') \quad Z_i^{*j'-p} \rightleftharpoons Z_r^*, \quad D_i^* Z_i^{*j'} \rightleftharpoons D_r^*$$

bestimmt sind. Man kann nämlich von einer der Paargruppen, etwa von

$$Z_i^{*p} \rightleftharpoons Z_r^*, \quad D_i^* \rightleftharpoons D_r^*,$$

zu jeder anderen gelangen, indem man auf  $\mathfrak{Z}$  den innerhalb der Gruppe aller Drehungen gelegenen Automorphismus

$$(4) \quad Z_i \rightarrow Z_i^{\pm 1}, \quad D_i \rightarrow D_i Z_i^q$$

ausübt, der in  $\mathfrak{Z}/I$  den Automorphismus

$$Z_i^* \rightarrow Z_i^{\pm 1}, \quad D_i^* \rightarrow D_i^* Z_i^{*j'}$$

bewirkt. Andererseits sind die Paargruppen

$$(5) \quad Z_i^{*p} \rightleftharpoons Z_r^*, \quad D_i^* \rightleftharpoons D_r^* (0 < p < j'/2, p \text{ prim zu } j')$$

alle nichtähnlich, denn die Automorphismen (4) sind die einzigen von  $\mathfrak{Z}$ , die innerhalb der Gruppe aller Drehungen liegen, und somit die Automorphismen (4) zusammen mit den entsprechenden von  $\mathfrak{M}$  die einzigen, die von einer Paargruppe zu einer ähnlichen führen. Durch sie kann man offenbar nicht von einer Paargruppe (5) zu einer anderen gelangen.

4. Die Quotientengruppe sei die Vierergruppe. Es kann dann sein, daß wenigstens eine der beiden Gruppen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{Z}$ , sagen wir  $\mathfrak{Z}$ , selbst die Vierergruppe ist. In diesem Falle sind alle Paargruppen ähnlich, da sich dann jeder Automorphismus von  $\mathfrak{Z}/I$  durch einen Automorphismus von  $\mathfrak{Z}$  herstellen läßt, der innerhalb der Gruppe aller Drehungen liegt. — Ist weder  $\mathfrak{M}$  noch  $\mathfrak{Z}$  die Vierergruppe, so sind beide Diedergruppen, mindestens von der Ordnung 8.  $E_i^* (= I)$ ,  $V_i^*$ ,  $V_i'^*$ ,  $V_i''^*$  seien die Restklassen von  $I$  in  $\mathfrak{Z}$ ,  $E_r^* (= r)$ ,  $V_r^*$ ,  $V_r'^*$ ,  $V_r''^*$  die von  $r$  in  $\mathfrak{M}$ .  $V_i^*$  bzw.  $V_r^*$  sollen dabei die Restklassen bezeichnen, die  $I$  bzw.  $r$  zur größten zyklischen Untergruppe von  $\mathfrak{Z}$  bzw.  $\mathfrak{M}$  ergänzen; die beiden Restklassen  $V_i'^*$  und  $V_i''^*$  bzw.  $V_r'^*$  und  $V_r''^*$  enthalten dann nur Drehungen um Nebenachsen des Dieders. Da jede Permutation von  $V_i^*$ ,  $V_i'^*$  und  $V_i''^*$  ein Automorphismus ist, so hat man folgende sechs Paargruppen:

$$\begin{array}{lll} V_i^* \rightleftharpoons V_r^*, & V_i'^* \rightleftharpoons V_r'^*, & V_i''^* \rightleftharpoons V_r''^*, \\ V_i^* \rightleftharpoons V_r^*, & V_i'^* \rightleftharpoons V_r''^*, & V_i''^* \rightleftharpoons V_r'^*, \\ V_i^* \rightleftharpoons V_r'^*, & V_i'^* \rightleftharpoons V_r^*, & V_i''^* \rightleftharpoons V_r''^*, \\ V_i^* \rightleftharpoons V_r'^*, & V_i'^* \rightleftharpoons V_r''^*, & V_i''^* \rightleftharpoons V_r^*, \\ V_i^* \rightleftharpoons V_r''^*, & V_i'^* \rightleftharpoons V_r^*, & V_i''^* \rightleftharpoons V_r'^*, \\ V_i^* \rightleftharpoons V_r''^*, & V_i'^* \rightleftharpoons V_r'^*, & V_i''^* \rightleftharpoons V_r^*. \end{array}$$

Es gibt nun in  $\mathfrak{Z}/I$  und in  $\mathfrak{M}/r$  je einen einzigen von der Identität verschiedenen Automorphismus, der sich durch einen innerhalb der Gruppe aller Drehungen

gelegenen Automorphismus von  $\mathfrak{L}$  bzw.  $\mathfrak{M}$  bewirken läßt; das ist der, der  $V_i'^*$  mit  $V_i''^*$  bzw.  $V_r'^*$  mit  $V_r''^*$  vertauscht. Wendet man diesen Automorphismus auf die sechs Paargruppen an, so bleiben als nicht ähnlich nur die beiden folgenden übrig:

$$\begin{array}{lll} V_i^* \rightleftharpoons V_r^*, & V_i'^* \rightleftharpoons V_r'^*, & V_i''^* \rightleftharpoons V_r''^*, \\ V_i^* \rightleftharpoons V_r'^*, & V_i'^* \rightleftharpoons V_r^*, & V_i''^* \rightleftharpoons V_r''^*. \end{array}$$

5. Ist die Quotientengruppe die Tetraeder- oder Oktaedergruppe, so hat man eine Diagonalgruppe vor sich. Die Automorphismen von  $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$  lassen sich dann aus denen von  $\mathfrak{L}$  gewinnen, die, wie wir sahen, im Falle des Tetraeders und Oktaeders alle innerhalb der Gruppe aller Drehungen liegen; es gibt also nur eine Paargruppe.

6. Ist die Quotientengruppe die Ikosaedergruppe, so gibt es dagegen zwei nicht-ähnliche Diagonalgruppen, da die Ikosaedergruppe einen außerhalb der Gruppe aller Drehungen gelegenen Automorphismus zuläßt.

Zur Lösung der Einstufigkeitsfrage bedarf es des folgenden, die Gruppenpaarung betreffenden Hilfssatzes:

*Haben  $r$  und  $l$  ungerade Ordnungen, so hat  $\mathfrak{G}$  ebenso viele Untergruppen vom Index 2 wie die Quotientengruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{g}$ .*

Beweis. Die Elemente der Untergruppe vom Index 2 in  $\mathfrak{G}$ , die zu  $r$  gehören, bilden eine Untergruppe von  $r$ , deren Index in  $r$   $i$  sein möge. In jeder Zeile der Tafel des direkten Produktes  $\mathfrak{M} \times \mathfrak{L}$  befinden sich dann  $\frac{\mu}{i}$  Elemente der Untergruppe vom Index 2 oder gar keine. Die Ordnung der Untergruppe vom Index 2 ist also nicht größer als  $\frac{\mu}{i} \cdot n$  ( $n$  Ordnung von  $\mathfrak{L}$ ), während die Ordnung von ganz  $\mathfrak{G}$   $\mu \cdot n$  ( $= j \mu r$ ) ist. Weil  $\mu$  ungerade ist, kann also  $i$  nur  $= 1$  sein. Das bedeutet, daß  $r$  und ebenso  $l$ , also das ganze linke obere Rechteck  $\mathfrak{g} = r\mathfrak{I}$  in der Untergruppe vom Index 2 von  $\mathfrak{G}$  enthalten ist. Daher gehört mit irgendeinem Element sein ganzes Rechteck, seine Restklasse von  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{G}$  zur Untergruppe. Also entspricht jeder Untergruppe vom Index 2 von  $\mathfrak{G}$  eine ebensolche der Quotientengruppe und umgekehrt.

## § 5.

### Einstufigkeitsfrage.

Nachdem alle Paargruppen von Drehungen des ausgezeichneten  $R_3$  und damit alle endlichen Gruppen elliptisch starrer Bewegungen des uneigentlichen projektiven Raumes unseres  $R_4$  ermittelt sind, gehen wir zu den weniger einfachen Verhältnissen des sphärischen Raumes, der Hyper-sphäre, über. Es handelt sich darum, die beiden entgegengesetzten sphärischen  $R_4$ -Bewegungen, die sich in ein und dasselbe Paar von  $R_3$ -Drehungen (§ 3, S. 12), also auch in ein und dieselbe elliptische Bewegung des uneigentlichen  $P_3$  abbilden, voneinander zu trennen.

Ob eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  von  $R_4$ -Bewegungen zwei- oder einstufig isomorph zu der Paargruppe  $\mathfrak{G}$  ist, in die sie sich abbildet, hängt davon ab, ob in  $\mathfrak{G}$  die Diametralpunktvertauschung  $S$  als Element auftritt oder nicht. Ist  $S$  Element von  $\mathfrak{G}$ , so ist mit jedem Element  $G = G^+$  das entgegengesetzte  $G^- = G^+ S$  in  $\mathfrak{G}$  enthalten. Beiden entspricht aber ein und dasselbe Element in  $\mathfrak{G}$ . Fehlt dagegen  $S$  in  $\mathfrak{G}$ , so tritt niemals mit einem Element das entgegengesetzte auf, der Isomorphismus der  $R_4$ -Gruppe und der Paargruppe ist also einstufig. — Gehen wir umgekehrt von der Paargruppe  $\mathfrak{G}$  aus, so erweist sie sich in jedem Falle als Bild einer zweistufig isomorphen  $R_4$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$ . Diese Gruppe besteht aus allen den Bewegungen des  $R_4$ , die sich in Elemente von  $\mathfrak{G}$  abbilden, und enthält daher mit einer Bewegung auch die entgegengesetzte, mit  $E$  z. B. auch  $S$ . Es fragt sich aber, wann es außerdem noch eine in  $\mathfrak{G}$  einstufig abgebildete  $R_4$ -Gruppe  $\mathfrak{G}^I$  gibt.

Wenn überhaupt eine einstufig isomorphe  $R_4$ -Gruppe  $\mathfrak{G}^I$  sich in  $\mathfrak{G}$  abbildet, dann gibt es außer ihr noch so viele, als  $\mathfrak{G}$  Untergruppen vom Index 2 enthält. Denn seien einerseits  $\mathfrak{G}_1^I$  und  $\mathfrak{G}_2^I$  zwei einstufige Gruppen und  $\mathfrak{D}$  ihre größte gemeinsame Untergruppe. Sei  $\mathfrak{G}_1^I = \mathfrak{D} + \mathfrak{R}$ . Dann ist  $\mathfrak{G}_2^I = \mathfrak{D} + \mathfrak{R}S$ , weil sich die Elemente von  $\mathfrak{G}_1^I$  und  $\mathfrak{G}_2^I$  nur durch Diametralpunktvertauschung unterscheiden können. Das Produkt zweier Elemente des Komplexes  $\mathfrak{R}$  muß zu  $\mathfrak{D}$  gehören. Denn wäre  $K_1 K_2 = K_3$ , so würde wegen der Abbildbarkeit von  $\mathfrak{G}_1^I$  und  $\mathfrak{G}_2^I$  in  $\mathfrak{G}$  aus  $\mathfrak{G}_2^I = \mathfrak{D} + \mathfrak{R}S$  folgen  $(K_1 S)(K_2 S) = K_1 K_2 = K_3 S$ , also der Widerspruch  $K_3 = K_3 S$ . Damit ist gezeigt, daß  $\mathfrak{G}_1^I$  mit der Gruppe der Ordnung 2, deren Elemente die Komplexe  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{R}$  sind, isomorph ist. Also ist  $\mathfrak{G}_1^I = \mathfrak{D} + \mathfrak{R}$  die Restklassenzerlegung von  $\mathfrak{G}_1^I$  nach  $\mathfrak{D}$  und daher  $\mathfrak{D}$  invariante Untergruppe. Folglich enthält auch die einstufig isomorphe Gruppe  $\mathfrak{G}$  eine (invariante) Untergruppe  $\mathfrak{D}$  vom Index 2. — Hat andererseits  $\mathfrak{G}$  eine Untergruppe  $\mathfrak{D}$  vom Index 2 und gibt es eine einstufig in  $\mathfrak{G}$  abbildbare  $R_4$ -Gruppe  $\mathfrak{G}_1^I$ , so ist  $\mathfrak{G}_1^I = \mathfrak{D} + \mathfrak{R}$  ( $\mathfrak{D}$  das Bild von  $\mathfrak{D}$ ), und es bilden auch die Elemente  $\mathfrak{D} + \mathfrak{R}S = \mathfrak{G}_2^I$  eine Gruppe, weil  $\mathfrak{G}_1^I \cdot \mathfrak{G}_2^I = \mathfrak{D} + \mathfrak{R}S = \mathfrak{G}_2^I$  ist. Außer dieser Gruppe  $\mathfrak{G}_2^I$  gibt es aber keine einstufige  $R_4$ -Gruppe zu  $\mathfrak{G}$ , die mit  $\mathfrak{G}_1^I$  den Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  hat. Jede Untergruppe vom Index 2 von  $\mathfrak{G}$  erzeugt daher mit der einen einstufig isomorphen genau eine weitere.

Wann gibt es nun wenigstens eine einstufig isomorphe  $R_4$ -Gruppe  $\mathfrak{G}^I$ , die sich in  $\mathfrak{G}$  abbildet? Eine solche ist vorhanden, wenn  $\tau$  und  $\iota$  zyklische Gruppen ungerader Ordnung (einschließlich des Einheits-elementes) sind. Daß diese Bedingung notwendig ist, sieht man leicht. Denn jede platonische Gruppe, die keine zyklische Gruppe ungerader Ordnung ist, enthält ein Element der Ordnung 2. Das Element der Ordnung 2 von  $\tau$  wäre Bild einer Rechtsdrehung durch den Winkel  $\pi/2$  oder  $3\pi/2$ ; denn dies sind



die beiden einzigen Rechtsdrehungen, von denen das Quadrat und nicht schon die erste Potenz sich in das Einheitsselement abbildet. Das Quadrat dieser Rechtsdrehungen ist aber die Diametralpunktvertauschung  $S$ ; also würde diese in  $\mathcal{G}$  vorkommen und  $\mathcal{G}$  zweistufig machen.

Daß die Bedingung hinreicht, zeigen wir in § 6 durch Konstruktion aller endlichen  $R_4$ -Gruppen. Es bedarf hierzu eines Hilfssatzes, der die Ordnung eines Elementes der Paargruppe mit den Ordnungen der beiden entgegengesetzten  $R_4$ -Bewegungen verknüpft, die sich in das Paarelement abbilden.

**Hilfssatz.** *Hat das Element von  $\mathfrak{R}$ ,  $(G_r, E)$ , für das wir abkürzend auch  $G_r$  schreiben, gerade Ordnung  $2k$ , so bilden sich in  $G_r$  zwei entgegengesetzte Rechtsdrehungen,  $G_r^+$  und  $G_r^-$ , ab, die beide die Ordnung  $4k$  haben; im Falle ungerader Ordnung  $2k+1$  aber hat eine der beiden entgegengesetzten Rechtsdrehungen, sagen wir  $G_r^+$ , die Ordnung  $2k+1$ , die andere die Ordnung  $2(2k+1)$ .*

**Beweis.** Hätte im Falle gerader Ordnung  $G_r^+$  die Ordnung  $2k$ , so wäre  $G_r^{+k}$  eine  $R_4$ -Drehung der Ordnung 2, also die Diametralpunktvertauschung  $S$  und daher müßte sich schon  $G_r^{+k}$  in  $E$  abbilden, also  $G_r$  die Ordnung  $k$  haben, während die Ordnung von  $G_r$  doch  $2k$  ist. — Im Falle ungerader Ordnung sind mit  $G_r^+$  und  $G_r^-$  auch  $G_r^{+2k+1}$  und  $G_r^{-2k+1}$  entgegengesetzt, und da beide sich in das Einheitsselement  $E$  abbilden, ist etwa  $G_r^{+2k+1} = E$  und  $G_r^{-2k+1} = S$ .  $G_r^-$  hat daher die doppelte Ordnung von  $G_r^+$ . — Der Hilfssatz bleibt richtig, wenn das Element ungerader Ordnung das Einheitsselement  $E$  ist. Dann sind  $E$  und  $S$  die darin abgebildeten  $R_4$ -Bewegungen.

## § 6.

### Erzeugende und Relationen aller Bewegungsgruppen.

Eine  $R_4$ -Gruppe ist vollständig bestimmt durch die Paargruppe  $\mathcal{G}$ , in die sie sich abbildet, und durch die Angabe, wie sie sich abbildet, ob zweistufig oder welche der etwa vorhandenen einstufig abgebildeten sie ist. Mit dem Verfahren der Gruppenpaarung und der Lösung der Einstufigkeitsfrage hat man daher die Mittel an der Hand, alle endlichen Gruppen sphärischer Bewegungen des  $R_4$  aufzuzählen.

Um uns der einstufig abgebildeten Gruppen, für deren Existenz wir bisher nur die notwendige Bedingung besitzen (§ 5), zu versichern, geben wir die Erzeugenden und wesentlichen Relationen dieser Gruppen an<sup>15)</sup>.

<sup>15)</sup> Über Erzeugende und wesentliche Relationen von Gruppen vgl. O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen § 2, Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927) und F. Levi, Geometrische Konfigurationen, Leipzig 1929, S. 33. — Die Drehgruppen behandelt als homogene Polyedergruppen R. Fricke, Algebra II (Braunschweig 1926), S. 50.



Auch für einen weiteren Zweck bedarf es dieser Kenntnis. Wir werden nämlich sehen (§ 8), daß die Bewegungsgruppe entweder selbst die Fundamentalgruppe des Diskontinuitätsbereiches ist oder aus ihr die Fundamentalgruppe abgeleitet werden kann. Die Fundamentalgruppe muß aber durch die Erzeugenden und wesentlichen Relationen gegeben sein, um die numerischen Invarianten (§ 9) aus ihr zu gewinnen. — Wir unternehmen es daher jetzt, alle endlichen Gruppen sphärischer Bewegungen des  $R_4$ , das sind zugleich alle endlichen Gruppen reeller homogener quaternärer Substitutionen überhaupt, durch Erzeugende und wesentliche Relationen darzustellen.

Die einfachsten unter ihnen sind die Drehgruppen. Bei einer Rechtdrehgruppe ist  $\mathfrak{Z} = E$ ,  $\mathfrak{G} = \mathfrak{R} = \mathfrak{r}$  selbst eine platonische Gruppe.  $\mathfrak{R}$  sei z. B. zyklisch, etwa von  $Z_r$  erzeugt, wesentliche Relation  $Z_r^m = E$ . Die (immer vorhandene) zweistufig in die Paargruppe  $\mathfrak{G}$  abgebildete  $R_4$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$  wird von einer in  $Z_r$  abgebildeten  $R_4$ -Bewegung  $Z_r$  von der Ordnung  $2m$  erzeugt, für die  $Z_r^m = S$  gilt. Nach dem Hilfssatz § 5 gibt es, wenn  $m$  gerade ist, zwei entgegengesetzte solche Bewegungen  $Z_r^+ = Z_r$  und  $Z_r^- = Z_r S$ , wenn  $m$  ungerade ist, dagegen nur ein  $Z_r$ , während für die andere in  $Z_r$  abgebildete Bewegung  $Z_r^- = Z_r S$  gilt:  $(Z_r^-)^m = E$ ; diese erzeugt die (einzige) einstufig in die zyklische Paargruppe abgebildete  $R_4$ -Gruppe. — Unter die zyklischen Gruppen ungerader Ordnung fällt auch die, die aus dem Einheitselement  $E$  allein besteht. In sie bildet sich zweistufig die von  $E$  und der Diametralpunktvertauschung  $S$  gebildete  $R_4$ -Gruppe ab (Fundamentalgruppe des projektiven Raumes), und einstufig die aus  $E$  allein bestehende (Fundamentalgruppe des konformen Raumes). — Nach diesem Beispiel bestimmen sich die Erzeugenden und wesentlichen Relationen aller Drehgruppen, die wir zusammen verzeichnen. Der *Bezeichnungsregel* zufolge läßt sich jedes Element mit dem Index  $r$  mit jedem des Index  $l$  vertauschen, weil Rechts- und Linksdrehungen vertauschbar sind. Die Diametralpunktvertauschung  $S$ , die gleichzeitig Rechts- und Linksdrehung ist, ist mit jedem Element vertauschbar. Diese Vertauschbarkeitsrelationen werden nicht einzeln aufgeführt. — Wo nicht ausdrücklich bemerkt, handelt es sich um die zweistufig in die Paargruppen  $\mathfrak{G}$  abgebildeten  $R_4$ -Gruppen (mit  $\mathfrak{G}$  bezeichnet) und nicht um die seltenen einstufigen (mit  $\mathfrak{G}^1$  bezeichnet). Als Überschrift sind stets die beiden Gruppen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{Z}$  gewählt, die die 15 Klassen von Paargruppen des § 4 bestimmen. Die Gliederung gestaltet sich im einzelnen so: I. Drehgruppen, II. direkte Produkte (S. 27), III. Diagonalgruppen (S. 27), IV. allgemeine Rechteckgruppen (S. 33). Nur die Drehgruppen werden in dem vorliegenden Teil der Arbeit topologisch ausgewertet. Die übrigen Gruppen werden in Kleindruck gegeben und sind zum Nachschlagen vollständig aufgeführt worden.

I. Drehgruppen:  $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} = \mathfrak{G} = \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{Z} = E$ .

$\mathfrak{R}$  zyklische Gruppe der Ordnung  $m$ ,  $\mathfrak{Z} = E$ .

$\mathfrak{G} = \mathfrak{R}$ , zyklisch, Ordnung  $2m$

$$Z_r^m = S, \quad S^2 = E.$$

Wenn  $m$  ungerade ist, gibt es überdies eine einzige einstufig in  $\mathfrak{G}$  abgebildete  $R_2$ -Gruppe. Diese ist, wenn  $Z_r S = Z_r$  gesetzt wird:

$\mathfrak{G}^1$ , 1-isomorph zu  $\mathfrak{R}$ , zyklisch, Ordnung  $m$

$$(Z_r)^m = E.$$

$\mathfrak{R}$  Diedergruppe der Ordnung  $m = 2m'$ ,  $\mathfrak{Z} = E$ .

$\mathfrak{G} = \mathfrak{R}$ , Ordnung  $2m = 4m'$ , binäre Diedergruppe

$$D_r^{m'} = D_r'^2 = D_r''^2 = S, \quad D_r'' D_r' D_r = E, \quad S^2 = E.$$

Ersetzt man in diesen Relationen  $S$  durch  $E$ , so ergeben sich die Relationen der Diedergruppe der Ordnung  $m$ . Wie in diesem Beispiele, so wird allgemein durch die Zusatzrelation  $S = E$  aus der Gruppe  $\mathfrak{G}$  die Gruppe  $\mathfrak{G}$  als Quotientengruppe der von  $E$  und  $S$  gebildeten Untergruppe ausgeschieden, weshalb die Gruppen  $\mathfrak{G}$  binär genannt werden. — In der Relation  $D_r'' D_r' D_r = E$  könnte man ebensogut  $S$  an Stelle von  $E$  schreiben, wenn man zur Erzeugenden das zu  $D_r'$  entgegengesetzte Element  $D_r' S$  an Stelle von  $D_r'$  wählen würde. Da in dieser und den drei folgenden Gruppen  $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}$  nicht zyklisch von ungerader Ordnung ist, gibt es keine einstufig abgebildeten Gruppen. — Für  $m' = 2$  erscheint die Quaternionengruppe, die damit sich als binäre Vierergruppe erweist.

$\mathfrak{R}$  Tetraedergruppe,  $\mathfrak{Z} = E$ .

$\mathfrak{G} = \mathfrak{R}$ , Ordnung  $2 \cdot 12$ , binäre Tetraedergruppe

$$T_r^3 = T_r'^2 = T_r''^2 = S, \quad T_r'' T_r' T_r = E, \quad S^2 = E.$$

$\mathfrak{R}$  Oktaedergruppe,  $\mathfrak{Z} = E$ .

$\mathfrak{G} = \mathfrak{R}$ , Ordnung  $2 \cdot 24$ , binäre Oktaedergruppe

$$O_r^4 = O_r'^3 = O_r''^3 = S, \quad O_r'' O_r' O_r = E, \quad S^2 = E.$$

$\mathfrak{R}$  Ikosaedergruppe,  $\mathfrak{Z} = E$ .

$\mathfrak{G} = \mathfrak{R}$ , Ordnung  $2 \cdot 60$ , binäre Ikosaedergruppe

$$I_r^5 = I_r'^2 = I_r''^2 = S, \quad I_r'' I_r' I_r = E, \quad S^2 = E.$$

Statt Rechtsdrehgruppen hätten wir ebensogut Linksdrehgruppen anschreiben können. Der Index  $r$  wäre dann nur durch  $l$  zu ersetzen.

Die zweistufig in ihre Paargruppe  $\mathfrak{G}$  abgebildeten  $R_4$ -Gruppen  $\mathfrak{G}$  haben zwar die doppelte Ordnung der entsprechenden Paargruppen, sind aber keine Erweiterungen von diesen<sup>14)</sup>, denn sie enthalten im allgemeinen keine mit ihrer Paargruppe isomorphe Untergruppe, sondern die Paargruppe ist Quotientengruppe der von  $E$  und  $S$  gebildeten Untergruppe.

Die Erzeugenden und wesentlichen Relationen der  $R_4$ -Gruppen, die sich in die  $\mathfrak{I}5 \cdot 6 = 15$  direkten Produkte abbilden, lassen sich ohne weiteres angeben; sie würden die Drehgruppen als Sonderfall enthalten, wenn man die Gruppe  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{G}$  unter die Faktoren aufnehmen würde. Die  $R_4$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$ , die sich zweistufig in das direkte Produkt  $\mathfrak{G} = \mathfrak{M} \mathfrak{Z}$  abbildet, ist nicht etwa das direkte Produkt der beiden Drehgruppen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{Z}$ ; denn diese beiden Gruppen haben  $S$  als gemeinsames Element.

## II. Direkte Produkte: $\mathfrak{M} = \mathfrak{r}$ , $\mathfrak{Z} = \mathfrak{I}$ , $\mathfrak{G} = \mathfrak{M} \mathfrak{Z}$ .

$\mathfrak{M}$  zyklische Gruppe der Ordnung  $m$ ,  $\mathfrak{Z}$  zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ .

$\mathfrak{G}$  Ordnung  $2mn$

$$Z_r^m = S, \quad Z_l^n = S, \quad S^2 = E.$$

Wenn  $m = \mu$ ,  $n = \nu$  beide ungerade sind, tritt hierzu eine einstufig abgebildete  $R_4$ -Gruppe:

$\mathfrak{G}^{\mathfrak{I}}$  1-isomorph zu  $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{Z}$ , Ordnung  $mn$

$$(Z_r^-)^m = E, \quad (Z_l^-)^n = E.$$

Die übrigen direkten Produkte erhält man ebenso, indem man den Relationen einer Rechtsdrehgruppe die irgendeiner Linksdrehgruppe hinzufügt und die Vertauschbarkeit von rechts und links beachtet. Einstufig abgebildete treten nicht mehr auf. Die Ordnung ist daher immer das doppelte Produkt der Ordnungen von  $\mathfrak{M} = \mathfrak{r}$  und von  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{I}$ ,  $2mn$ .

Jedes Element  $G$  einer Diagonalgruppe ist das Produkt einer Rechtsdrehung  $G_r$  und einer Linksdrehung  $G_l$ , die sich in einander entsprechende Elemente  $G_r$  und  $G_l$  der beiden jetzt 1-isomorph aufeinander bezogenen Gruppen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{Z}$  abbilden. Die verschiedenen Möglichkeiten dieser 1-isomorphen Zuordnung, die zu nichtähnlichen  $R_4$ -Gruppen führen, sind in § 4 S. 20–22 aufgezählt worden. — Wir betrachten als Beispiel den Fall, daß die Paargruppe  $\mathfrak{G}$  die Ikosaedergruppe ist. Sie wird von drei Elementen erzeugt:  $J = (J_r, J_l)$ ,  $J' = (J'_r, J'_l)$ ,  $J'' = (J''_r, J''_l)$ . Wesentliche Relationen:  $J^5 = J'^5 = J''^5 = J'' J' J = E$ . Es gibt drei Rechtsdrehungen  $J_r, J'_r, J''_r$ , die sich in  $J_r, J'_r, J''_r$  abbilden und eine Rechtsdrehgruppe  $\mathfrak{M}$  mit den wesentlichen Relationen  $J_r^5 = J'^5_r = J''^5_r = S$ ,  $J''_r J'_r J_r = E$ ,  $S^2 = E$  erzeugen. Ebenso gibt es drei Linksdrehungen, die sich in  $J_l, J'_l, J''_l$  abbilden und eine Linksdrehgruppe  $\mathfrak{Z}$  mit den wesentlichen Relationen  $J_l^5 = J'^5_l = J''^5_l = S$ ,  $J''_l J'_l J_l = E$ ,  $S^2 = E$  erzeugen. Die sphärischen Bewegungen  $J = J_r J_l$ ,  $J' = J'_r J'_l$ ,  $J'' = J''_r J''_l$  erzeugen dann eine  $R_4$ -Gruppe  $\mathfrak{G}^{\mathfrak{I}}$  mit den wesentlichen Relationen

$$J^5 = J'^5 = J''^5 = E, \quad J'' J' J = E.$$

Weitere wesentliche Relationen können für die erzeugte Gruppe nicht bestehen. Denn eine weitere wesentliche Relation  $f(J, J', J'') = E$  würde zu  $f(J_r, J'_r, J''_r) \times f(J_l, J'_l, J''_l) = E$ , also zu  $f(J_r, J'_r, J''_r) = E$  oder  $= S$  und daher zu  $f(J_r, J'_r, J''_r) = E$

<sup>14)</sup> O. Schreier, Über die Erweiterung von Gruppen, Hamb. Sem. Abh. 4 (1926).

führen, im Widerspruch mit der Voraussetzung, daß die Gruppe  $\mathfrak{H}$  die Ikosaedergruppe ist.  $\mathfrak{G}^1$  ist daher die gesuchte einstufig in  $\mathfrak{G}$  sich abbildende Gruppe. Die übrigen einstufigen Diagonalgruppen werden durch die gleiche Überlegung erhalten und unterscheiden sich nur in den Exponenten. Wir zählen sie nachstehend auf. Zu ihnen hat nur das Element  $S$  mit der Relation  $S^2 = E$  zu treten, um die zweistufigen zu erhalten; die zweistufigen Diagonalgruppen sind also direkte Produkte der platonischen Gruppen mit der von  $E$  und  $S$  gebildeten Gruppe, also Erweiterungen der platonischen Gruppen.

Unter den Diagonalgruppen sind die platonischen  $R_2$ -Gruppen enthalten. Diese müssen ja unter den  $R_4$ -Gruppen auftreten, da man sie als  $R_4$ -Gruppen auffassen kann, die den zum  $R_2$  senkrechten Einheitsvektor festlassen. Man erhält diese Diagonalgruppen, indem man die beiden Polyeder der Links- und Rechtsdrehungen im ausgezeichneten  $R_4$  zur Deckung bringt (§ 8 S. 12) und gleiche Drehungen miteinander paart. Die  $R_4$ -Gruppe besteht dann gerade aus diesen Bewegungen des ausgezeichneten  $R_2$ .

### III. Diagonalgruppen: $\mathfrak{H} = \mathfrak{Z}$ , $r = 1 = E$ .

$\mathfrak{H}$  zyklische,  $\mathfrak{Z}$  zyklische Gruppe der Ordnung  $m$ .

$\mathfrak{G}^1$ :

$$Z^m = E.$$

Hierin ist  $Z$  die  $R_4$ -Bewegung der Ordnung  $m$ , die sich in ein erzeugendes Element  $(Z_r, Z_l)$  der Paargruppe  $\mathfrak{G}$  abbildet. Sind also  $Z_r$  und  $Z_l$  zwei  $R_4$ -Drehungen der Ordnung  $2m$ , die sich in  $Z_r$  und  $Z_l$  abbilden — Existenz in § 5 S. 24 nachgewiesen —, so ist  $Z = Z_r Z_l$  in der Tat von der Ordnung  $m$ . Bei geradem  $m$  kann man dieses  $Z$  durch  $ZS$  ersetzen, so daß in diesem Falle zwei einstufige Gruppen auftreten, was auch nach der allgemeinen Theorie (§ 5) daraus folgt, daß  $\mathfrak{G}$  bei geradem  $m$  eine Untergruppe vom Index 2 besitzt. — Wir weisen noch einmal darauf hin, daß die  $R_4$ -Drehungen  $Z_r$  und  $Z_l$  nur der Bedingung unterworfen sind,  $\mathfrak{H}$  bzw.  $\mathfrak{Z}$  zu erzeugen, sie brauchen also nicht Drehungen um  $2\pi/m$  zu sein, sondern werden im allgemeinen um verschiedene Winkel drehen. Wir erhalten alle nichtähnlichen Paargruppen, wenn wir annehmen, daß  $Z_r$  um  $2\pi/m$  und  $Z_l$  um  $p \cdot 2\pi/m$  dreht, wo  $p$  die in § 4 S. 20 angegebenen Werte hat. — Es gibt also zu jeder dieser Paargruppen entweder eine oder zwei einstufige  $R_4$ -Gruppen. Die zwei einstufigen  $R_4$ -Gruppen, die bei geradem  $m$  auftreten, sind nichtähnlich, ausgenommen im Falle  $m = 2$ . Der Grund hierfür ergibt sich bei der geometrischen Untersuchung dieser Gruppen (Ringflächengruppen) auf ihre Diskontinuitätsbereiche.

$\mathfrak{H}$  Dieder-,  $\mathfrak{Z}$  Diedergruppe der Ordnung  $2m'$ .

$\mathfrak{G}^1$ :

$$D^{m'} = D'^2 = D''^2 = D' D' D = E,$$

wobei  $D = D_r D_l$  und  $D_r$  und  $D_l$  Rechts- bzw. Linksdrehungen sind, die die zyklische Untergruppe der Ordnung  $2m'$  von  $\mathfrak{H}$  bzw.  $\mathfrak{Z}$  erzeugen. Wenn  $m'$  ungerade ist, hat  $\mathfrak{G}^1$  eine einzige Untergruppe vom Index 2; die zweite einstufige Gruppe, zu der sie Anlaß gibt, ist aber mit der ursprünglichen ähnlich, so daß bei ungeradem  $m'$  eine einzige einstufige Gruppe  $\mathfrak{G}^1$  vorhanden ist. Wenn dagegen  $m'$  gerade ist, so gibt es in der Diedergruppe im ganzen drei Untergruppen vom Index 2, so daß man vier einstufige Gruppen zu erwarten hätte. Diese sind aber für  $m' > 2$  paarweise ähnlich, so daß für  $m' > 2$  zwei nichtähnliche einstufige  $R_4$ -Gruppen bestehen; für  $m' = 2$  gibt es deren nur eine.

**24 Tetraeder-, 2 Tetraedergruppe.**

$$\mathfrak{G}^I: \quad T^3 = T'^3 = T''^3 = T'' T' T = E.$$

Die Tetraedergruppe hat keine Untergruppe vom Index 2, also ist die einstufige  $R_4$ -Gruppe einzig.

**25 Oktaeder-, 2 Oktaedergruppe.**

$$\mathfrak{G}^I: \quad O^4 = O'^4 = O''^4 = O'' O' O = E.$$

Da die Oktaedergruppe eine Untergruppe vom Index 2 hat, gibt es zwei einstufige  $R_4$ -Gruppen, die auch nichtähnlich sind: Die eine ist die oben erwähnte  $R_4$ -Gruppe, die  $\epsilon$  festläßt, die andere läßt dagegen keinen Vektor fest.

**26 Ikosaeder-, 2 Ikosaedergruppe.**

$$\mathfrak{G}^I: \quad J^5 = J'^5 = J''^5 = J'' J' J = E.$$

Es gibt dem Automorphismus der Ikosaedergruppe entsprechend (§ 4 S. 19, V) zwei nichtähnliche Paargruppen; in jede bildet sich eine einzige  $R_4$ -Gruppe einstufig ab, da die Ikosaedergruppe keine Untergruppe vom Index 2 hat. — Die Fundamentalgruppe des Diskontinuitätsbereiches jeder der beiden Gruppen besteht nach § 8 aus dem Einheits-element; beide Diskontinuitätsbereiche sind der Hypersphäre homöomorph.

Wir gehen zu den allgemeinen Rechteckgruppen über. Hier macht sich eine gruppentheoretische Vorbemerkung nötig. Um die zu der Rechteckgruppe  $\mathfrak{G}$  gehörige zweistufige  $R_4$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$  durch Erzeugende darzustellen, fassen wir  $\mathfrak{G}$  als Untergruppe der zu dem direkten Produkt  $\mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$  gehörigen zweistufigen Gruppe  $\mathfrak{H}$  auf und stellen zunächst die Untergruppe  $g$  von  $\mathfrak{G}$ , die sich zweistufig in das direkte Produkt  $g = r i$  abbildet, durch Erzeugende

$$c_{r1}, c_{r2}, \dots, c_{r\alpha}; \quad c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{i\beta}$$

und wesentliche Relationen dar (*I. Relationenreihe*), eine Aufgabe, die bei den direkten Produkten soeben gelöst wurde. Die  $c_{r\sigma}$  und  $c_{i\tau}$  sind gewisse Elemente aus  $r$  bzw.  $i$ . Die Restklassen von  $g$  in  $\mathfrak{G}$  bilden die Quotientengruppe  $\mathfrak{G}/g = \mathfrak{G}/g$ , die von  $\gamma$  Restklassen

$$l_1, l_2, \dots, l_\gamma$$

erzeugt werden mag. Als weitere Erzeugende von  $\mathfrak{G}$  wählen wir in jeder dieser erzeugenden Restklassen einen Repräsentanten  $C_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, \gamma$ ). Jeder wesentlichen Relation  $f(l_i) = g$  zwischen den  $l_i - g$  ist Einheits-element von  $\mathfrak{G}/g$  — entspricht dann eine Relation

$$(II) \quad f(C_i^*) = g,$$

wo  $g$  ein Element aus  $g$  ist, das sich angeben läßt, da die  $C_i^*$  bekannte Elemente aus  $\mathfrak{H}$  sind. Damit haben wir eine *II. Relationenreihe* gewonnen. Endlich fügen wir eine dritte Reihe von Relationen hinzu, die angeben, wie die Erzeugenden von  $g$  durch die  $C_i^*$  transformiert werden, also alle möglichen Relationen, deren linke Seiten heißen

$$(III) \quad C_i^* c_{r\sigma} C_i^{*-1} \quad \text{und} \quad C_i^* c_{i\tau} C_i^{*-1} \\ (i = 1, 2, \dots, \gamma; \sigma = 1, 2, \dots, \alpha; \tau = 1, 2, \dots, \beta),$$

während die rechten Seiten bekannte Elemente von  $g$  sind — wegen der Invarianz von  $g$  in  $\mathfrak{G}$  (§ 4 S. 16) — *III. Relationenreihe*. Damit haben wir alle wesentlichen Relationen. Liegt nämlich irgendein Element aus  $\mathfrak{G}$  als Produkt von Erzeugenden

$C_i^*$ ,  $c_{r\alpha}$ ,  $c_{l\tau}$  vor, so läßt es sich mit Hilfe der letzten beiden Relationenreihen in ein Produkt der Form

$$\prod_i C_i^* \prod_{\alpha, \tau} c_{r\alpha} c_{l\tau}$$

verwandeln, in dem alle  $C_i^*$  vor allen Erzeugenden von  $g$  stehen. Wenn man unter den verschiedenen Möglichkeiten, ein bestimmtes Element der Quotientengruppe aus den Erzeugenden darzustellen, eine willkürlich als Normalform des Elementes auszeichnet, so daß man, den  $j$  Elementen der Quotientengruppe entsprechend,  $j$  Normalformen zu ernennen hat, so darf man annehmen, daß  $\prod_i C_i^*$  auf eine dieser  $j$  Normalformen gebracht ist. Ebenso wird das zweite Produkt auf eine von  $2\mu\nu$  Normalformen beschränkt ( $2\mu\nu$  Ordnung von  $g$ ). Man hat daher nicht mehr als  $j \cdot 2\mu\nu$  verschiedene Elemente; das ist aber die Ordnung von  $\mathfrak{G}$ , nämlich das Doppelte der Ordnung der aus  $j$  Rechtecken von  $\mu\nu$  Elementen bestehenden Paargruppe  $\mathfrak{G}$ . Weitere wesentliche Relationen können daher zwischen den Erzeugenden nicht bestehen.

Dem Aufbau von  $\mathfrak{G}$  aus  $g$  mit Hilfe der Quotientengruppe entspricht ein Aufbau von  $\mathfrak{R}$  aus  $r$  und von  $\mathfrak{L}$  aus  $l$ . Denkt man sich die  $C_i^*$  in Rechts- und Linksdrehungen zerlegt:  $C_i^* = C_{ri}^* \cdot C_{li}^*$ , so kann man  $c_{r1}, c_{r2}, \dots, c_{r\alpha}; C_{r1}^*, C_{r2}^*, \dots, C_{r\gamma}^*$  als Erzeugende von  $\mathfrak{R}$  benutzen. Der I. Relationenreihe entspricht hier die Reihe der Relationen zwischen den  $c_{r\alpha}$  allein, während man aus jeder Relation der II. und III. Reihe von  $\mathfrak{G}$  durch Zerlegung in Rechts- und Linksdrehung eine Relation für  $\mathfrak{R}$  ableiten kann.

Wir müssen nun umgekehrt von  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{L}$  ausgehen und  $r$  und  $l$  aus Erzeugenden

$$c_{r1}, c_{r2}, \dots, c_{r\alpha}; C_{r1}^*, C_{r2}^*, \dots, C_{r\gamma}^*$$

und ebenso  $l$  und  $\mathfrak{L}$  aus Erzeugenden

$$c_{l1}, c_{l2}, \dots, c_{l\beta}; C_{l1}^*, C_{l2}^*, \dots, C_{l\gamma}^*$$

herstellen, wobei darauf zu achten ist, daß  $C_{ri}^*$  und  $C_{li}^*$  Elemente aus entsprechenden Restklassen sind — entsprechend vermöge des Isomorphismus zwischen  $\mathfrak{L}/l$  und  $\mathfrak{R}/r$ , der durch die Paarung der Restklassen von  $l$  in  $\mathfrak{L}$  mit denen von  $r$  in  $\mathfrak{R}$  festgelegt ist. Die zwischen den Erzeugenden von  $\mathfrak{R}$  bzw.  $\mathfrak{L}$  bestehenden Relationen lassen sich leicht ableiten, da  $\mathfrak{R}$  bzw.  $\mathfrak{L}$  sich in platonische Gruppen  $\mathfrak{R}$  bzw.  $\mathfrak{L}$  abbilden. Daraus ergeben sich die gewünschten Relationen zwischen den Erzeugenden

$$c_{r1}, c_{r2}, \dots, c_{r\alpha}; c_{l1}, c_{l2}, \dots, c_{l\beta}; C_1^*, C_2^*, \dots, C_\gamma^*.$$

Wir gehen daher jetzt daran, die Gruppen  $\mathfrak{R}$  (und  $\mathfrak{L}$ ), also die Drehgruppen, und zwar zunächst die zweistufig abgebildeten aus den Erzeugenden einer ihrer invarianten Untergruppen — einer solchen, die sich in eine invariante Untergruppe  $r$  von  $\mathfrak{R}$  abbildet — und aus der zugehörigen Quotientengruppe aufzubauen. Der umgekehrte Weg, nämlich aus einer Gruppe eine invariante Untergruppe dadurch auszuscheiden, daß man neue Relationen hinzunimmt, insbesondere ein oder mehrere Elemente in das Einheits-element zusammenfallen läßt, wird in der Gruppentheorie mehrfach benutzt. Die neue Gruppe ist eine Quotientengruppe, die zur alten mehrstufig isomorph ist, und die Bilder ihres Einheits-elementes machen in der alten Gruppe die invariante Untergruppe aus.

Je nach der invarianten Untergruppe  $r$ , die wir zum Aufbau von  $\mathfrak{R}$  benutzen, ergeben sich verschiedene Darstellungen. An erster Stelle wird die aufgeführt, bei der  $r = \mathfrak{R}$  selbst ist. Zu Erzeugenden und wesentlichen Relationen wählen wir dann dieselben wie bei Aufzählung der Drehgruppen; Relationen der II. und III. Reihe fallen in diesem Falle fort.

$\mathfrak{R}$  zyklische Gruppe der Ordnung  $m$ .

## 1. Darstellung:

$$Z_r^m = S, \quad S^2 = E.$$

Die Ordnung von  $\mathfrak{R}$  ist  $2m$ .

## 2. Darstellung.

Eine invariante Untergruppe  $\mathfrak{r}$  vom Index  $j$  bestimmt sich durch die beiden Relationen der I. Reihe

$$(I) \quad z_r^m = S, \quad S^2 = E,$$

worin  $m = j\mu$  und  $z_r = Z_r^j$ . Die Zerlegung nach  $\mathfrak{r}$  lautet:  $\mathfrak{R} = \mathfrak{r}(E + Z_r + Z_r^2 + \dots + Z_r^{j-1})$ . Die Restklasse  $\mathfrak{r} Z_r$  erzeugt die Quotientengruppe; aus ihr wählen wir als Repräsentanten das Element  $Z_r^* = Z_r$  aus. Dann gibt es eine einzige Relation der II. Reihe

$$(II) \quad Z_r^{*j} = z_r,$$

und die einzige Relation der III. Reihe ist

$$(III) \quad Z_r^* z_r Z_r^{*-1} = z_r.$$

Vertauschbarkeit mit  $S$  wird nicht ausdrücklich aufgeschrieben.

Nach diesem Beispiel genügt es, für die übrigen Drehgruppen die drei Reihen von Relationen anzugeben. Die Überschrift bezieht sich auf die Paargruppe  $\mathfrak{R}$ , die Darstellung aber auf die (binäre)  $R_4$ -Gruppe  $\mathfrak{R}$  von doppelter Ordnung, die sich in sie abbildet (§ 5).

 $\mathfrak{R}$  Diedergruppe der Ordnung  $m = 2m'$ .1. Darstellung:  $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}$ 

$$(I) \quad D_r^{m'} = D_r'^2 = D_r''^2 = S, \quad D_r'' D_r' D_r = E, \quad S^2 = E.$$

2. Darstellung:  $\mathfrak{r}$  zyklische Gruppe der Ordnung  $\mu$ 

$$(I) \quad z_r^{\mu} = S, \quad S^2 = E$$

$m' = j'\mu$ ;  $2j' = j$  Index von  $\mathfrak{r}$ .

$$(II) \quad Z_r^{*j'} = z_r, \quad D_r^{*2} = S, \quad D_r^* Z_r^* D_r^{*-1} = Z_r^{*-1};$$

$$(III) \quad Z_r^* z_r Z_r^{*-1} = z_r, \quad D_r^* z_r D_r^{*-1} = z_r^{-1}.$$

Die Erzeugenden der 2. Darstellung drücken sich durch die der ersten so aus:

$$z_r = D_r^{\mu'}, \quad Z_r^* = D_r, \quad D_r^* = D_r'.$$

3. Darstellung:  $\mathfrak{r}$  Diedergruppe der Ordnung  $m' = 2\mu'$ 

$$(I) \quad d_r^{m'} = d_r'^2 = d_r''^2 = S, \quad d_r'' d_r' d_r = E, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad D_r^{*2} = d_r;$$

$$(III) \quad D_r^* d_r D_r^{*-1} = d_r, \quad D_r^* d_r' D_r^{*-1} = d_r d_r'^{-1} d_r^{-1}, \quad D_r^* d_r'' D_r^{*-1} = d_r'^{-1}.$$

Verbindung zwischen dieser und der ersten Darstellung:

$$d_r = D_r^{\mu'}, \quad d_r' = D_r', \quad d_r'' = D_r^{-1} D_r'', \quad D_r^* = D_r.$$

Man bestätigt die Richtigkeit dieser Relationen dadurch, daß man die Erzeugenden der 1. Darstellung in sie einführt. Die Relationen I bis III gehen dadurch in richtige Folgerungen aus den Relationen der 1. Darstellung über.



**Tetraedergruppe.**1. Darstellung:  $\tau = \mathfrak{A}$ 

$$(I) \quad T_r^3 = T_r'^3 = T_r''^3 = S, \quad T_r'' T_r' T_r = E, \quad S^3 = E.$$

2. Darstellung:  $\tau$  Vierergruppe

$$(I) \quad v_r^3 = v_r'^3 = v_r''^3 = S, \quad v_r'' v_r' v_r = E, \quad S^3 = E;$$

$$(II) \quad T_r^{*3} = S;$$

$$(III) \quad T_r^* v_r T_r^{*-1} = v_r', \quad T_r^* v_r' T_r^{*-1} = v_r'', \quad T_r^* v_r'' T_r^{*-1} = v_r.$$

Verbindung mit der 1. Darstellung:

$$v_r = T_r'^{-1}, \quad v_r' = T_r T_r'^{-1} T_r^{-1}, \quad v_r'' = T_r'' T_r'^{-1} T_r''^{-1}, \quad T_r^* = T_r.$$

**Oktaedergruppe.**1. Darstellung:  $\tau = \mathfrak{A}$ 

$$(I) \quad O_r^4 = O_r'^4 = O_r''^4 = S, \quad O_r'' O_r' O_r = E, \quad S^3 = E.$$

2. Darstellung:  $\tau$  Tetraedergruppe

$$(I) \quad t_r^3 = t_r'^3 = t_r''^3 = S, \quad t_r'' t_r' t_r = E, \quad S^3 = E;$$

$$(II) \quad O_r^{*3} = S;$$

$$(III) \quad O_r^* t_r O_r^{*-1} = t_r', \quad O_r^* t_r' O_r^{*-1} = t_r''^{-1} t_r' t_r'', \quad O_r^* t_r'' O_r^{*-1} = t_r''^{-1} t_r t_r''.$$

Verbindung mit der ersten Darstellung

$$t_r = O_r^3 O_r'^{-1}, \quad t_r' = O_r'^3, \quad t_r'' = O_r'', \quad O_r^* = O_r'.$$

3. Darstellung:  $\tau$  Vierergruppe,  $\mathfrak{A}/\tau$  Diedergruppe der Ordnung 6

$$(I) \quad v_r^3 = v_r'^3 = v_r''^3 = S, \quad v_r'' v_r' v_r = E, \quad S^3 = E;$$

$$(II) \quad T_r^{*3} = S, \quad O_r^{*3} = S, \quad O_r^* T_r^* O_r^{*-1} = T_r^{*3};$$

$$(III) \quad \begin{cases} T_r^* v_r T_r^{*-1} = v_r', & O_r^* v_r O_r^{*-1} = v_r', \\ T_r^* v_r' T_r^{*-1} = v_r'', & O_r^* v_r' O_r^{*-1} = v_r, \\ T_r^* v_r'' T_r^{*-1} = v_r, & O_r^* v_r'' O_r^{*-1} = v_r''. \end{cases}$$

Verbindung mit der 2. Darstellung:

$$v_r = t_r'^{-1}, \quad v_r' = t_r t_r'^{-1} t_r^{-1}, \quad v_r'' = t_r'' t_r'^{-1} t_r''^{-1}, \quad T_r^* = t_r, \quad O_r^* = O_r'.$$

**Ikosaedergruppe.**1. Darstellung:  $\tau = \mathfrak{A}$ 

$$(I) \quad J_r^5 = J_r'^5 = J_r''^5 = S, \quad J_r'' J_r' J_r = E, \quad S^3 = E.$$

Andere Darstellungen gibt es nicht, weil die Ikosaedergruppe einfach ist.

Aus den so erzeugten Gruppen  $\mathfrak{A}$ , denen ebensolche  $\mathfrak{A}$  an die Seite treten (Index  $r$  durch  $l$  ersetzen!), bauen wir nun die Rechteckgruppen auf. Die zuvor für sich betrachteten Drehgruppen, direkten Produkte und Diagonalgruppen ordnen sich dem Verfahren zur Bildung der Rechteckgruppen unter, von denen sie besonders einfache Ausartungen sind. — Wir geben nur die Relationen an.

IV. Rechtecksgruppen:  $\tau$  und  $\iota$  von  $E$ ,  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{Z}$  verschieden. $\mathfrak{R}$  zyklische Gruppe der Ordnung  $m = j\mu$ ,  $\mathfrak{Z}$  zyklische Gruppe der Ordnung  $n = j\nu$ . $\tau$  und  $\iota$  zyklische Gruppen der Ordnungen  $\mu$  und  $\nu$ , gemeinsame Quotientengruppe zyklisch der Ordnung  $j$ .  $\mathfrak{G}$  Ordnung  $2j\mu\nu$ 

$$(I) \quad z_r^\mu = z_l^\nu = S, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad Z^{*j} = z_r z_l^p \left( p \text{ prim zu } j \text{ und } 0 < p < \frac{j}{2} \right);$$

$$(III) \quad Z^* z_r Z^{*-1} = z_r, \quad Z^* z_l Z^{*-1} = z_l.$$

Hierin ist nach § 4 S. 20  $Z^* = Z_r^* Z_l^{*p}$ ;  $Z_r^*, Z_l^*, z_r, z_l$  haben die bei der 2. Darstellung der zyklischen Gruppe aus Erzeugenden angegebene Bedeutung (§ 6 S. 31).

Nur wenn  $\mu$  und  $\nu$  beide ungerade sind, gibt es einstufig in die Paargruppe  $\mathfrak{G}$  abgebildete  $R_4$ -Gruppen, und zwar folgende:

1. Fall:  $j$  ist ungerade. Ist auch  $p$  ungerade und ersetzt man  $z_r$  und  $z_l$  durch ihre entgegengesetzten Bewegungen  $z_r^- = z_r S$  und  $z_l^- = z_l S$ , so gehen die Relationen (I) über in

$$(I) \quad z_r^{-\mu} = z_l^{-\nu} = E,$$

während (II) und (III) erhalten bleiben. Die Bewegungen  $z_r^-, z_l^-, Z^*$  erzeugen dann eine einstufige Gruppe  $\mathfrak{G}^1$  der Ordnung  $j\mu\nu$ . — Wenn dagegen  $p$  gerade ist, so hat man überdies  $Z^*$  durch  $Z^{*-} = Z^* S$  zu ersetzen, weil sonst  $S$  in den Relationen (II) von  $\mathfrak{G}^1$  auftreten würde. Im 1. Falle gibt es nur eine einstufige Gruppe, weil die Quotientengruppe keine Untergruppe vom Index 2 hat.

2. Fall:  $j$  ist gerade. Man hat dann für  $Z^*$  unabhängig vom Werte von  $p$  zwei Möglichkeiten:  $Z^{*+} = Z^*$  und  $Z^{*-} = Z^* S$ , so daß zwei einstufige Gruppen da sind, im Einklang mit der Existenz einer Untergruppe vom Index 2 in der Quotientengruppe. Diese beiden einstufigen Gruppen sind auch nichtähnlich, ausgenommen im Falle  $j=2$ . — Drehgruppen, direkte Produkte und Diagonalgruppen entstehen aus diesen Rechtecksgruppen durch geeignete Wahl von  $\mu$  und  $\nu$ .

 $\mathfrak{R}$  zyklische Gruppe der Ordnung  $m = 2\mu$ ,  $\mathfrak{Z}$  Diedergruppe der Ordnung  $n = 2\nu$ .

Nur wenn  $m = 2\mu$  gerade ist, gibt es eine Quotientengruppe der Ordnung 2 in beiden Gruppen, also eine aus zwei Rechtecken bestehende Rechtecksgruppe.

1.  $\tau$  zyklische Gruppe der Ordnung  $\mu$ ,  $\iota$  zyklische Gruppe der Ordnung  $\nu$ . Gemeinsame Quotientengruppe Ordnung 2.

 $\mathfrak{G}$  Ordnung  $2 \cdot 2\mu\nu$ 

$$(I) \quad z_r^\mu = z_l^\nu = S, \quad S^2 = E,$$

$$(II) \quad Z^{*2} = z_r S,$$

$$(III) \quad Z^* z_r Z^{*-1} = z_r, \quad Z^* z_l Z_l^{*-1} = z_l^{-1}.$$

Hierbei ist die 2. Darstellung der Diedergruppe (§ 6 S. 31) mit  $j'=1$  benutzt worden. — Wenn  $\mu$  und  $\nu$  beide ungerade sind, bestehen zwei einstufig abgebildete  $R_4$ -Gruppen. Wird  $z_r S = z_r^-$  und  $z_l S = z_l^-$  gesetzt, so sind ihre wesentlichen Relationen:

⊗<sup>1</sup> Ordnung  $2\mu\nu$

$$(I) \quad z_r^{-\mu} = z_i^{-\nu} = E;$$

$$(II) \quad Z^{*2} = z_r^{-1};$$

$$(III) \quad Z^* z_r Z^{*-1} = z_r^{-1}, \quad Z^* z_i Z^{*-1} = z_i^{-1}.$$

Die andere Gruppe erhält man, wenn man  $Z^*$  durch  $Z^* S$  ersetzt. Beide Bewegungsgruppen sind ähnlich.

2.  $\tau$  zyklische Gruppe der Ordnung  $\mu$ , 1 Diedergruppe der Ordnung  $\nu = 2\nu'$ .

Gemeinsame Quotientengruppe Ordnung 2.

⊗ Ordnung  $2 \cdot 4\mu\nu'$

$$(I) \quad z_r^{\mu} = S, \quad d_i^{\nu'} = d_i'^2 = d_i''^2 = S, \quad d_i'' d_i' d_i = E, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad Z^{*2} = z_r d_i;$$

$$(III) \quad Z^* z_r Z^{*-1} = z_r, \quad Z^* d_i Z^{*-1} = d_i, \quad Z^* d_i' Z^{*-1} = d_i d_i''^{-1} d_i^{-1}, \quad Z^* d_i'' Z^{*-1} = d_i'^{-1}.$$

Einstufig abgebildete fehlen, weil 1 nicht zyklisch von ungerader Ordnung ist.

⊗ zyklische Gruppe der Ordnung  $m = 3\mu$ , 2 Tetraedergruppe.

$\tau$  zyklische Gruppe der Ordnung  $\mu$ , 1 Vierergruppe.

Gemeinsame Quotientengruppe Ordnung 3.

⊗ Ordnung  $2 \cdot 3\mu \cdot 4 = 2 \cdot 12\mu$

$$(I) \quad z_r^{\mu} = S, \quad v_i^3 = v_i'^3 = v_i''^3 = S, \quad v_i'' v_i' v_i = E, \quad S^3 = E;$$

$$(II) \quad Z^{*3} = z_r S;$$

$$(III) \quad Z^* z_r Z^{*-1} = z_r, \quad Z^* v_i Z^{*-1} = v_i', \quad Z^* v_i' Z^{*-1} = v_i'', \quad Z^* v_i'' Z^{*-1} = v_i.$$

⊗ zyklische Gruppe der Ordnung  $m = 2\mu$ , 2 Oktaedergruppe.

$\tau$  zyklische Gruppe der Ordnung  $\mu$ , 1 Tetraedergruppe.

Gemeinsame Quotientengruppe Ordnung 2.

⊗ Ordnung  $2 \cdot 2\mu \cdot 12 = 2 \cdot 24\mu$

$$(I) \quad z_r^{\mu} = S, \quad t_i^2 = t_i'^2 = t_i''^2 = S, \quad t_i'' t_i' t_i = E, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad Z^{*2} = z_r S;$$

$$(III) \quad Z^* z_r Z^{*-1} = z_r, \quad Z^* t_i Z^{*-1} = t_i^2, \quad Z^* t_i' Z^{*-1} = t_i'^{-1} t_i' t_i'', \quad Z^* t_i'' Z^{*-1} = t_i''^{-1} t_i' t_i''.$$

⊗ Diedergruppe der Ordnung  $m = 2m'$ , 2 Diedergruppe der Ordnung  $n = 2n'$ .

1.  $\tau$  zyklische Gruppe der Ordnung  $\mu$ , 1 zyklische Gruppe der Ordnung  $\nu$ .

$m' = j'\mu$ ,  $n' = j'\nu$ .

Gemeinsame Quotientengruppe Diedergruppe der Ordnung  $j = 2j'$ .

⊗ Ordnung  $2 \cdot j\mu\nu$

$$(I) \quad z_r^{\mu} = S, \quad z_i^{\nu} = S, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad Z^{*p} = z_r z_i^p \quad \left( p \text{ prim zu } j' \text{ und } 0 < p < \frac{j}{2} \right), \quad D^{*2} = E, \quad D^* Z^* D^{*-1} = Z^{*-1};$$

$$(III) \quad Z^* z_r Z^{*-1} = z_r, \quad Z^* z_i Z^{*-1} = z_i, \quad D^* z_r D^{*-1} = z_r^{-1}, \quad D^* z_i D^{*-1} = z_i^{-1}.$$

Wenn  $\mu$  und  $\nu$  beide ungerade sind, so lassen sich folgende einstufige  $R_4$ -Gruppen bilden:

1. Fall.  $j'$  ist ungerade. Ist auch  $p$  ungerade und ersetzt man  $z_r$  und  $z_i$  durch  $z_r^- = z_r S$  und  $z_i^- = z_i S$ , so gehen die Relationen (I) über in

$$(I) \quad z_r^{-\mu} = E, \quad z_i^{-\nu} = E,$$

während (II) und (III) erhalten bleiben. Die Bewegungen  $z_r^-$ ,  $z_i^-$ ,  $Z^*$ ,  $D^*$  erzeugen dann eine einstufige Gruppe  $\mathcal{G}^I$  der Ordnung  $j\mu\nu$ . Wenn dagegen  $p$  gerade ist, so hat man überdies  $Z^*$  durch  $Z^{*-} = Z^* S$  zu ersetzen, weil sonst  $S$  in den Relationen (II) von  $\mathcal{G}^I$  aufträte. In jedem Falle hat man für die zweite Erzeugende der Quotientengruppe die Wahl zwischen  $D^*$  und  $D^{*-} = D^* S$ , so daß zwei einstufige  $R_4$ -Gruppen da sind, im Einklang mit der Existenz einer einzigen Untergruppe des Index 2 in der Diedergruppe der Ordnung  $2j'$  bei ungeradem  $j'$ . Diese beiden einstufigen Gruppen sind aber ähnlich.

2. Fall.  $j'$  ist gerade. Man hat dann sowohl für  $Z^*$  als für  $D^*$ , unabhängig vom Werte von  $p$ , eine zweite Möglichkeit:  $Z^{*-} = Z^* S$  und  $D^{*-} = D^* S$ , so daß vier einstufige Gruppen da sind, im Einklang mit der Existenz von drei Untergruppen vom Index 2 (eine zyklische und zwei Diedergruppen). Die vier Gruppen sind paarweise ähnlich, ausgenommen im Falle  $j' = 2$ , wo alle vier ähnlich sind.

2. 1 zyklische Gruppe der Ordnung  $\mu$ , 1 Diedergruppe der Ordnung  $\nu = 2\nu'$ .

Gemeinsame Quotientengruppe Ordnung 2.

$\mathcal{G}$  Ordnung  $2 \cdot 4\mu\nu'$

$$(I) \quad z_r^{\mu} = S, \quad d_i^{\nu'} = d_i'^2 = d_i''^2 = S, \quad d_i'' d_i' d_i = E, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad D^{*2} = d_i S;$$

$$(III) \quad D^* z_r D^{*-1} = z_r^{-1}, \quad D^* d_i D^{*-1} = d_i, \quad D^* d_i' D^{*-1} = d_i''^{-1} d_i^{-1}, \quad D^* d_i'' D^{*-1} = d_i'^{-1}.$$

3. 1 und 1 Diedergruppen der Ordnungen  $2\mu'$  und  $2\nu'$ .

Gemeinsame Quotientengruppe Ordnung 2.

$\mathcal{G}$  Ordnung  $2 \cdot 8\mu'\nu'$

$$(I) \quad d_r^{\mu'} = d_r'^2 = d_r''^2 = S, \quad d_r'' d_r' d_r = E, \quad d_i^{\nu'} = d_i'^2 = d_i''^2 = S, \quad d_i'' d_i' d_i = E, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad D^{*2} = E;$$

$$(III) \quad \begin{cases} D^* d_r D^{*-1} = d_r, & D^* d_r' D^{*-1} = d_r d_r''^{-1} d_r^{-1}, & D^* d_r'' D^{*-1} = d_r'^{-1}, \\ D^* d_i D^{*-1} = d_i, & D^* d_i' D^{*-1} = d_i d_i''^{-1} d_i^{-1}, & D^* d_i'' D^{*-1} = d_i'^{-1}. \end{cases}$$

$\mathcal{G}$  Diedergruppe der Ordnung  $m = 2m'$ , 2 Oktaedergruppe.

1. 1 zyklische Gruppe der Ordnung  $\mu = m'$ , 1 Tetraedergruppe.

Gemeinsame Quotientengruppe Ordnung 2.

$\mathcal{G}$  Ordnung  $2 \cdot 2 \cdot \mu \cdot 12 = 2 \cdot 24\mu$

$$(I) \quad z_r^{\mu} = S, \quad t_i^3 = t_i'^2 = t_i''^2 = S, \quad t_i'' t_i' t_i = E, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad Z^{*2} = E;$$

$$(III) \quad Z^* z_r Z^{*-1} = z_r^{-1}, \quad Z^* t_i Z^{*-1} = t_i^2, \quad Z^* t_i' Z^{*-1} = t_i''^{-1} t_i' t_i'', \quad Z^* t_i'' Z^{*-1} = t_i''^{-1} t_i t_i''.$$

2.  $\tau$  Diedergruppe der Ordnung  $\mu = 2\mu'$ , 1 Tetraedergruppe.

Gemeinsame Quotientengruppe Ordnung 2.

③ Ordnung  $2 \cdot 48 \mu'$

$$(I) \quad d_r^{\mu} = d_r'^2 = d_r''^2 = S, \quad d_r'' d_r' d_r = E, \quad t_i^3 = t_i'^2 = t_i''^2 = S, \quad t_i'' t_i' t_i = E, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad Z^{*2} = d_r S;$$

$$(III) \quad \begin{cases} Z^* d_r Z^{*-1} = d_r, & Z^* d_r' Z^{*-1} = d_r d_r''^{-1} d_r^{-1}, & Z^* d_r'' Z^{*-1} = d_r'^{-1}, \\ Z^* t_i Z^{*-1} = t_i^2, & Z^* t_i' Z^{*-1} = t_i''^{-1} t_i' t_i'', & Z^* t_i'' Z^{*-1} = t_i'^{-1} t_i t_i''. \end{cases}$$

3.  $\tau$  zyklische Gruppe der Ordnung  $\mu = \frac{1}{3} m'$ , 1 Vierergruppe.

Gemeinsame Quotientengruppe Diedergruppe der Ordnung 6.

③ Ordnung  $2 \cdot 24 \mu$

$$(I) \quad z_r^{\mu} = S, \quad v_i^3 = v_i'^3 = v_i''^3 = S, \quad v_i'' v_i' v_i = E, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad Z^{*3} = z_r S, \quad D^{*3} = E, \quad Z^* D^* Z^* D^{*-1} = S;$$

$$(III) \quad \begin{cases} Z^* z_r Z^{*-1} = z_r, & D^* z_r D^{*-1} = z_r^{-1}, \\ Z^* v_i Z^{*-1} = v_i', & Z^* v_i' Z^{*-1} = v_i'', & Z^* v_i'' Z^{*-1} = v_i, \\ D^* v_i D^{*-1} = v_i', & D^* v_i' D^{*-1} = v_i, & D^* v_i'' D^{*-1} = v_i''. \end{cases}$$

③ Tetraedergruppe, 2 Tetraedergruppe.

$\tau$  und 1 Vierergruppe.

Gemeinsame Quotientengruppe Ordnung 3.

③ Ordnung  $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 48$

$$(I) \quad v_r^3 = v_r'^3 = v_r''^3 = S, \quad v_r'' v_r' v_r = E, \quad v_i^3 = v_i'^3 = v_i''^3 = S, \quad v_i'' v_i' v_i = E, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad T^{*3} = E;$$

$$(III) \quad \begin{cases} T^* v_r T^{*-1} = v_r', & T^* v_r' T^{*-1} = v_r'', & T^* v_r'' T^{*-1} = v_r, \\ T^* v_i T^{*-1} = v_i', & T^* v_i' T^{*-1} = v_i'', & T^* v_i'' T^{*-1} = v_i. \end{cases}$$

③ Oktaedergruppe, 2 Oktaedergruppe.

1.  $\tau$  und 1 Tetraedergruppe.

Gemeinsame Quotientengruppe Ordnung 2.

③ Ordnung  $2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 12 = 2 \cdot 288$

$$(I) \quad t_r^3 = t_r'^3 = t_r''^3 = S, \quad t_r'' t_r' t_r = E, \quad t_i^3 = t_i'^3 = t_i''^3 = S, \quad t_i'' t_i' t_i = E, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad O^{*3} = E;$$

$$(III) \quad \begin{cases} O^* t_r O^{*-1} = t_r^3, & O^* t_r' O^{*-1} = t_r''^{-1} t_r' t_r'', & O^* t_r'' O^{*-1} = t_r'^{-1} t_r t_r'', \\ O^* t_i O^{*-1} = t_i^3, & O^* t_i' O^{*-1} = t_i''^{-1} t_i' t_i'', & O^* t_i'' O^{*-1} = t_i'^{-1} t_i t_i''. \end{cases}$$

2.  $\tau$  und 1 Vierergruppe.

Gemeinsame Quotientengruppe Diedergruppe der Ordnung 6.

③ Ordnung  $2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 96$ 

$$(I) \quad v_r^2 = v_r'^2 = v_r''^2 = S, \quad v_r'' v_r' v_r = E, \quad v_i^2 = v_i'^2 = v_i''^2 = S, \quad v_i'' v_i' v_i = E, \quad S^2 = E;$$

$$(II) \quad T^{*2} = E, \quad O^{*2} = E, \quad O^* T^* O^{*-1} = T^{*-1};$$

$$(III) \quad \begin{cases} T^* v_r T^{*-1} = v_r', & T^* v_r' T^{*-1} = v_r'', & T^* v_r'' T^{*-1} = v_r, \\ T^* v_i T^{*-1} = v_i', & T^* v_i' T^{*-1} = v_i'', & T^* v_i'' T^{*-1} = v_i, \\ O^* v_r O^{*-1} = v_r', & O^* v_r' O^{*-1} = v_r'', & O^* v_r'' O^{*-1} = v_r, \\ O^* v_i O^{*-1} = v_i', & O^* v_i' O^{*-1} = v_i'', & O^* v_i'' O^{*-1} = v_i. \end{cases}$$

Hiermit sind die sämtlichen nichtähnlichen endlichen Gruppen sphärischer Bewegungen des  $R_4$  und zugleich die sämtlichen nichtähnlichen endlichen Gruppen homogener quaternärer linearer Substitutionen aufgezählt.

## § 7.

Konformer Modellraum  $K_3$ .

Um die Diskontinuitätsbereiche der Bewegungsgruppen topologisch zu untersuchen, ist es ein nützliches Zugeständnis an die Anschauung, die reellen Punkte der Hypersphäre durch stereographische Projektion vom Nordpol der Hypersphäre, dem Punkte  $(0, 0, 0, 1)$  des  $R_4$ , aus in die Hyperebene  $x_4 = 0$  zu übertragen (§ 1). Diese Hyperebene ist die Äquatorhyperebene der Hypersphäre; sie trägt vom euklidischen  $R_4$  her eine natürliche euklidische Metrik; wir nennen sie den *euklidischen Bildraum*<sup>17)</sup>. Die Abbildung wird umkehrbar eindeutig, wenn wir den euklidischen Bildraum durch einen einzigen uneigentlichen Punkt schließen, d. h. von ihm zum reellen konformen Raum  $K_3$  übergehen. Die kartesischen Koordinaten  $x = x_1, y = x_2, z = x_3$  stellen zwar alle Punkte des euklidischen Bildraumes dar, aber nur eine endliche Umgebung des Nullpunktes des  $K_3$ , nämlich jede, die den „uneigentlichen“ Punkt des  $K_3$  nicht enthält. Außer der natürlichen Metrik trägt der Bildraum sowie der  $K_3$  die sphärische Metrik, die ihm von der Hypersphäre her durch die stereographische Projektion künstlich aufgeprägt ist. Sie allein würde zur Kennzeichnung der Diskontinuitätsbereiche ausreichen. Nur zur bequemen Verständigung reden wir außer von sphärischen Geraden und Ebenen (stereographischen Bildern von Hauptkreisen und Hauptkugeln der Hypersphäre) und von der sphärischen Punktentfernung auch von euklidischen Geraden, vom uneigentlichen Punkt, dem Einheitskreise usw.

<sup>17)</sup> Dieser euklidische Bildraum ist nicht zu verwechseln mit dem in § 3 S. 11 eingeführten Bild- $R_3$ , in dem die Drehungen der Paargruppen vor sich gehen.

Die starren Bewegungen der Hypersphäre um den Nullpunkt bilden sich in eine Gruppe konformer Bewegungen des  $K_3$  ab. Im euklidischen Bildraum läßt sich diese Gruppe als eine Gruppe reeller Kugelverwandtschaften kennzeichnen, die die nullteilige Einheitskugel<sup>18)</sup> in sich bewegen, daher Orthogonalkugeln der nullteiligen Einheitskugel und daher Diametralkugeln der einteiligen Einheitskugel unter sich vertauschen.

Es liege im  $R_4$  eine sphärische Bewegung vor, die die Ebene  $E_{12}$ <sup>19)</sup> und damit die dazu total senkrechte Ebene  $E_{34}$  in sich dreht. Der Hauptkreis, den  $E_{34}$  aus der Hypersphäre ausschneidet, geht durch das Projektionszentrum  $(0, 0, 0, 1)$  und bildet sich daher in eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt des euklidischen Bildraumes ab, und zwar in die  $z$ -Achse, da der Kreis auch noch den Punkt  $(0, 0, 1, 0)$  enthält, der sein eigener Bildpunkt ist. Die Ebene  $E_{12}$  schneidet die Hypersphäre in einem Kreise, der ganz im Projektionsraum  $x_4 = 0$  liegt und daher mit seinem Bilde übereinstimmt. Das Bild ist daher der Kreis  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$  des euklidischen Bildraumes. Wird nun die Ebene  $E_{12}$  durch den Winkel  $\varphi$ , die Ebene  $E_{34}$  durch den Winkel  $\psi$  gedreht — die Ebenen sind vorher wie in § 1 S. 6 durch orientierte zu ersetzen, damit die Angabe der Drehwinkel einen Sinn hat —, so können wir die Bewegung auffassen als das Ergebnis einer stetigen Bewegung mit denselben in sich gedrehten Ebenen und den Drehwinkeln  $t\varphi$  und  $t\psi$ , wo  $t$  stetig von 0 bis 1 wächst. Jeder Punkt des euklidischen Bildraumes oder vielmehr des  $K_3$  beschreibt dabei eine bestimmte *Bahnkurve*. Ist insbesondere  $\varphi = 0$ , so bleibt der Einheitskreis  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$  punktweise fest, während das durch diesen Kreis gehende elliptische Kugelbüschel durch den Winkel  $\psi$  um ihn herumgewirbelt wird. Die Bahnkurven sind die orthogonalen Trajektorien dieses Kugelbüschels, also Orthogonalkreise der Einheitskugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Ist dagegen  $\psi = 0$ , so ist die Bewegung eine starre Drehung um die  $z$ -Achse durch den Winkel  $\varphi$ . Die Bahnkurven sind also in diesen beiden Sonderfällen Kreise. Sie lassen sich auf  $\infty^1$  Ringflächen verteilen, die das durch den Einheitskreis gehende Kugelbüschel orthogonal durchsetzen und die  $z$ -Achse zur Rotationsachse haben; im Falle  $\varphi = 0$  sind sie die Meridiankreise dieser Ringflächen, im Falle  $\psi = 0$  die Breitenkreise. Auch im allgemeinen Falle, daß  $\varphi$  und  $\psi$  beide von 0 verschieden sind, liegen die Bahnkurven auf diesen Ringflächen, da die allgemeine sphärische Bewegung ein Produkt ist aus einer, bei der  $\psi = 0$ , und einer, bei der  $\varphi = 0$  ist<sup>20)</sup>,

<sup>18)</sup> Die nullteilige Einheitskugel gehört dem euklidischen  $R_3$  an; sie hat nicht etwa Punkte mit dem  $K_3$  gemein.

<sup>19)</sup> Die Ebene, die von der 1- und 2-Achse des  $x_1 x_2 x_3 x_4$ -Systems aufgespannt wird, wird  $E_{12}$  genannt.

<sup>20)</sup> Vgl. die Winkelform der orthogonalen Matrix § 1 S. 6.



beide Sonderbewegungen aber jede Ringfläche einzeln in sich überführen. Die Bahnkurven brauchen dagegen jetzt nicht mehr geschlossen zu sein.

Besonders interessiert uns der Fall, daß  $\varphi = \pm \psi$ , d. h. die Rechts- und Linksdrehung (§ 1 S. 7). Im  $R_4$  bewegt sich jede durch den Nullpunkt gehende Gerade in einer Ebene. Die Bahnkurve eines jeden Punktes ist also ein Kreis, was wegen der Kugeltreue der stereographischen Projektion auch für den euklidischen Bildraum gelten muß. Diese Kreise — *Drehkreise* genannt — verteilen sich auf die eben eingeführten Ringflächen, wo sie jeden Breitenkreis und jeden Meridiankreis einmal schneiden; sie machen die beiden bekannten Scharen schräger Kreise aus, die die Ringfläche überspinnen und mit den Meridian- und Breitenkreisen die einzigen auf den Ringflächen gelegenen Kreise sind. Alle Kreise einer solchen Schar gehen aus einem durch Rotation um die  $z$ -Achse hervor, und beide Scharen gehen durch eine Spiegelung an einem Meridiankreis ineinander über. In diesen Bahnkurven haben wir die stereographischen Bilder der Schnittkreise einer Drehebene Kongruenz mit der Hypersphäre — *Drehkreiskongruenz*. Die Kreise einer Rechtsdrehkreiskongruenz werden von einer Rechtsdrehung sphärisch starr durch den Drehwinkel gedreht, und gleiches gilt von einer Linksdrehkreiskongruenz und einer Linksdrehung.

Die Aufteilung der Drehkreise auf Ringflächen des konformen Modells der Hypersphäre bildet sich im projektiven Modell in die Aufteilung der Kongruenzgeraden auf Hyperboloide ab (§ 1 S. 7). Die beiden Scharen von Erzeugenden des Hyperboloids sind die projektiven (durch Zentralprojektion der Hypersphäre in den uneigentlichen  $P_3$  erhaltenen) Bilder der Bahnkurven einer Rechts- oder Linksdrehung, wie die Drehkreise auf den Ringflächen ihre stereographischen Bilder sind. — Zwei der  $\infty^1$  Ringflächen sind in Kreise des konformen Raumes  $K_3$  ausgeartet: in die  $z$ -Achse und den dazu senkrechten Einheitskreis. Diese beiden Kreise haben in der Drehkreiskongruenz des  $K_3$  nichts vor anderen Drehkreisen voraus, ihre ausgezeichnete Rolle hängt an der gewählten Aufteilung der Drehkreise auf Ringflächen. Durch eine sphärisch-starre Bewegung, die die Drehkreiskongruenz als Ganzes in sich bewegt, läßt sich die  $z$ -Achse in jeden andern Kreis der Kongruenz überführen; die Ringflächen ändern dabei ihre euklidische, nicht ihre konforme Gestalt.

Alle Bahnkurven von Drehungen (nicht von der allgemeinen starren Bewegung der Hypersphäre) sind sphärische Geraden (Hauptkreise der Hypersphäre) und bilden sich also in Diametalkreise der Einheitskugel ab. Unter diesen sphärischen Bahngeraden im  $K_3$  befindet sich eine euklidische Gerade, die Bahnkurve des Nullpunktes; wir nennen sie die *Schraubachse der Rechts- oder Linksdrehung*. Eine Rechtsdrehung ist vollständig durch ihre Schraubachse und die sphärisch gemessene Strecke  $\varphi$  charakterisiert,

um die alle Achsenpunkte verschoben werden (Länge der sphärischen Geraden  $2\pi$ ). Um die gleiche Strecke wird gleichzeitig der zur Schraubachse senkrechte Einheitskreis in sich gedreht; von der Rechtsdrehung im einen, von der Linksdrehung im andern Sinne<sup>21)</sup>. Die Rechtsdrehung des  $R_4$  bildet sich somit in eine Schraubenbewegung (Rechtsschraubung) des konformen Modellraumes ab, die Linksdrehung in eine Linksschraubung, beide von der sphärischen Ganghöhe 1. Alle Punkte der Hypersphäre werden auf ihren Bahnkreisen um sphärisch gleiche Strecken verschoben. Eine Rechts- oder Linksdrehung ist daher fixpunktlos.

### § 8.

#### Bewegungsgruppe und Fundamentalgruppe.

Die Bewegungsgruppen der Hypersphäre oder, was dasselbe besagt, des konformen Raumes  $K_3$ , haben deshalb unser Interesse, weil durch jede solche endliche Gruppe eine *geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit*  $M$  oder, wie wir auch sagen wollen, ein *geschlossener dreidimensionaler Raum*  $M$  bestimmt ist<sup>22)</sup>. Die Punkte der Hypersphäre zerfallen hinsichtlich unserer Gruppe in Klassen äquivalenter. Jede Klasse stellt einen „Punkt“ von  $M$  dar. Es bilden sich also, wenn  $g$  die Ordnung der Gruppe ist, im allgemeinen  $g$  Hypersphärenpunkte in einen Punkt von  $M$  (Bildpunkt) ab.

$M$  wird dadurch zur geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, daß sich die Punktumgebungen von der Hypersphäre nach  $M$  übertragen. In der Hypersphäre ernennen wir zu Punktumgebungen eines Punktes  $A$  das Innere von Kugeln  $U_A$ , die  $A$  zum sphärischen Mittelpunkt haben, und falls  $A$  kein Fixpunkt ist, so klein sind, daß sie keine äquivalenten Punkte enthalten. Da die Gruppe nur endlich viele Transformationen enthält, so ist das stets möglich. Ist dagegen der Punkt  $A$  ein Fixpunkt, so soll die Kugel  $U_A$  so klein sein, daß je zwei in ihr liegende äquivalente Punkte durch eine Bewegung der Gruppe um den Fixpunkt  $A$  aus einander hervorgehen. Zu Umgebungen in  $M$  ernennen wir die Bilder dieser Umgebungen in der Hypersphäre. Das darf geschehen, weil sie, wie man leicht nachweist, die Umgebungsaxiome erfüllen. Überdies lassen sie sich wieder

<sup>21)</sup> Genauer wird zufolge der Wahl des Koordinatensystems (§ 1 S. 6) von einer Rechtsdrehung des Drehwinkels  $\varphi$  der Einheitskreis (der Ebene  $E_{12}$  entsprechend) im positiven Sinne (positive  $x$ -Achse auf kürzestem Wege in positive  $y$ -Achse) bewegt, die  $z$ -Achse (der Ebene  $E_{34}$  entsprechend) ebenfalls im positiven Sinne (wachsende  $z$ ), von einer Linksdrehung dagegen der Einheitskreis ebenso im positiven Sinne durch  $+\varphi$ , die  $z$ -Achse aber im positiven Sinne durch  $-\varphi$ .

<sup>22)</sup> Über den hier benutzten kontinuumstopologischen Begriff der Mannigfaltigkeit unterrichtet kurz ein Vortrag von H. Kneser, Topologie der Mannigfaltigkeiten, Jahresber. d. D. Math. Ver. **34** (1926), S. 1.

auf das Innere von Kugeln abbilden. Dies folgt, wenn  $A$  kein Fixpunkt ist, aus der umkehrbaren Eindeutigkeit der Abbildung. Ist dagegen  $A$  Fixpunkt, so werde die Umgebung  $U_A$  stereographisch vom Gegenpunkt von  $A$  aus in die (euklidische) Tangentialhyperebene der Hypersphäre in  $A$  projiziert. Dabei geht die Umgebung  $U_A$  in das Innere einer euklidischen Kugel  $V_A$  dieser Hyperebene über, und die Untergruppe der Gruppenbewegungen um  $A$  bildet sich in eine Gruppe starrer Drehungen dieser euklidischen Kugel  $V_A$  um ihren Mittelpunkt  $A$  ab, also in eine platonische Gruppe. Die inneren Punkte von  $V_A$ , die den Diskontinuitätsbereich dieser Gruppe ausmachen, lassen sich wieder auf die inneren Punkte einer Kugel abbilden. Man kann nämlich diesen Diskontinuitätsbereich als einen Vollkugelsektor annehmen, der aus jeder in  $V_A$  gelegenen Kugelfläche mit dem Mittelpunkt  $A$  den zweidimensionalen Diskontinuitätsbereich jener platonischen Gruppe ausschneidet. Der zweidimensionale Diskontinuitätsbereich ist ein sphärisches Polygon, das sich durch Identifizierung äquivalenter Kanten zur Kugelfläche schließt, z. B. im Falle der zyklischen Gruppe ein sphärisches Zweieck, im Falle der übrigen platonischen Gruppen ein Viereck, das aus einem weißen und einem schwarzen der aus der Theorie der automorphen Funktionen bekannten Dreiecke besteht. Daraus geht hervor, daß der erwähnte Vollkugelsektor nach Identifizierung äquivalenter Seitenflächen mit dem Kugellinnern übereinstimmt. Da nun nach Voraussetzung zwei äquivalente Punkte in  $U_A$  immer durch eine Gruppenbewegung mit  $A$  als Fixpunkt ineinander überführbar sind, so erhält man in der Tat durch Identifizieren äquivalenter Punkte das Innere einer Kugel.

Dieser Schluß gründet sich darauf, daß die Diskontinuitätsbereiche der endlichen Bewegungsgruppen der zweidimensionalen Kugel wieder Kugeln sind. Da wir in dieser Arbeit zeigen, daß die Diskontinuitätsbereiche der endlichen Bewegungsgruppen der Hypersphäre (dreidimensionalen Kugel) im allgemeinen keine Hypersphären sind, so läßt sich der Schluß nicht auf höhere Dimensionen übertragen. In der Tat sind die Diskontinuitätsbereiche der endlichen Bewegungsgruppen der vierdimensionalen Kugel des fünfdimensionalen Raumes, falls die Gruppen fixpunkthaltig sind, im allgemeinen keine Mannigfaltigkeiten, d. h. die Umgebungen der Punkte lassen sich nicht ausnahmslos auf das Innere einer dreidimensionalen Hypersphäre abbilden.

Einen Punkt von  $M$  kann man, wenn man will, sich durch einen Repräsentanten seiner Klasse, den ganzen abstrakten Raum  $M$  durch einen aus Punkten des konformen Raumes  $K_3$  bestehenden *Diskontinuitätsbereich* der konformen Bewegungsgruppe veranschaulichen.  $M$  wird so durch eine offene Punktmenge des  $K_3$  dargestellt, etwa durch die innern und gewisse Randpunkte eines von Kugelflächen begrenzten Polyeders, das durch Seitenzuordnung zu  $M$  geschlossen wird.

Unser nächstes Ziel ist es, den Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  des Diskontinuitätsbereiches  $M$  und der Bewegungsgruppe  $\mathfrak{G}$  des  $K_3$  herzustellen. Zu diesem Zweck schalten wir zwischen  $M$  und dem  $K_3$  eine Mannigfaltigkeit  $K'$  ein. Die Punkte von  $K'$  sind die Klassen der Punkte des  $K_3$ , die äquivalent hinsichtlich der *kleinsten, alle fixpunkthaltigen Bewegungen umfassenden Untergruppe*  $\mathfrak{N}$  der Bewegungsgruppe  $\mathfrak{G}$  sind. Weil  $\mathfrak{N}$  eine Bewegungsgruppe der Hypersphäre ist, so folgt aus dem eben geführten Beweise, wenn man darin  $\mathfrak{G}$  durch  $\mathfrak{N}$  und  $M$  durch  $K'$  ersetzt, daß auch  $K'$  eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist, falls man zu Umgebungen in  $K'$  die Bilder der Umgebungen im  $K_3$  ernennt. Jede Bewegung  $G$  der Gruppe  $\mathfrak{G}$  im  $K_3$  bildet sich in eine Bewegung  $F$  von  $K'$  ab. Alle Bewegungen von  $\mathfrak{G}$ , die in dieselbe Restklasse von  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{G}$  fallen, und nur diese liefern dieselbe Bewegung in  $K'$ . Die *fixpunktlose Bewegungsgruppe*  $\mathfrak{F}$ , die von  $\mathfrak{G}$  in  $K'$  hervorgerufen wird, ist daher 1-isomorph zur Quotientengruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ . Wenn man hinsichtlich  $\mathfrak{F}$  äquivalente Punkte von  $K'$  identifiziert und die Umgebungen beibehält, so erhält man aus  $K'$  die Mannigfaltigkeit  $M$ .  $K'$  ist die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit von  $M$ , da, wie wir sehen werden,  $K'$  unverzweigt und einfach zusammenhängend über  $M$  liegt. Wenn  $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$ , so ist  $\mathfrak{F} = E$ , und  $K'$  fällt mit  $M$  zusammen (Beispiel: Diagonalgruppen); wenn dagegen  $\mathfrak{G}$  selbst fixpunktlos ist, also  $\mathfrak{N} = E$ , so ist  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ , und  $K'$  fällt mit der Hypersphäre zusammen (Beispiel: Drehgruppen). Die Abbildung der Umgebung eines Punktes von  $K'$  auf die des Bildpunktes in  $M$  ist umkehrbar eindeutig. Das liegt daran, daß  $\mathfrak{F}$  fixpunktlos ist, also eine der zuvor eingeführten Umgebungen in  $K'$  keine äquivalenten Punkte hinsichtlich  $\mathfrak{F}$  enthält. Daher liegt  $K'$  *unverzweigt* über  $M$ .

Seien nun in  $K'$  zwei stetige Kurven  $P'l_1Q'$  und  $P'l_2Q'$  mit gemeinsamen Randpunkten  $P'$  und  $Q'$  gegeben. Wir wollen zeigen, daß die beiden Kurven in  $K'$  sich unter Festhaltung der Randpunkte ineinander stetig deformieren lassen. Um das zutun, fassen wir sie als Bilder zweier stetiger Kurven  $Pl_1Q_1$  und  $Pl_2Q_2$  im  $K_3$  auf, die von einem Punkte  $P$  (in  $P'$  abgebildet) nach zwei hinsichtlich  $\mathfrak{N}$  äquivalenten Punkten  $Q_1$  und  $Q_2$  (beide in  $Q'$  abgebildet) führen<sup>23</sup>).  $Q_2$  läßt sich in  $Q_1$  durch die Reihe fixpunkthaltiger Bewegungen  $G_1, G_2, \dots, G_q$  überführen. Die Kurve  $Pl_2Q_2\lambda C_1\lambda^{-1}Q_2$ , die man erhält, wenn man erst von  $P$  längs  $l_2$  nach  $Q_2$ , dann von  $Q_2$  auf einer beliebigen Kurve  $\lambda$  nach einem Fixpunkt  $O_1$

<sup>23</sup>) Sollte  $P'l_1Q'$  oder  $P'l_2Q'$  unendlich viele Punkte mit Bildern von Fixkreisen gemein haben, so kann man die beiden Kurven unter Festhaltung von  $P'$  und  $Q'$  in zwei andere deformieren, bei denen das nicht mehr der Fall ist. Vgl. hierzu J. W. Alexander, A proof of the invariance of certain constants in Analysis Situs. Trans. Am. Math. Soc. 16 (1915), S. 148.

von  $G_1$  und von da auf demselben Wege nach  $Q_3$  zurückläuft, bildet sich in eine Kurve von  $K'$  ab, die stetig in die Kurve  $P'l'_3Q'$  deformierbar ist; sie unterscheidet sich von dieser nur durch einen hin und zurück durchlaufenen angesetzten Zipfel  $Q'\lambda'O'_1$ . Übt man nun auf das letzte Stück  $O_1\lambda^{-1}Q_3$  der Kurve  $Pl_2Q_3\lambda O_1\lambda^{-1}Q_3$  die Bewegung  $G_1$  aus, so erhält man eine Kurve  $Pl_2Q_3\lambda O_1\lambda^{-1}\bar{Q}_3$ , die sich in dieselbe Kurve von  $K'$  abbildet wie  $Pl_2Q_3\lambda O_1\lambda^{-1}Q_3$  und deren Bild somit ebenfalls in  $P'l'_3Q'$  stetig deformierbar ist. Im  $K_3$  haben wir damit die Kurve  $Pl_2Q_3$  in eine übergeführt, die von  $P$  nach dem Bildpunkt  $G_1(Q_3) = \bar{Q}_3$  von  $Q_3$  läuft. Von dieser Kurve gehen wir jetzt ebenso zu einer weiteren über, die von  $P$  über  $Q_2, O_1, \bar{Q}_2$  und einen Fixpunkt  $O_2$  von  $G_3$  nach dem Bildpunkt  $G_3G_1(Q_3)$  von  $Q_3$  läuft.

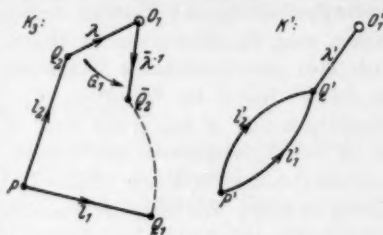


Fig. 3.

Nach  $q$  derartigen Schritten sind wir zu einer Kurve  $Pl_1^*Q_1$  gelangt, die von  $P$  über  $Q_2, O_1, \bar{Q}_2, O_3, \dots$  nach  $Q_1$  geht und deren Bild in  $K'$ , nämlich  $P'l_1^{**}Q' = P'l'_2Q'\lambda'O'_1\lambda'^{-1}Q' \dots$  sich ebenfalls stetig in  $P'l'_3Q'$  deformieren läßt. Deformiert man nun noch  $Pl_1^*Q_1$  in  $Pl_2Q_1$ , was in der Hypersphäre möglich ist, so geht durch die entsprechende Deformation in  $K'$   $P'l_1^{**}Q'$  in  $P'l'_1Q'$  über. Damit ist in der Tat  $P'l'_3Q'$  unter Festhaltung von  $P'$  und  $Q'$  in  $P'l'_1Q'$  übergeführt. Jede geschlossene Kurve in  $K'$  läßt sich daher stetig in einen Punkt zusammenziehen, das heißt aber,  $K'$  ist *einfach zusammenhängend*.

Ist  $F_0, F_1, \dots$  eine Klasse äquivalenter Punkte der Bewegungsgruppe  $\mathfrak{F} = \mathcal{G}/\mathcal{R}$  in  $K'$ , so kann man nach Auszeichnung eines Punktes  $F_0$  als Anfangspunktes jede Bewegung von  $K'$  dadurch eindeutig bestimmen, daß man angibt, in welchen Punkt  $F_0$  durch die Bewegung übergeht. Wir bezeichnen ein Element der Gruppe  $\mathfrak{F}$  ebenso wie den von ihm erzeugten Bildpunkt  $F_a$  von  $F_0$  mit  $F_a$ . Man kann hiernach jedes Element  $F_a$  von  $\mathfrak{F}$  durch die Klasse der gerichteten Wege in  $K'$  darstellen, die von  $F_0$  nach  $F_a$  führen — *Wegeklasse*  $F_a$  in  $K'$ . Wie wir uns eben überzeugt haben, ist jeder Weg einer Klasse stetig in jeden andern unter Festhaltung der Randpunkte  $F_0$  und  $F_a$  überführbar. In der Klasse, die zu dem Produkt  $F_\gamma = F_a F_\beta$  gehört, befindet sich jede Kurve, die man erhält, wenn man zuerst von  $F_0$  nach  $F_a$  auf einer Kurve der Klasse  $F_a$  und von  $F_a$  auf einer zu einer Kurve der Klasse  $F_\beta$  äquivalenten Kurve nach  $F_\gamma$  fortschreitet. Faßt man  $F_a$  und  $F_\beta$  als Bewegungen von  $K'$  auf (die den Punkt  $F_0$  in den Punkt  $F_a$  bzw.  $F_\beta$  überführen), so ist  $F_\gamma = F_a F_\beta$  gemäß der Verabredung von § 2 S. 10 die Bewegung, die entsteht, wenn

man erst  $F_\beta$  und dann  $F_\alpha$  ausübt. In der Mannigfaltigkeit  $M$  bilden sich die Kurven einer Klasse  $F_\alpha$  in geschlossene Kurven ab, die alle von einem gemeinsamen Anfangspunkt  $F_0$  (ebenso wie in  $K'$  bezeichnet) ausgehen und unter Festhaltung von  $F_0$  stetig ineinander deformierbar sind.

Nun kann man in  $M$  eine Klasseneinteilung der von  $F_0$  ausgehenden geschlossenen und mit einem Richtungssinn versehenen Kurven vornehmen. In einer Klasse befinden sich alle und nur die Kurven, die sich in  $M$  unter Festhaltung von  $F_0$  stetig ineinander deformieren lassen. Eine solche Klasse mag *Wegeklasse* von  $M$  heißen. Jeder Wegeklasse  $F_\alpha$  von  $K'$  läßt sich eine gleichbezeichnete Wegeklasse  $F_\alpha$  von  $M$  zuordnen, nämlich die, in der die Bilder der Wegeklasse  $F_\alpha$  von  $K'$  liegen. Umgekehrt geht jede Wegeklasse von  $M$  aus genau einer Wegeklasse von  $K'$  hervor; denn jede in  $M$  von  $F_0$  ausgehende geschlossene Kurve ist Bild einer in  $K'$  von  $F_0$  ausgehenden und in einem Punkt  $F_\alpha$  mündenden Kurve von  $K'$ , die eindeutig festliegt, weil sich die Punktumgebungen in  $K'$  und in  $M$  eindeutig aufeinander abbilden. Damit ist zwischen den Wegeklassen in  $K'$  und den Wegeklassen in  $M$  eine eindeutige Beziehung hergestellt.

Die Wegeklassen von  $M$  sind nun nichts anderes als die Elemente der *Fundamentalgruppe*  $\mathfrak{F}$  von  $M$ , die deshalb auch *Wegegruppe* von  $M$  genannt wird (Definition der Fundamentalgruppe). Das Produkt zweier solcher Wegeklassen  $F_\alpha F_\beta$  ist die Wegeklasse, in der jede Kurve liegt, die man erhält, wenn man erst  $F_\alpha$  und dann  $F_\beta$  durchläuft. Die dem Einheits-element der Fundamentalgruppe entsprechende Wegeklasse enthält alle auf einen Punkt zusammenziehbaren Kurven. Wir können diesen Tatbestand mit andern Worten so bezeichnen: Jedem Element der Bewegungsgruppe von  $K'$  ist ein Element der Fundamentalgruppe von  $M$  eindeutig zugeordnet, und diese Zuordnung ist ein Gruppenisomorphismus. Nun war die Bewegungsgruppe von  $K'$   $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ . Damit ist also der Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppe und Bewegungsgruppe hergestellt:

*Die Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  des Diskontinuitätsbereiches  $M$  einer endlichen Bewegungsgruppe  $\mathfrak{G}$  der Hypersphäre oder, was dasselbe besagt, des dreidimensionalen sphärischen Raumes  $K_3$  ist die Quotientengruppe der Bewegungsgruppe  $\mathfrak{G}$  und der Untergruppe  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{G}$ , die von allen fixpunkthaltigen Bewegungen von  $\mathfrak{G}$  erzeugt wird:  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ .*

Der Satz überträgt sich, wie wir sahen, nicht auf höhere Dimensionen, dagegen wohl auf die gewöhnliche Kugel, den zweidimensionalen sphärischen Raum. Da alle starren Bewegungen erster Art der Kugel fixpunkthaltig sind, so besteht die Fundamentalgruppe des Diskontinuitätsbereiches einer endlichen Bewegungsgruppe der Kugel (einer platonischen Gruppe) aus dem Einheits-element, und da die Fundamentalgruppe in zwei Dimensionen die Mannigfaltigkeit topologisch eindeutig bestimmt, so stimmen die



Diskontinuitätsbereiche dieser Gruppen mit der Kugel selbst überein. Das topologische Interesse an den Diskontinuitätsbereichen metrischer Bewegungsgruppen beginnt daher in zwei Dimensionen nicht schon mit der sphärischen Geometrie, sondern erst bei den unendlichen Bewegungsgruppen der euklidischen und hyperbolischen Ebene, die die Ringfläche und die Flächen höheren Geschlechte liefern. Daß es fixpunktlose starre Bewegungen der Hypersphäre gibt, daran liegt das Auftreten topologisch wichtiger Diskontinuitätsbereiche in der sphärischen dreidimensionalen Geometrie.

## § 9.

## Numerische Invarianten.

Die Fundamentalgruppe einer dreidimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit bestimmt deren numerische Invarianten, nämlich die *Bettischen Zahlen*  $p_1$  und  $p_2$  der Dimensionen 1 und 2, die bei Orientierbarkeit übereinstimmen, und die *Torsionskoeffizienten*  $c_1, c_2, \dots, c_e$  der Dimension 1 vollständig. Wir fassen im folgenden die numerischen Invarianten in das Zeichen

$$(p_1, p_2; c_1, c_2, \dots, c_e; -)$$

zusammen. Darin bedeutet der Strich an letzter Stelle, daß kein Torsionskoeffizient der Dimension 2 vorhanden ist, daß also die Mannigfaltigkeit orientierbar und folglich  $p_1 = p_2$  ist. Der einzige mögliche Torsionskoeffizient der Dimension 2 hat den Wert 2, sein Auftreten ist mit der Nichtorientierbarkeit gleichbedeutend. Die Torsionskoeffizienten  $c_1, c_2, \dots, c_e$  sind ganze Zahlen  $> 1$ ; jeder Torsionskoeffizient ist im vorhergehenden als Faktor enthalten.

Um diese numerischen Invarianten aus der Fundamentalgruppe abzuleiten, hat man von der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  zur sogenannten *Homologiegruppe*  $\mathfrak{X}$  überzugehen. Die Homologiegruppe einer beliebigen abstrakten Gruppe  $\mathfrak{F}$  ist die Quotientengruppe von  $\mathfrak{F}$  und der Kommutatorgruppe  $\mathfrak{K}$  von  $\mathfrak{F}$ , die von allen Elementen der Form  $F_i F_k F_i^{-1} F_k^{-1}$  von  $\mathfrak{F}$  erzeugt wird, oder mit anderen Worten: die Homologiegruppe ist die abelsch gemachte Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$ . Man erhält also  $\mathfrak{X}$  aus  $\mathfrak{F}$ , wenn man zu den Relationen zwischen den Erzeugenden von  $\mathfrak{F}$  die Vertauschbarkeitsrelationen

$$F_i F_k F_i^{-1} F_k^{-1} = E$$

hinzunimmt;  $F_i, F_k$  sind beliebige Elemente von  $\mathfrak{F}$ , es genügt natürlich Vertauschbarkeit zwischen den Erzeugenden von  $\mathfrak{F}$  zu fordern.

Die Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  ist hiernach zur Homologiegruppe  $\mathfrak{X}$  (im allgemeinen mehrstufig) isomorph. Die Elemente von  $\mathfrak{X}$  nennen wir  $X$ , zur Bezeichnung der Gruppenmultiplikation benutzen wir in  $\mathfrak{X}$  das  $+$ -Zeichen,



statt des bisher gebrauchten Multiplikationszeichens, und entsprechend zur Bezeichnung des Einheitselementes die 0. Die Verknüpfung  $+$  wird ein für allemal als kommutativ vorausgesetzt. In der Bezeichnung wird der Anschluß an die Theorie der linearen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten zum Ausdruck gebracht. Die  $i$  wesentlichen Relationen zwischen den  $k$  Erzeugenden

$$(X) \quad X_1, X_2, \dots, X_k$$

nehmen jetzt die Form von  $i$  linearen Gleichungen an:

$$(Y) \quad Y_i = \sum_{n=1}^k l_{in} X_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, i).$$

Man erhält diese Gleichungen, wenn man in den wesentlichen Relationen der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  die Erzeugenden statt mit  $F$  mit  $X$  bezeichnet, von der Reihenfolge absieht, in der sie in den Relationen auftreten, und von der multiplikativen zur additiven Schreibung übergeht.  $l_{in}$  ist also die algebraische Summe aller Exponenten, mit denen  $F_n$  in der  $i$ -ten Relation von  $\mathfrak{F}$  auftritt. Die abelsche Gruppe  $\mathfrak{X}$  ist hiernach durch die ganzzahlige *Exponentenmatrix*  $L = (l_{in})$  vollständig bestimmt. Ersetzen wir in den Gleichungen (Y) die  $k$  Erzeugenden  $X$  durch andere  $X_1^*, \dots, X_k^*$ , die ganzzahlige Kombinationen der  $X$  sind, und lassen sich umgekehrt die  $X$  durch die  $X^*$  ganzzahlig ausdrücken, hängen also die  $X$  mit den  $X^*$  durch eine ganzzahlige unimodulare Transformation zusammen:

$$(A) \quad X_n = \sum_{e=1}^k \alpha_{ne} X_e^* \quad (n = 1, 2, \dots, k),$$

so erzeugen die Elemente  $X_1^*, \dots, X_k^*$  ebenfalls die Gruppe  $\mathfrak{X}$ . Ebenso dürfen in den Relationen  $Y_i = 0$  die  $i$  Verbindungen  $Y_i$  der  $X$  oder der  $X^*$  ganzzahlig unimodular in andere Verbindungen

$$(B) \quad Y_\sigma^* = \sum_{i=1}^i \beta_{\sigma i} Y_i \quad (\sigma = 1, 2, \dots, i)$$

transformiert werden. Die neuen Relationen  $Y_\sigma^* = 0$  sind dann Folgen der alten und umgekehrt und bestimmen somit ebenfalls die alte Gruppe  $\mathfrak{X}$ . Nun kann man nach einem Satz der Elementarteilertheorie durch geeignete Wahl der ganzzahligen unimodularen Matrizen

$$A = (\alpha_{ne}), \quad B = (\beta_{\sigma i})$$

es erreichen, daß die Matrix  $L$  in die Normalform

$$B L A$$

übergeht, in der in der Hauptdiagonale die *invarianten Faktoren* (rationalen Elementarteiler) von  $L$  stehen, alle andern Elemente aber  $= 0$  sind. Die Anzahl der invarianten Faktoren ist gleich dem Range  $q$  von  $L$ ; wir

ordnen sie so an, daß jeder invariante Faktor im vorangehenden enthalten ist, also  $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_g$ . Dann stehen in der Hauptdiagonale erst  $q$  invariante Faktoren, die von 1 verschieden sind:  $c_1, c_2, \dots, c_g$ , dann folgen  $q - q$  vom Werte 1. Die Matrix  $BLA$  von  $i$  Zeilen und  $k$  Spalten hat also die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, daß  $q \neq 0$  ist; für  $q = 0$  würde eine freie Abelsche Gruppe vorliegen mit so vielen Erzeugenden, wie Nullspalten vorhanden sind. Ohne die Gruppe  $\mathfrak{X}$  zu ändern, dürfen wir die Zeilen und Spalten, die sich in Diagonalelementen des Wertes 1 schneiden, fortlassen, da sie unwesentliche Relationen der Form  $X_{e+1}^* = \dots = X_e^* = 0$  bedeuten. Gleichfalls dürfen die aus lauter Nullen bestehenden Zeilen gestrichen werden, die die Relation  $0 = 0$  darstellen, nicht dagegen die aus lauter Nullen bestehenden Spalten, die den frei bleibenden, d. h. nicht in die normierten Relationen eingehenden Erzeugenden entsprechen. Wir wollen die so verkürzte Matrix  $BLA$ , also eine Matrix von  $q$  Zeilen und  $\sigma = k - q + q$  Spalten mit  $L^*$  bezeichnen:

$$L^* = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_g & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die von 1 verschiedenen invarianten Faktoren von  $L$ ,  $c_1, c_2, \dots, c_g$ , heißen *Torsionskoeffizienten*, die Differenz von Spaltenzahl und Rang von  $L$  (oder  $L^*$ ),  $p_1 = \sigma - q = k - q$ , heißt *Bettische Zahl* (der Dimension 1) der Gruppe  $\mathfrak{X}$ .

Die Torsionskoeffizienten  $c_1, c_2, \dots, c_g$  und die Bettische Zahl  $p_1 = \sigma - q$  sind für die Homologie-Gruppe  $\mathfrak{X}$  charakteristisch. Seien nämlich

$$L^* = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_g & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L'^* = \begin{pmatrix} c'_1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c'_g & 0 \end{pmatrix}$$

zwei Matrizen in Normalform, die ein und dieselbe Abelsche Gruppe bestimmen, so kann man jedes erzeugende Element  $X'_1, \dots, X'_g$  der Darstellung  $L'^*$  als lineare Kombination der  $\sigma$  Erzeugenden  $X_1, \dots, X_\sigma$  der Dar-

stellung  $L^*$  ausdrücken. Ändert man nun  $L^*$  dadurch ab, daß man die  $\sigma'$  Erzeugenden  $X'_1, \dots, X'_{\sigma'}$  und gleichzeitig die Relationen hinzunimmt, die die  $X'$  ganz und linear durch die  $X$  ausdrücken, so erhält man eine Matrix  $M$  von  $\varrho + \sigma'$  Zeilen und  $\sigma + \sigma'$  Spalten, die offenbar dieselbe Äbelsche Gruppe bestimmt wie  $L^*$ :

$$M = \left( \begin{array}{ccccc} \overbrace{c_1 \cdot 0 \cdot 0}^{\sigma} & \overbrace{0 \cdot 0}^{\sigma'} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_e & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} c_1 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}} \right\} \varrho \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}} \right\} \sigma' \end{array}.$$

Ebenso erhält man aus  $L'^*$  eine Matrix von  $\varrho' + \sigma$  Zeilen und  $\sigma + \sigma'$  Spalten, indem man zu den Erzeugenden  $X'_1, \dots, X'_{\sigma'}$  die erzeugenden Elemente  $X_1, \dots, X_{\sigma}$  von  $L^*$  als überzählige Erzeugende und die Relationen hinzunimmt, durch die sich die  $X$  ganzzahlig linear aus den  $X'$  zusammensetzen:

$$M' = \left( \begin{array}{ccccc} \overbrace{0 \cdot 0}^{\sigma} & \overbrace{c'_1 \cdot 0 \cdot 0}^{\sigma'} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & c'_e & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}} \right\} \varrho' \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} c'_1 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}} \right\} \sigma \end{array}.$$

Sterne stehen für Elemente, die nicht näher bezeichnet zu werden brauchen.  $M$  und  $M'$  definieren ebenso wie  $L^*$  und  $L'^*$  dieselbe Äbelsche Gruppe, und zwar sind die Erzeugenden in  $M$  dieselben Gruppenelemente wie die Erzeugenden in  $M'$ ; die oberen Eingänge der Matrizen  $M$  und  $M'$  entsprechen den Elementen  $X_1, \dots, X_{\sigma}, X'_1, \dots, X'_{\sigma'}$  in dieser Reihenfolge. Die Relationen, d. h. die Zeilen von  $M'$ , müssen sich daher als ganze lineare Kombinationen der Zeilen von  $M$  darstellen lassen und umgekehrt. Das bedeutet aber, daß die Matrizen  $M$  und  $M'$  denselben Rang und dieselben invarianten Faktoren haben. Der Rang von  $M$  ist  $\sigma' + \varrho$ , der von  $M'$   $\sigma + \varrho'$ , also ist  $\sigma - \varrho = \sigma' - \varrho' = p_1$ . Die invarianten Faktoren von  $M$  sind  $c_1, c_2, \dots, c_{\varrho}$ , abgesehen von denen des Wertes 1, denn man kann in  $M$  alle mit Sternen bezeichneten Elemente durch Spaltenaddition zum Verschwinden bringen, wobei sich die invarianten Faktoren bekanntlich nicht ändern. Ebenso schließt man, daß die invarianten Faktoren von  $M'$   $c'_1, c'_2, \dots, c'_{\varrho'}$  sind. Es ist also in der Tat  $c_1 = c'_1, c_2 = c'_2, \dots, c_{\varrho} = c'_{\varrho}$ , also  $\varrho = \varrho'$ , also  $\sigma = \sigma'$ , d. h. die beiden Matrizen  $L^*$  und  $L'^*$  stimmen überein. Die Torsionskoeffizienten  $c_1, c_2, \dots, c_{\varrho}$  und die Bettische Zahl

$p_1 = \sigma - \varrho$  sind somit für die Homologiegruppe  $\mathfrak{X}$  und daher auch für die Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  von der Darstellung der Gruppen durch Erzeugende und wesentliche Relationen unabhängige numerische Invarianten.

Die Bettische Zahl  $p_1 = \sigma - \varrho$  ist dann und nur dann  $\neq 0$ , wenn die Homologiegruppe  $\mathfrak{X}$  in der Normaldarstellung mindestens eine freie Erzeugende, also unendliche Ordnung hat. Da die Fundamentalgruppen der Diskontinuitätsbereiche unserer endlichen Bewegungsgruppen selbst endlich sind, so sind erst recht die Homologiegruppen endlich, also ist in allen unseren Beispielen die Bettische Zahl  $p_1 = p_2 = 0$ .

Die Wichtigkeit der abgeleiteten gruppentheoretischen Invarianten liegt in ihrer geometrischen Bedeutung. Die Elemente der Homologiegruppe sind die Restklassen der Kommutatorgruppe  $\mathfrak{K}$  in der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$ . Jedem Element der Fundamentalgruppe entspricht, wie wir wissen, eine Klasse von gerichteten geschlossenen Kurven, die unter Festhaltung des gemeinsamen Ausgangspunktes  $F_0$  ineinander deformierbar sind (Wegeklasse). Faßt man nun die Wegeklassen, deren zugehörige Elemente der Fundamentalgruppe derselben Restklasse in der Zerlegung der Fundamentalgruppe nach der Kommutatorgruppe angehören, zu einer größeren Klasse von Wegen, einer *Homologieklass*e, zusammen, so entspricht jedem Element der Homologiegruppe umkehrbar eindeutig eine Homologieklass geschlossener Kurven. Die Kurven, die dem Einheitsselement der Homologiegruppe, der Nullklasse, zugehören, heißen *nullhomolog*, in Zeichen  $\sim 0$ . Ein Torsionskoeffizient  $c$  bedeutet dann, daß eine geschlossene Kurve  $k$  in  $M$  vorhanden ist, die selbst nicht  $\sim 0$  ist, wohl aber  $c$ -mal durchlaufen. Einfaches Beispiel: die Gerade des projektiven Raumes  $P_3$ ,  $c = 2$ . Tritt aber eine Bettische Zahl  $p_1 > 0$  auf, so heißt das, daß es eine Kurve  $k$  gibt, die auch nicht durch mehrmaliges Durchlaufen nullhomolog gemacht werden kann<sup>24)</sup>.

Geometrisch sind die nullhomologen Kurven durch folgende Eigenschaft charakterisiert. Sicher sind alle Kurven, die sich auf einen Punkt zusammenziehen lassen, nullhomolog. Denn das Einheitsselement  $E$  der Fundamentalgruppe gehört der Kommutatorgruppe an. Jedes von  $E$  verschiedene Element der Kommutatorgruppe läßt sich als Produkt von Kommutatoren

$$(F_1 F_2 F_1^{-1} F_2^{-1}) \dots (F_{2p-1} F_{2p} F_{2p-1}^{-1} F_{2p}^{-1})$$

darstellen. Alle Kurven der Wegeklasse dieses Fundamentalgruppenelementes sind also auch homolog Null. Versteht man nun unter

$$f_1, f_2, \dots, f_{2p}$$

<sup>24)</sup> Poincaré hat die Zahl  $P_1 = p_1 + 1$  als Bettische Zahl eingeführt. Wir folgen H. Weyl.

ein System von Kurven aus den Wegekassen

$$F_1, F_2, \dots, F_{2p},$$

so ist demnach eine Kurve  $k$  nur dann  $\sim 0$ , wenn sie sich entweder in einen Punkt oder in eine Kurve

$$(p) \quad f_1 f_2 f_1^{-1} f_2^{-1} \dots f_{2p-1} f_{2p} f_{2p-1}^{-1} f_{2p}^{-1}$$

deformieren läßt. Ist  $k$  in einen Punkt deformierbar, so wird von  $k$  während der Deformation ein Elementarflächenstück bestrichen. Jede auf einen Punkt zusammenziehbare Kurve bildet also den Rand einer berandeten Fläche vom Geschlechte 0. Allgemein sind die nullhomologen Kurven dadurch charakterisiert, daß sie den Rand einer orientierbaren Fläche vom Geschlechte  $p$  ausmachen. Eine solche Fläche wird nämlich von der Kurve  $k$  beschrieben, wenn man sie in die Kurve  $(p)$  deformiert. Denn diese Fläche ist einmal berandet von der Ausgangskurve  $k$ , sodann von  $4p$  paarweise zugeordneten, nur im Durchlaufungssinn verschiedenen Kurven.

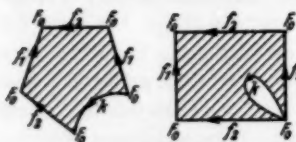


Fig. 4.

— Im Falle  $p=1$  läßt sich die Fläche z. B. auf das nebenstehende Fünfeck abbilden. Dieses Fünfeck ist eine durch die Randkurve  $k$  gelochte Ringfläche, da man es in das gezeichnete, von  $k$  gelochte Viereck mit paarweiser Seitenzuordnung abbilden kann. Entsprechendes gilt von der

Fläche vom Geschlechte  $p$ , die, wie aus der Funktionentheorie bekannt, sich in ein  $4p$ -Eck einwickeln läßt mit der durch die Folge  $(p)$  gegebenen Seitenzuordnung. Jedes Quadrupel der Gestalt  $f_1 f_2 f_1^{-1} f_2^{-1}$  stellt einen „Henkel“ der Fläche dar.

Der eben gezogene Schluß ist umkehrbar: Wenn eine Kurve  $k$  eine orientierbare Fläche vom Geschlechte  $p$  berandet, so läßt sich die Fläche auf das gelochte  $4p$ -Eck abbilden, und  $k$  läßt sich daher in eine Kurve der Form  $(p)$  deformieren, gehört also der Klasse der nullhomologen Kurven an. Diese Kurven sind damit in der Mannigfaltigkeit  $M$  vollständig geometrisch charakterisiert.

Im ganzen unterscheiden wir in der Mannigfaltigkeit  $M$  drei Klasseneinteilungen der geschlossenen, durch einen festen Punkt  $F_0$  gehenden Kurven. Die engste Klasse ist die Wegekasse. Sie enthält alle Kurven, die sich unter Festhaltung dieses Punktes ineinander stetig deformieren lassen. Jede Wegekasse macht ein einzelnes Element der Fundamentalgruppe aus. — Die nächste Klasseneinteilung ist die in die *homotopen Kurven*. Zwei Kurven  $f_1$  und  $f_2$  aus den Wegekassen  $F_1$  und  $F_2$  gehören derselben *Homotopieklasse* an, wenn sie ineinander deformierbar sind, ohne daß dabei ein Punkt festbleiben müßte. Der Punkt  $F_{a_1}$  der Kurve  $f_1$ , der zu Beginn

der Deformation mit  $F_0$  zusammenfällt, wird bei der Deformation eine gewisse Kurve  $f$  beschreiben, von der man annehmen darf, daß sie nach Beendigung der Deformation in  $F_0$  zurückkehrt. Dann ist die Kurve  $ff_3f^{-1}$  durch eine stetige Deformation unter Festhaltung von  $F_0$  aus  $f_1$  hervorgegangen; gehört also die Kurve  $f$  zum Element  $F$  der Fundamentalgruppe, so ist  $F_1 = FF_3F^{-1}$ . Sind umgekehrt  $F_1$  und  $F_3$  ähnliche Elemente der Fundamentalgruppe, also  $F_1 = FF_3F^{-1}$ , und  $f_1, f_3, f$  repräsentierende Kurven von  $F_1, F_3, F$ , so ist  $f_1$  unter Festhaltung des Punktes  $F_0$  in  $ff_3f^{-1}$  deformierbar. Andererseits kann man diese Kurve in  $f_3$  dadurch deformieren, daß man die nacheinander hin und zurück durchlaufene Kurve  $f$  unter Ablösung von  $F_0$  auf einen Punkt zusammenzieht. In die gleiche Homotopieklasse gehören hiernach die Kurven aller Wegeklassen, die ähnlichen Elementen der Fundamentalgruppe zugehören. Die Homotopieklassen machen daher die Klassen ähnlicher (konjugierter) Elemente der Fundamentalgruppe aus und bilden daher keine Gruppe. — Die dritte Klasseneinteilung ist die der Homologieklassen. Zwei Kurven  $f_1$  und  $f_3$  gehören dann und nur dann derselben Homologieklasse an, wenn sie „unter Zerreißung“ ineinander deformierbar sind. Da für alle unsere Deformationen Selbstdurchdringungen zugelassen sind, die Deformationen der Kurven also nicht durch eine stetige Deformation der ganzen Mannigfaltigkeit bewirkt zu werden brauchen, so darf es vorkommen, daß eine geschlossene Kurve sich bei der Deformation selbst überschneidet oder einschnürt und dadurch einen Doppelpunkt erhält. Bei einer Deformation mit Zerreißung ist es dann gestattet, die Kurve an den Doppelpunkten in zwei oder mehrere geschlossene Kurven auseinander zu reißen, die Teile einzeln, aber mit Erhaltung des Umlaufsinnnes, und natürlich innerhalb der Mannigfaltigkeit, zu deformieren und nach der Deformation wieder zu einer einzigen Kurve zusammenzuschließen, die weiter deformiert werden kann. Insbesondere läßt sich eine nullhomologe Kurve mit Zerreißung auf einen Punkt zusammenziehen. Denn jede nullhomologe Kurve ist in eine Kurve der Form  $(p)$  deformierbar. Zerreißt man nun diese Kurve in die einzelnen geschlossenen Kurven  $f_1, f_3, f_1^{-1}, f_3^{-1}, \dots$  und setzt diese Teile paarweise zu den Kurven  $f_1 f_1^{-1}, f_3 f_3^{-1}, \dots$  zusammen, so lassen sich diese Kurven einzeln in einen Punkt zusammenziehen. Umgekehrt ist jede Kurve, die sich mit Zerreißung in einen Punkt deformieren läßt, nullhomolog.

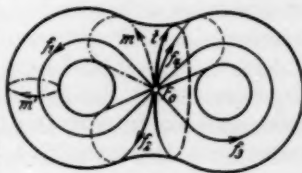


Fig. 5

Das bekannteste Beispiel für diese drei Klassen bilden geschlossene Kurven auf der Doppelpingfläche (Dimension 2). Der Taillenschnitt  $t$  ist eine nullhomologe, aber nicht nullhomotope Kurve; er gehört dem Ele-

ment  $f_1 f_2 f_1^{-1} f_2^{-1}$  der Fundamentalgruppe, also dem Element  $E$  der Homologiegruppe zu. Unter Zerreißung läßt er sich über einen Henkel hinweg in einen Punkt zusammenziehen. Die Meridianschnitte  $m$  und  $f_2$  sind homolog, aber sie gehören verschiedenen ähnlichen Wegekassen der Fundamentalgruppe an:  $m = f_1 f_2 f_1^{-1}$ .  $m$  ist nur in  $f_2$  deformierbar, wenn man den Punkt  $F_0$  nicht festhält, Zwischenlage  $m'$ .

### § 10.

#### Kombinatorische Topologie.

Wir haben in § 8 und § 9 an das Mindestmaß topologischer Vorkenntnisse erinnert, das zum Verständnis der folgenden Beispiele erforderlich ist. Darüber hinaus werden wir weitere Sätze gelegentlich benutzen, die Raum-mangel in extenso abzuleiten verbietet. Doch wollen wir den Gang der Überlegungen andeuten, die zu ihnen führen. — Wir haben uns bisher ganz in der Kontinuums-topologie bewegt. Begriffe wie Punktmannigfaltigkeit, Umgebung, Kurve, stetige Deformation sind als bekannt vorausgesetzt worden. Nun gehören aber alle die Fundamentalgruppen und die numerischen Invarianten betreffenden Sätze über Mannigfaltigkeiten einem Teil der Lehre vom Kontinuum an, der sich rein kombinatorisch behandeln läßt. Unsere Beispiel-Diskontinuitätsbereiche sind in der Tat Zellsysteme, die aus einem Raumstück, endlich vielen Kanten und Seitenflächen bestehen und sich durch die Inzidenzen dieser Elemente vollständig beschreiben lassen. Andererseits gehören die Bewegungsgruppen der Hypersphäre, wie wir sie abgeleitet haben, wesentlich der Kontinuums-mathematik an. Der Übergang von da zur kombinatorischen Topologie wird von dem Satz geleistet, daß es zu jeder endlichen Bewegungsgruppe der Hypersphäre einen Diskontinuitätsbereich gibt, der aus einem einzigen Raumstück besteht, daß dieses Raumstück von endlich vielen einfach zusammenhängenden Flächenstücken begrenzt wird und die Flächenstücke paarweise vermöge der Bewegungen der Gruppe einander zugeordnet sind. Faßt man den Diskontinuitätsbereich als kombinatorisch-topologische Zelle<sup>25)</sup> auf, so ist durch die Zuordnung der Seitenflächen ein geschlossenes kombinatorisch-topologisches Zellsystem  $M$  gegeben, das die Mannigfaltigkeit  $M$  in der kombinatorischen Topologie vertritt. Freilich ist dies Zellsystem durch die Bewegungsgruppe nicht eindeutig festgelegt, so daß die Frage offen bleibt, ob kombinatorisch verschiedene Diskontinuitätsbereiche derselben Bewegungsgruppe homöomorphe Zellsysteme liefern, d. h. ob solche Zellsysteme eine gemeinsame Unterteilung haben.

<sup>25)</sup> Über die verschiedenen möglichen Begriffe des Zellsystems vgl. B. L. van der Waerden, Kombinatorische Topologie, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 39 (1930), S. 121. Herr van der Waerden hat uns auch brieflich mit seinem Rate unterstützt.



Daß man aus jeder Bewegungsgruppe ein kombinatorisches Zellsystem als Diskontinuitätsbereich ableiten kann, wird mit Hilfe des *normalen Diskontinuitätsbereiches* bewiesen. Bilden die Punkte  $G_0, G_1, \dots$ , die keine Fixpunkte sein sollen, eine Klasse äquivalenter Punkte der Hypersphäre hinsichtlich der Bewegungsgruppe  $\mathcal{G}$ , so verstehen wir unter dem (abgeschlossenen) zu  $G_i$  gehörigen normalen Diskontinuitätsbereich  $D_i$  die abgeschlossene Menge der Punkte, deren sphärische Entfernung von  $G_i$  nicht größer ist als die von jedem der übrigen Punkte der Klasse. Ist also  $PG_i$  die sphärische Entfernung eines Punktes  $P$  von  $G_i$ , so soll  $P$  dann und nur dann zu  $D_i$  gehören, wenn  $PG_i \leq PG_j$  für alle  $j \neq i$  ist.  $D_i$  enthält keine äquivalenten inneren Punkte, und anderseits gibt es zu jedem Punkte der Hypersphäre einen äquivalenten Punkt in  $D_i$ . Aus  $D_i$  erhält man also einen eigentlichen Diskontinuitätsbereich, d. h. ein vollständiges System nichtäquivalenter Punkte, wenn man gewisse äquivalente Randpunkte von  $D_i$  unterdrückt. Alle Diskontinuitätsbereiche  $D_0, D_1, \dots$  sind sphärisch kongruent, jeder kann durch eine Bewegung der Gruppe in jeden andern übergeführt werden. Die Bewegungsgruppe erscheint als reguläre Permutationengruppe der Diskontinuitätsbereiche.

Man kann nun zeigen, daß  $D_i$  ein zusammenhängendes Raumstück ist, aus dem man durch geeignete Unterteilung seiner Seitenflächen ein sphärisch konvexes Polyeder machen kann mit paarweiser Zuordnung der Seitenflächen. Jede endliche Bewegungsgruppe der Hypersphäre liefert als Diskontinuitätsbereich eine solche kombinatorische Zelle, die wir auf ihre topologischen Eigenschaften untersuchen können.

Wir zeigen zunächst, daß  $M_i$  orientierbar ist, weil die Bewegungsgruppen, mit denen wir es zu tun haben, alle von der ersten Art sind. Es ist dazu nachzuweisen, daß je zwei zugeordnete Flächenstücke  $C_1$  und  $C_2$  des Diskontinuitätsbereiches  $D$  nach der ersten Art einander zugeordnet sind, d. h. versieht man  $C_1$  mit einer beliebigen Orientierung (Umlaufsinn des Randes) und überträgt man die Orientierung durch die Zuordnung auf das Flächenstück  $C_2$ , so induziert das irgendwie orientierte Raumstück  $D$  in  $C_1$  und  $C_2$  entgegengesetzte Indikatrizien. Nun kann man die Diskontinuitätsbereiche der Hypersphäre wegen der Orientierbarkeit der Hypersphäre so orientieren, daß je zwei benachbarte Diskontinuitätsbereiche in dem gemeinsamen Flächenstück entgegengesetzte Indikatrizien induzieren. Gibt man nun zu, daß eine Bewegung erster Art, die die Zellteilung in sich überführt, auch diese Orientierungen der Raumstücke erhält, mit andern Worten, daß jede kontinuums-topologische Bewegung erster Art auch eine kombinatorisch-topologische Bewegung erster Art ist, so wird insbesondere die Bewegung, die den an  $D$  längs  $C_1$  angrenzenden Diskontinuitätsbereich  $D'$  in  $D$  überführt, auch die Orientierung von  $D'$  in die von  $D$  überführen.

$D$  und  $D'$  induzieren aber voraussetzungsgemäß in dem gemeinsamen Flächenstück  $C_3$  entgegengesetzte Indikatrizien, und da  $C_3$  durch diese Bewegung in  $C_1$  übergeführt wird, so sind auch die Indikatrizien, die  $D$  in  $C_1$  und  $C_2$  induziert, entgegengesetzt.

Wir wollen nun noch kurz auseinanderzusetzen, wie in einem solchen kombinatorischen Zellsystem Fundamentalgruppe und numerische Invarianten definiert sind und inwiefern diese kombinatorisch definierten Invarianten des kombinatorischen Zellsystems  $M$ , mit den in § 9 eingeführten Invarianten der Punktmannigfaltigkeit  $M$  übereinstimmen.

Das Zellsystem  $M$  wird kombinatorisch durch die Inzidenzmatrizen  $E_1, E_2, E_3$  beschrieben<sup>26</sup>). Der obere Eingang der Inzidenzmatrix  $E_1$  wird von den  $\alpha_i$   $\lambda$ -dimensionalen, der linke Eingang von den  $\alpha_{i-1}$   $(\lambda-1)$ -dimensionalen Bausteinen des Zellsystems gebildet; an der Stelle  $(ik)$  von  $E_1$  steht die Indikatrix, die das  $k$ -te  $\lambda$ -dimensionale Element des oberen Eingangs mit seiner Indikatrix  $+1$  in dem  $i$ -ten  $(\lambda-1)$ -dimensionalen Element des linken Eingangs induziert<sup>27</sup>). Ein Beispiel hierfür ist in § 11 S. 63 (Oktaederraum) durchgeführt.

Sind

$$C_1^{+1}, C_2^{+1}, \dots, C_{2\alpha}^{+1}; \quad C_1^{-1}, C_2^{-1}, \dots, C_{\alpha}^{-1}$$

die  $2\alpha$  Seitenflächen eines Diskontinuitätsbereiches  $D$  und sind immer zwei Seitenflächen  $C_i^{+1}$  und  $C_i^{-1}$  zugeordnet, so ist die Fundamentalgruppe des Zellsystems wie folgt definiert: Die Erzeugenden sind  $C_1, C_2, \dots, C_{2\alpha}$ ; die Relationen entsprechen den einzelnen Kantenzykeln. Man kann nämlich die Kanten von  $D$  folgendermaßen zu Zykeln zusammenfassen: man beginnt mit irgendeiner Kante  $a_1$  von  $D$ ; sie ist Randkante eines Flächenstückes  $C_i^{\epsilon_1}$  ( $\epsilon = \pm 1$ ). Der Kante  $a_1$  entspricht vermöge der Zuordnung von  $C_i^{\epsilon_1}$  zu  $C_i^{-\epsilon_1}$  eine eindeutig bestimmte, nicht notwendig von  $a_1$  verschiedene Kante  $a_2$  von  $C_i^{-\epsilon_1}$ , an die ein weiteres Flächenstück  $C_i^{\epsilon_2}$  angrenzt.  $a_2$  gehört also auch zum Rande von  $C_i^{\epsilon_2}$  und wird somit durch

<sup>26</sup>) Die Inzidenzmatrizen bestimmen das Zellsystem komplettisch (also erst recht nektisch) eindeutig, wenn keine singulären Elemente darin auftreten, d. h. keine Kanten, die in ihren Anfangspunkt zurücklaufen, keine Elementarflächenstücke, die mehrmals an dieselbe Kante grenzen, und keine Raumatücke, die an beide Seiten desselben Flächenstückes grenzen. In diesem Falle sind alle Elemente der Inzidenzmatrizen 0 oder  $\pm 1$ . Im andern Falle treten komplettische oder sogar nektische Mehrdeutigkeiten auf.

<sup>27</sup>) H. Poincaré, Second compl. à l'analyse situs, Proc. London Math. Soc. 32 (1901).

H. Weyl, Anal. situs comb., Revista Matem. Hispano-Americana, Toledo 1923.

H. Tietze, Topol. Invarianten mehrdim. Mannigf., Monatsh. f. Math. u. Phys.

19 (1908).

Besonders ausführlich: O. Veblen, The Cambridge Colloquium Lectures II, Analysis Situs, New York 1922.

die Zuordnung  $C_i^{s-1} \rightarrow C_i^{-s}$  in eine ganz bestimmte Kante  $a_s$  des Randes von  $C_i^{s-1}$  übergeführt. Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man nach endlich vielen Schritten zu einer Kante  $a_{s+1}$  ( $s \geq 1$ ), die mit  $a_1$  übereinstimmt. Alle Kanten  $a_1, a_2, \dots, a_s$  fallen in dem Zellsystem  $M_i$  in dieselbe Kante  $a$  zusammen, um die sich die in  $D$  doppelt als  $C_i^{s+1}$  und  $C_i^{-1}$  auftretenden Flächenstücke  $C_i, C_i, \dots, C_i$  fächerartig zyklisch herumgruppieren. Wir schreiben nun die Relation

$$(a) \quad C_i^{s_1} C_i^{s_2} \dots C_i^{s_r} = E$$

an. Es ist eine wesentliche Relation der Fundamentalgruppe, und man erhält so viele wesentliche Relationen, wie es Kantenzylinder in  $D$ , d. h. wie es Kanten in  $M_i$  gibt, also  $\alpha_i$ .

Diese kombinatorische Definition der Fundamentalgruppe hat folgende kontinuums-topologische Bedeutung: Wir fassen den Diskontinuitätsbereich wieder als Punktmenge auf und führen  $a_s$  mit  $C_1, C_2, \dots, C_{\alpha_i}$  bezeichnete geschlossene Kurven ein, die alle von einem Punkte  $F_0$  im Innern von  $D$  ausgehen. Die Kurve  $C_i$  führt nach einem innern Punkte des Flächenstückes  $C_i^{s+1}$  und kehrt vom äquivalenten Punkt des Flächenstückes  $C_i^{-1}$  nach  $F_0$  zurück, ohne sonstwo den Rand von  $D$  zu treffen. Diese Kurven sind in  $M$  geschlossene Kurven, und dasselbe gilt von jedem Produkt  $\prod C_i^{s_i}$ .

Die linke Seite der Relation (a), die zur Kante  $a$  von  $M_i$  gehört, bedeutet nun eine Kurve von  $M$ , die die Kante  $a$  gerade einmal umschlingt (*Kantenschlinge*), d. h. eine Kurve, die sich auf einen Punkt zusammenziehen läßt und dabei nur die Kante  $a$  einmal überschreitet. Jede Kurve von  $M$ , die sich auf einen Punkt zusammenziehen läßt, kann in solche Kantenschlingen aufgelöst werden, so daß das System der  $\alpha_i$  angeführten Relationen der Art (a) vollständig ist.

Nun läßt sich ohne Bezug auf diese Veranschaulichung, rein kombinatorisch-topologisch zeigen, daß die kombinatorisch definierte Fundamentalgruppe eines normalen Diskontinuitätsbereiches die Quotientengruppe aus Bewegungsgruppe  $\mathcal{G}$  und Fixpunktgruppe  $\mathcal{R}$  (§ 9) ist. Der Beweis benutzt den Satz, daß die durch endlich viele Hauptkugeln bewirkte Einteilung der Hypersphäre, als kombinatorisches Zellsystem aufgefaßt, homöomorph mit der kombinatorischen dreidimensionalen Sphäre ist. Wir sind damit berechtigt, nach Belieben die Fundamentalgruppe aus der Bewegungsgruppe oder unmittelbar nach der kombinatorischen Methode aus dem normalen Diskontinuitätsbereich abzuleiten.

Wie die Fundamentalgruppe lassen sich auch die numerischen Invarianten aus dem kombinatorischen Zellsystem  $M$ , unmittelbar bestimmen. Die Torsionskoeffizienten der Dimension 1 waren die invarianten Faktoren der Exponentenmatrix  $L$  (§ 9 S. 47), die erste Bettische Zahl  $p_1$  die Diffe-

renz aus Spaltenzahl  $k$  und Rang  $q$  von  $L$  (§ 9 S. 47). Ist nun das Zellsystem  $M$ , eine orientierbare Mannigfaltigkeit — und wir haben gezeigt, daß unsere Zellsysteme orientierbar sind —, so kann man durch geeignete Orientierung der Flächen und Kanten erreichen, daß die Exponentenmatrix  $L$  mit der Inzidenzmatrix  $E$ , übereinstimmt. Zur Bildung von  $L$  hat man dabei die eben abgeleitete Darstellung der Fundamentalgruppe mit Hilfe der Kantenschlingen zu benutzen; die Erzeugenden sind also die  $\alpha_i$  Flächenstücke  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , und die  $\alpha_i$  Relationen haben die Form (a). — Zum Beweise denken wir uns zunächst alle Flächenstücke des Polyeders gleichmäßig orientiert, d. h. so, daß in einer Kante von  $D$  die beiden angrenzenden Flächenstücke mit ihrer Indikatrix  $+1$  entgegengesetzte Indikatrices induzieren, also etwa so, daß für einen außerhalb  $D$  stehenden Betrachter der Uhrzeigersinn der positive Umlaufsinn ist. In den mit  $C_1^{+1}, C_2^{+1}, \dots, C_n^{+1}$  bezeichneten Flächenstücken wird diese Orientierung beibehalten, dagegen werden alle Flächenstücke  $C_1^{-1}, C_2^{-1}, \dots, C_n^{-1}$  umorientiert; denn die Orientierung von  $C_i^{-1}$  ist durch die von  $C_i^{+1}$  infolge der Zuordnung bestimmt und alle Zuordnungen sind wegen der Orientierbarkeit von  $M$ , von der ersten Art. Haben also  $C_i^{+1}$  und  $C_j^{+1}$  eine Kante  $a$  gemeinsam, so induzieren sie in  $a$  die gleiche oder entgegengesetzte Indikatrix, je nachdem  $\varepsilon_i = -\varepsilon_j$  oder  $\varepsilon_i = \varepsilon_j$  ist. Sei nun  $C_1^{+1} C_2^{+1} \dots C_n^{+1} = E$  die Relation (a) von S. 55 und  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  die  $s$  Kanten von  $D$ , die in die Kante  $a$  von  $M$  zusammenfallen, so wollen wir  $a$  so orientieren, daß das Flächenstück  $C_i^{+1}$  in  $a$  die Indikatrix  $\varepsilon_i$  induziert.  $C_i^{-1}$  induziert dann in  $a$  ebenfalls die Indikatrix  $\varepsilon_i$ . Nun wissen wir, daß  $C_i^{+1}$  in  $a$  die gleiche Indikatrix  $\varepsilon_i$  induziert, wenn  $-\varepsilon_1 = -\varepsilon_i$ , und die entgegengesetzte, wenn  $-\varepsilon_1 = +\varepsilon_i$  ist.  $C_i^{+1}$  induziert also in  $a$  sicher die Indikatrix  $\varepsilon_i$ . Ebenso zeigt man, daß  $C_i^{+1}$  in  $a$  die Indikatrix  $\varepsilon_i$  induziert usw. Die Indikatrix, die das Flächenstück  $C_e$  in  $a$  induziert, ist also die algebraische Summe der Exponenten, mit denen  $C_e$  in den Relationen (a) auftritt. Damit ist die Übereinstimmung von  $L$  mit  $E$ , bewiesen. Die Torsionskoeffizienten der Dimension 1 sind somit die von 1 verschiedenen invarianten Faktoren von  $E$ , und die erste Bettische Zahl ist

$$p_1 = \alpha_2 - \gamma_2 = \alpha_2 - \gamma_2 - \gamma_3,$$

wo  $\gamma_1$  den Rang von  $E_1$  bezeichnet. Für unser aus einem einzigen Raumstück bestehendes orientierbares Zellsystem  $M$ , ist nämlich  $\gamma_3 = 0$ . Man pflegt sonst die  $\lambda$ -te Bettische Zahl durch die Gleichung  $p_\lambda = \alpha_\lambda - \gamma_\lambda - \gamma_{\lambda+1}$  und die Torsionskoeffizienten  $\lambda$ -ter Dimension als die invarianten Faktoren von  $E_{\lambda+1}$  zu definieren. Diese Definition steht im Einklang mit der vorstehenden Ableitung, da für eine orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $p_1 = p_2$  ist. Da  $\alpha_1 - \gamma_1 - \gamma_{1+1}$ , und die invarianten Faktoren von  $E_1$  invariant gegenüber Zellunterteilung sind, so kann man Torsions-

koeffizienten und Bettische Zahlen in genau derselben Weise aus den Inzidenzmatrizen berechnen, wenn die Mannigfaltigkeit nicht gerade mit einem einzigen Raumstück überdeckt ist.

## § 11.

**Drehgruppen.**

Wir benutzen nunmehr die allgemeinen topologischen Erörterungen zur Diskussion der Diskontinuitätsbereiche der sphärischen Bewegungsgruppen.

Die einfachsten Diskontinuitätsbereiche besitzen die *Drehgruppen* (§ 6). Da sie fixpunktlos sind (§ 7 S. 40) fällt die Fundamentalgruppe ihres Diskontinuitätsbereiches mit der Bewegungsgruppe zusammen:  $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$  (§ 8). — Wir beziehen uns auf die Aufzählung der Drehgruppen § 6 S. 26.

*Linsenräume.*

$\mathfrak{R}$  zyklische Gruppe der Ordnung  $m$ ,  $\mathfrak{L} = E$ ;  $\mathfrak{G}$  zyklisch.

In dem einfachsten Sonderfall, daß auch  $\mathfrak{R} = E$ , bildet sich zweistufig die aus Identität  $E$  und Diametralpunktvertauschung  $S$  bestehende  $R_2$ -Gruppe in  $\mathfrak{R}$  ab. Äquivalente Punkte der Hypersphäre sind Diametralpunkte; sie bilden sich stereographisch in elliptisch inverse Punkte der Einheitskugel des  $K_3$  ab. Der zugehörige geschlossene Raum  $M$  entsteht, wenn man Diametralpunkte der Hypersphäre oder elliptisch inverse Punkte der Einheitskugel des konformen Raumes als nicht verschieden ansieht. Normaler Diskontinuitätsbereich des Nullpunktes  $G_0$  im  $K_3$  ist das Innere der Einheitskugel, die durch Diametralpunktidentifizierung ihrer Oberfläche zu  $M$  geschlossen wird.  $M$  ist der *projektive Raum*  $P_3$ . Die Fundamentalgruppe hat die Ordnung 2; die numerischen Invarianten sind  $(0, 0; 2; -)$ . Die wegen des Torsionskoeffizienten 2 vorhandene erst zweimal durchlaufen begrenzende geschlossene Kurve verbindet irgend zwei Diametralpunkte der Einheitskugel des  $K_3$ ; solche Kurven sind die projektiven Geraden, wie man aus Zentralprojektion der Hypersphäre in den uneigentlichen  $P_3$  des  $R_4$  erkennt. Hiermit ist die bekannte topologische Beziehung zwischen dem  $K_3$  und dem  $P_3$  dem System der Bewegungsgruppen eingeordnet.

Sei die Ordnung von  $\mathfrak{R}$  jetzt allgemein  $m$ . Wir betrachten zuerst die zweistufig in  $\mathfrak{R}$  abgebildete  $R_2$ -Gruppe  $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}$ . Legen wir zwei senkrechte Ebenen der Drehebeneinkongruenz der erzeugenden Rechtsdrehung  $Z_r$  (§ 6 S. 25) so, daß sie sich in  $z$ -Achse und dazu senkrechten Einheitskreis des euklidischen Bildraumes projizieren, dann wird von  $Z_r$  die  $z$ -Achse und der Einheitskreis durch die sphärisch gemessene Strecke  $\varphi = \pi/m$  je in sich gedreht, und von  $Z_r''$  durch die Strecke  $\mu\varphi$ . Der Nullpunkt  $G_0$  geht

durch die Bewegung der Reihe nach in die  $2m$  Punkte  $G_0, G_1, G_2, \dots, G_{2m-1}$  über, durch die die  $z$ -Achse in  $2m$  sphärisch gleichlange Strecken geteilt wird. Der normale Diskontinuitätsbereich des Nullpunktes wird durch alle

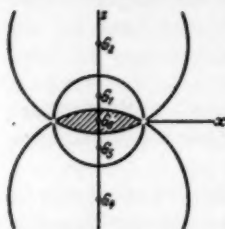


Fig. 6.

Symmetriekugeln (sphärische Symmetrieebenen) von  $G_0$  einerseits und  $G_1$  bzw.  $G_2, G_3, \dots$  andererseits begrenzt. Sie alle gehen durch den Einheitskreis. Zum Rande des Diskontinuitätsbereiches  $G_0$  liefern daher nur die beiden nächsten Symmetriekugeln eine Kalotte; sie liegen symmetrisch zur  $xy$ -Ebene und schneiden einander unter dem Drehwinkel  $\varphi$ . Sie schließen einen *Linzenraum*<sup>25)</sup> ein. Fig. 6 stellt ihn im Schnitt mit der  $xz$ -Ebene schraffiert dar ( $m=3$ , zweistufig). Die obere und untere Grenzfläche der

Linse sind einander durch eine sphärische Schraubung längs der  $z$ -Achse zugeordnet (§ 7). Die Kante der Linse ist in  $2m$  äquivalente Strecken eingeteilt; diese machen einen einzigen Kantenzyklus aus und entsprechen einer geschlossenen, von einem Punkte  $I$  ausgehenden Kurve des Linzenraumes  $M$ , welche erst  $2m$ -mal durchlaufen ein Elementarflächenstück begrenzt, nämlich die *Linsekalotte*. Die numerischen Invarianten sind

$(0, 0; 2m; -)$ . Die Bezeichnung Torsionskoeffizient der Dimension 1 erweist sich an diesem Beispiel besonders treffend: der Raum ist um die  $z$ -Achse, die Schraubachse von  $Z_r$  (§ 7 S. 39), durch den Winkel  $\varphi = \frac{2\pi}{2m}$  tordiert, die Grenzflächenzuordnung erfolgt durch eine Schraubung längs der  $z$ -Achse.

— Die nur bei ungeradem  $m$  vorhandene einstufig in  $\mathfrak{R}$  abgebildete  $R_1$ -Gruppe unterscheidet sich nicht wesentlich von einer zwei-

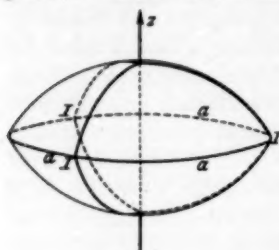


Fig. 7.

stufigen; bei ungeradem  $m$  tritt die Diametralpunktvertauschung nicht in der einstufigen  $R_1$ -Gruppe auf, die von der Rechtsschraubung durch  $\varphi = \frac{2\pi}{m}$  erzeugt wird. Auch hier ist der Torsionskoeffizient gleich der Ordnung der  $R_1$ -Gruppe, nämlich  $-m$ . Die Fig. 7 zeigt den Fall  $m=3$ .

Im projektiven Raum gibt es nur eine von der Identität verschiedene Wegeklasse, die der projektiven Geraden. Jede mit einem Richtungssinn versehene projektive Gerade läßt sich daher stetig, sogar mit Festhaltung eines Punktes ( $F_0$ ) in die mit dem entgegengesetzten Richtungssinn versehene deformieren, ist eine *amphidrome Kurve*<sup>26)</sup>. Dies ist z. B. in einem

<sup>25)</sup> Nach H. Tietze, loc. cit. <sup>26)</sup> § 20, mit  $(m, 1)$  zu bezeichnen.

<sup>26)</sup> M. Dehn, Unendliche diskontinuierliche Gruppen, Math. Annalen 71 (1911), S. 129.



Linsenraum mit der Fundamentalgruppe der Ordnung 3 nicht mehr der Fall. Die erst dreimal durchlaufen begrenzende Kurve  $a^{+1}$  läßt sich nicht stetig in die entgegengesetzt gerichtete  $a^{-1}$  deformieren, auch ohne Festhaltung eines Punktes nicht, weil kein Element der Fundamentalgruppe seinem reziproken ähnlich ist, jedes Element vielmehr eine Homotopieklasse für sich bildet (§ 9 S. 50). Dieser Linsenraum enthält also außer den nullhomotopen (auf einen Punkt stetig zusammenziehbaren) keine amphidromen Kurven.

Um die Diskontinuitätsbereiche der übrigen Drehgruppen zu ermitteln, muß die in § 3 entwickelte Theorie der Drehungen herangezogen werden. Liegt etwa die Rechtsdrehgruppe vor, die sich in die Oktaedergruppe  $\mathfrak{H}$  — nach § 5 notwendig zweistufig — abbildet, also die binäre Oktaedergruppe, so behaupten wir, gehen die Schraubachsen der einzelnen Rechtsdrehungen im  $K_3$  vom Anfangspunkt nach den Ecken, Flächenmitten und Kantenmitten eines Oktaeders, das seinen Mittelpunkt im Anfangspunkt hat. Denn wählen wir zum Zentrum der stereographischen Projektion den einen Durchstoßungspunkt des ausgezeichneten Vektors  $e$  mit der Hypersphäre, so fällt der ausgezeichnete  $R_3$  mit dem euklidischen Bildraum der stereographischen Projektion zusammen. Eine Rechtsdrehung  $G_r$  des  $R_3$  bildet sich in eine starre Drehung  $G_r$  des ausgezeichneten  $R_3$  ab. Die Achse von  $G_r$  ist der Schnitt der durch den Vektor  $e$  geschickten Kongruenzebene von  $G_r$  mit dem ausgezeichneten  $R_3$ . Andererseits wird der Schnitt derselben Kongruenzebene mit der Hypersphäre stereographisch in einen Bahnkreis des euklidischen Bildraumes (oder des  $K_3$ ) projiziert. Diese Projektion geschieht durch die Kongruenzebene selbst, da sie durch das Projektionszentrum geht. Der Bahnkreis ist also der Schnitt der Kongruenzebene mit dem euklidischen Bildraum und fällt daher mit der Drehachse von  $G_r$  zusammen. Die Paargruppe des ausgezeichneten  $R_3$  besteht nun aus den Drehungen der Oktaedergruppe (rechte Anteile), die immer mit  $L = E$  gepaart sind, also fallen die Schraubachsen der Rechtsdrehungen mit den Achsen der Oktaederdrehungen zusammen. — Liegt nicht gerade eine Drehgruppe vor, sondern ist etwa  $\mathfrak{L}$  die Tetraedergruppe, so kann man durch geeignete Wahl des ausgezeichneten Vektors  $e$  das Tetraeder gegen das Oktaeder beliebig in dem immer zu  $e$  senkrechten ausgezeichneten  $R_3$  lagern (§ 3 S. 12), also auch durch entsprechende Wahl des Projektionszentrums (Durchstoßungspunkt von  $e$  mit der Hypersphäre!) das System der Schraubachsen von  $\mathfrak{L}$  (Tetraederachsen) gegen das der Schraubachsen von  $\mathfrak{H}$  (Oktaederachsen). So kann man z. B. die dreizähligen Drehachsen von Tetraeder und Oktaeder (im  $K_3$  Schraubachsen der Periode 6) zusammenfallen lassen. Diese Wahlfreiheit in der gegenseitigen Lagerung der Rechts- und Linksschraubachsen ermöglicht es überhaupt erst, sich von



den Diskontinuitätsbereichen verwickelterer Bewegungsgruppen (Rechtecksgruppen) ein Bild zu machen.

Das dargelegte Verfahren erproben wir zunächst an der Diederdrehgruppe.

### *Priemäräume.*

¶ Diedergruppe der Ordnung  $m = 2m'$ ,  $\mathfrak{Z} = E$ ;

§ binäre Diedergruppe.

Die Hauptachse des Dieders legen wir in die  $z$ -Achse des euklidischen Bildraumes. Auf ihr liegen  $2m'$  sphärisch äquidistante, zum Nullpunkt äquivalente Punkte. Auf jeder der  $m'$  Nebenachsen (Viererschraubachsen) befinden sich 4 zum Nullpunkt äquivalente Punkte: der Nullpunkt, der Punkt  $\infty$  und die beiden Diametralpunkte der Einheitskugel; der sphärisch gemessene Abstand zweier benachbarter dieser Punkte ist  $\pi/2$ . Der normale Diskontinuitätsbereich des Nullpunktes wird daher zunächst von  $2m' = m$  Symmetriekugeln — *Viersymmetriekugeln* — begrenzt, die die auf den  $m'$  Nebenachsen liegenden Radien der Einheitskugel sphärisch halbieren; sie schließen einen spindelförmigen Raum ein, der von  $2m'$  Zweiecken

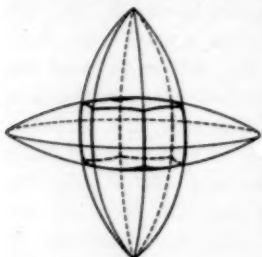


Fig. 8.

berandet wird. Die beiden Spindelspitzen sind die Durchstoßungspunkte der  $z$ -Achse mit der Einheitskugel. Hiervon schneiden die beiden Symmetriekugeln des Nullpunktes und der zwei nächsten äquivalenten Punkte der  $z$ -Achse die Spitzen ab; Fig. 8 gibt den Fall  $m' = 3$  wieder. Der normale Diskontinuitätsbereich ist daher ein  $m = 2m'$ -seitiges Prisma. Boden und Dach des Prismas (regelmäßige sphärische  $m$ -Ecke) sind vermöge einer Rechtsschraubung durch den Winkel  $2\pi/m = \pi/m'$  zugeordnet, gegenüber-

liegende Seitenflächen (sphärische Quadrate) vermöge einer Schraubung durch den Winkel  $\pi/2$ . Die  $2m = 4m'$  zum Nullpunkt äquivalenten Punkte verteilen sich zu je  $m$  auf die  $z$ -Achse und den Einheitskreis. Man kann sich hiernach ein Bild davon machen, wie der konforme Raum von den Prismen ausgefüllt wird. — Falls die Diedergruppe die Vierergruppe ( $m' = 2$ ) ist, ist die binäre Diedergruppe die Quaternionengruppe, die somit als Bewegungsgruppe der Hypersphäre oder des  $K_4$  erscheint. Der Diskontinuitätsbereich ist ein sphärischer Würfel, dessen Gegenseiten durch  $\pi/2$  verschraubt einander zugeordnet sind. Der konforme Raum wird in 8 solche Würfel regelmäßig geteilt. Die Würfel stoßen in 16 Ecken zusammen, deren Umgebungsmannigfaltigkeiten Tetraeder sind.

Die Konfiguration ist die Projektion des regelmäßigen 8-Zells<sup>29)</sup>, der einen der 6 regelmäßigen Zellteilungen der Hypersphäre. In diesem Falle sind Haupt- und Nebenachsen nicht mehr voneinander zu unterscheiden; es sind drei wechselseitig senkrechte Viererschraubachsen. Faßt man die Quaternionengruppe als Gruppe der Einheiten der Quaternionen auf und bezeichnet dementsprechend ihre Elemente mit  $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ , so wird das einzige Element der Ordnung 2, die  $-1$ , von der Diametralpunktvertauschung dargestellt, die Elemente  $i, j, k$  sind Schraubungen um die drei Viererschraubachsen<sup>30)</sup>. — Die Torsionskoeffizienten der binären Diedergruppe ergeben sich nach § 9 als die von 1 verschiedenen invarianten Faktoren der Matrix der folgenden Tafel; die benutzten Relationen sind dem § 6 S. 26 entnommen. Wenn  $m'$  gerade ist, gibt es zwei Torsionskoeffizienten vom Werte 2,  $c_1 = c_2 = 2$ , im andern Falle einen vom Werte 4,  $c_1 = 4$ . Die numerischen Invarianten sind also  $(0, 0; 2, 2; -)$  oder  $(0, 0; 4; -)$ . Zu allen Fundamentalgruppen mit geradem  $m'$  und zu allen mit ungeradem gehören also dieselben numerischen Invarianten.

	$D, D', D'', S$
$D_r^{m'} S$	$m' \ 0 \ 0 \ 1$
$D_r'^2 S$	$0 \ 2 \ 0 \ 1$
$D_r''^2 S$	$0 \ 0 \ 2 \ 1$
$D_r' D_r' D_r$	$1 \ 1 \ 1 \ 0$
$S^2$	$0 \ 0 \ 0 \ 2$

#### Oktaederraum.

⊠ Tetraedergruppe, 2 = E; ⊙ binäre Tetraedergruppe.

Die 3 Zweierachsen (Querlinien) des Tetraeders lassen wir mit den Koordinatenachsen des euklidischen Bildraumes zusammenfallen. Dann gehen die 4 Dreierachsen durch die 8 Punkte  $(x, y, z) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . In die Elemente der Ordnung 3 der Tetraedergruppe bilden sich  $R_3$ -Drehungen ab, deren stereographische Bilder Rechtsschraubungen von der Periode 6 längs der 4 Tetraederdreierachsen sind; die Tetraederachsen werden dadurch zu Sechsserschraubachsen der konformen Bewegungen des euklidischen Bildraumes. Auf jeder Sechsserschraubachse liegen daher 6 sphärisch äquidistante äquivalente Punkte. Zwischen dem Nullpunkt und seinen beiden nächsten äquivalenten Punkten auf einer Sechsserschraubachse verläuft je eine Symmetriekugel — *Sechssymmetriekugel*; beide schließen den normalen Diskontinuitätsbereich in ihren gemeinsamen Linsenraum ein,

<sup>29)</sup> Vgl. E. Steinitz, Polyeder und Raumeinteilungen, Enc. math. Wiss. III, A B 12 (1916), S. 126; P. H. Schoute, Mehrdim. Geom. II, Leipzig 1905, S. 196.

<sup>30)</sup> Herrn B. L. van der Waerden war nach mündlicher Mitteilung dieser geschlossene Raum schon früher als der Raum der nichtorientierten Linienelemente der reellen projektiven Ebene bekannt. Vgl. hierzu eine demnächst im Jahresber. d. D. Math. Ver. erscheinende Aufgabe.

während die Symmetriekugeln zwischen dem Nullpunkt und den auf den Sechsserschraubachsen weiter entfernt liegenden äquivalenten Punkten keinen Beitrag zur Berandung des Diskontinuitätsbereiches liefern, weil sie durch denselben Hauptkreis der Einheitskugel, die Linsenkannte, gehen und also die ganze Linse in ihrem Innern enthalten. Den 4 Sechsserschraubachsen entsprechend gibt es 8 dem Nullpunkt nächste Sechssymmetriekugeln, die ein von sphärischen Dreiecken berandetes Oktaeder umgrenzen. Dies Oktaeder ist bereits der normale Diskontinuitätsbereich. Denn die Symmetriekugeln zwischen dem Nullpunkt und den jeweils nächsten äquivalenten Punkten auf den Vierserschraubachsen (Querlinien des Tetraeders) schneiden von dem Oktaeder nichts mehr ab, sondern gehen gerade durch seine Ecken,

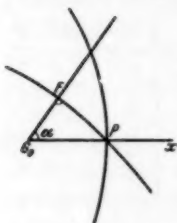


Fig. 9.

wie folgende elementare Rechnung zeigt: Der sphärische Abstand  $G_0P$  eines Oktaedereckpunktes  $P$  vom Nullpunkt  $G_0$  ist Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, das zum dritten Eckpunkt  $F$  den Mittelpunkt einer sphärischen Seitenfläche des Oktaeders hat.  $F$  ist der nächste Punkt einer Sechssymmetriekugel, also  $G_0F = \pi/6$ .  $\angle PG_0F = \alpha$  ist der Winkel zwischen einer dreizähligen und einer vierzähligen Achse des Oktaeders, also  $\cos \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ . Daher gilt für die Hypotenuse:  $\tan G_0P = \tan G_0F : \cos \alpha = 1$ , also hat der Eckpunkt

des Oktaeders die Nullpunktsentfernung  $\pi/4$ . Aus Symmetriegründen liegt er auf einer Koordinatenachse. Der dem Nullpunkt nächste Punkt einer Viersymmetriekugel liegt bei der angenommenen Lage des Tetraeders ebenfalls auf einer Koordinatenachse, welche eine Vierserschraubachse ist, und seine Nullpunktsentfernung ist daher ebenfalls  $\pi/4$ . Er fällt deshalb mit dem Oktaedereckpunkt zusammen, und die Viersymmetriekugel schneidet nichts vom Oktaeder ab. — Der Diskontinuitätsbereich der binären Tetraederdrehgruppe wird somit erhalten, indem man die gegenüberliegenden Seitenflächen eines Oktaeders, um  $\pi/3$  gegeneinander verschraubt, mit einander identifiziert. Die Hypersphäre oder der konforme Bildraum  $K_3$  wird im ganzen in 24 solche Oktaeder zerlegt. 24 ist die Ordnung der binären Tetraedergruppe, die zugleich Fundamentalgruppe des so erhaltenen geschlossenen dreidimensionalen Raumes  $M$  ist (§ 8). Die Teilung der Hypersphäre bzw. des  $K_3$  ist das selbstreziproke 24-Zell.

Wir wollen die numerischen Invarianten des Oktaederraumes zur Abwechslung nicht aus der Fundamentalgruppe, sondern aus den Inzidenzmatrizen bestimmen. — Bei der Zuordnung von Gegenseitenflächen des Oktaeders zeigt sich, daß der Diskontinuitätsbereich ein Zellsystem von  $\alpha_0 = 1$  Punkten,  $\alpha_1 = 4$  Kanten,  $\alpha_2 = 4$  Flächen,  $\alpha_3 = 1$  räumlichen Zellen ist. In Fig. 10 ist das Netz eines Oktaeders in stereographischer Projektion

mit Bezeichnung der Punkte, Kanten und Flächen angegeben; der unendlich ferne Punkt der konformen Ebene ist der Eckpunkt I; das umschlossene Raumstück mag  $A$  heißen. Die Inzidenzmatrizen sind:

$$E_1: \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array};$$

$$E_2: \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}; \quad E_3: \begin{array}{c|c} & A \\ \hline 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{array}.$$

Bezeichnet  $\gamma_i$  den Rang von  $E_i$ , so ist allgemein

$$p_i = \alpha_i - \gamma_i - \gamma_{i+1}$$

die Bettische Zahl der Dimension  $i$ . Bezeichnet  $c_1$  den einzigen von 1 verschiedenen Elementarteiler von  $E_2$ , den Torsionskoeffizienten der Dimension 1, so ergeben sich die Werte der numerischen Invarianten aus nebenstehender Tafel zu  $(0, 0; 3; -)$ . Es stimmen hiernach die numerischen Invarianten, aber nicht die Fundamentalgruppe mit denen der einstufigen zyklischen Gruppe  $m = 3$  überein, deren Diskontinuitätsbereich in Fig. 7 gezeichnet ist.

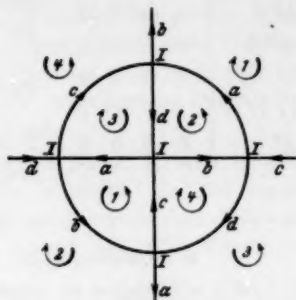


Fig. 10.

$i$	0	1	2	3
$\alpha_i$	1	4	4	1
$\gamma_i$		0	4	0
$p_i$		0	0	
$c_1$		3	—	

### Abgestumpfter Würfelraum.

$\mathfrak{K}$  Oktaedergruppe,  $\mathfrak{L} = E$ ;  $\mathfrak{G}$  binäre Oktaedergruppe.

Behandelt man nach dem eben durchgeführten Vorbild der binären Tetraedergruppe die binäre Oktaedergruppe, so ergibt sich als normaler Diskontinuitätsbereich ein an den Ecken so weit abgestumpfter Würfel des dreidimensionalen sphärischen Raumes  $K_3$ , daß die quadratischen Seitenflächen regelmäßige Achtecke werden. Der Körper wird von 8 Dreiecken begrenzt, die, längs der Würfeldiagonalen (Sechschraubachsen) um  $\pi/3$  gegeneinander verschraubt, auf einander bezogen sind, und von 6 Achtecken, die paarweise, um  $\pi/4$  verschraubt, identifiziert werden. Die Anzahl der einzelnen Zellen ist

$$\begin{array}{cccc} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 6 & 12 & 7 & 1, \end{array}$$

so daß wie in allen Zellsystemen geschlossener dreidimensionaler Räume  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$ .

Die Torsionskoeffizienten berechnen wir aus der Fundamentalgruppe

	$O$	$O'$	$O''$	$S$
$O^4 S$	4	0	0	1
$O'^2 S$	0	2	0	1
$O''^2 S$	0	0	3	1
$O' O' O$	1	1	1	0
$S^2$	0	0	0	2

(binäre Oktaedergruppe § 6 S. 26) als invariante Faktoren der Matrix nebenstehender Tafel. Es gibt danach einen einzigen Torsionskoeffizienten  $c_1$  des Wertes 2. Die numerischen Invarianten  $(0, 0; 2; -)$  stimmen mit denen des projektiven Raumes überein.

Die Hypersphäre oder der  $K_3$  wird in  $2 \cdot 24 = 48$  abgestumpfte Würfel geteilt. Die reziproke Teilung besteht aus 288 Tetraedern.

### Dodekaederraum.

$\mathfrak{K}$  Ikosaedergruppe,  $\mathfrak{Z} = E$ ;  $\mathfrak{G}$  binäre Ikosaedergruppe.

Wir wiederholen an dieser Stelle den Gedankengang, der zum Dodekaederraum führt. Die Paargruppe  $\mathfrak{G}$  von starren Drehungen des ausgezeichneten  $R_3$  (§ 3) besteht aus den Paaren  $(R, E)$ , worin  $R$  die Drehungen der Ikosaedergruppe durchläuft. In diese Paargruppe bildet sich — notwendig zweistufig nach § 5 — eine Rechtsdrehgruppe des  $R_4$  (§ 4), d. i. eine Gruppe von Rechtsdrehungen (§ 2) der Hypersphäre ab, die binäre Ikosaedergruppe — Relationen § 6 S. 26. Durch stereographische Projektion der Hypersphäre in den euklidischen Bildraum (oder den durch Schließung der reellen Punkte dieses Bildraumes entstandenen konformen Raum  $K_3$ ) geht die Rechtsdrehgruppe in eine Gruppe konformer Abbildungen des Bildraumes über (§ 7). In ein Element  $R$  der Ordnung 5 der Ikosaedergruppe bildet sich eine Rechtsdrehung der Ordnung 10 ab, die sich im  $K_3$  als eine Schraubung der Ordnung 10 darstellt. Unter den Bahnkreisen dieser Schraubung befindet sich ein durch den Nullpunkt gehender, die Schraubachse. Die 6 Zehnerschraubachsen liegen im  $K_3$  wie die 6 fünfzähligen Drehachsen eines Ikosaeders gegeneinander (§ 11 S. 59). Der normale Diskontinuitätsbereich des Nullpunktes wird daher zunächst von 12 Symmetriekugeln (Zehnersymmetriekugeln) eingeschlossen, die ein Dodekaeder begrenzen. Die Seitenflächen des Dodekaeders sind Kalotten von Diametralkugeln der Einheitskugel, nämlich von sphärischen Geraden begrenzte Polygone der sphärischen Geometrie. Gegenüberliegende Seitenflächen sind einander durch Schraubungen um  $\pi/5$  zugeordnet — die sphärische Ganghöhe aller Schraubungen ist 1. In diesem Dodekaeder besitzen wir nun schon den vollständigen Diskontinuitätsbereich. Denn den Elementen der Ordnungen 2 und 3 entsprechen Schraubungen durch die Winkel  $\pi/2$  und  $\pi/3$  längs der betreffenden Achsen im  $K_3$ . Die zugehörigen Symmetriekugeln schneiden aber von dem Dodekaeder nichts mehr ab, sondern enthalten es ganz in ihrem Innern, wie folgende Rechnung für die Schraubungen der Ordnung 6 beweist.

Der sphärische Abstand eines dem Nullpunkt  $G_0$  nächsten Punktes der Zehnersymmetriekugeln vom Nullpunkt beträgt  $\pi/10$ . Der Abstand  $\alpha$  eines Dodekaedereckpunktes vom Nullpunkt berechnet sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck, das vom Nullpunkt, vom Eckpunkt und einem benachbarten sphärischen Flächenmittelpunkt des Dodekaeders gebildet wird. Man erhält  $\cot \alpha = \frac{1}{3}(2 + \sqrt{5})\sqrt{3}$ . Der nächste Punkt einer Sechssymmetriekugel hat aber den sphärischen Nullpunktsabstand  $\pi/6$ . Nun ist  $\cot \alpha > \cot \pi/6 = \sqrt{3}$ , also ist  $\alpha < \pi/6$ . — Erst recht liegt das Dodekaeder dann ganz im Innern jeder Viersymmetriekugel.

Die ganze Hypersphäre oder der konforme Raum  $K_3$  wird in 120 solche dodekaedrische Diskontinuitätsbereiche eingeteilt, die das regelmäßige 120-Zell, eines der sechs vierdimensionalen platonischen Polytope zusammensetzen; die reziproke Zellteilung besteht aus 600 Tetraedern (600-Zell).

Die Fundamentalgruppe ist die binäre Ikosaedergruppe. Aus ihren wesentlichen Relationen bestimmen sich die Torsionskoeffizienten der Dimension 1 als die von 1 verschiedenen invarianten Faktoren der Matrix nebenstehender Tafel. Es zeigt sich, daß kein Torsionskoeffizient vorhanden ist. Hierdurch gewinnt der Dodekaederraum seine besondere Bedeutung, denn er hat nunmehr dieselben numerischen Invarianten wie die Hypersphäre, nämlich  $(0, 0; -, -)$ , d. h. die Bettischen Zahlen  $p_1$  und  $p_2$  verschwinden, es sind keine Torsionskoeffizienten der Dimension 1 vorhanden und auch der Torsionskoeffizient 2 der Dimension 2 fehlt, der Raum ist also wie alle die hier bestimmten Räume orientierbar. Ein solcher Raum heißt ein *Poincaréscher Raum*, da an ihm H. Poincaré erkannte, daß die numerischen Invarianten den Raum nicht vollständig topologisch bestimmen. — Die Beziehung dieses Poincaréschen Raumes zu dem von Poincaré selbst gefundenen bedarf einer besonderen Untersuchung (§ 12).

	$J$	$J'$	$J''$	$S$
$J^5 S$	5	0	0	1
$J'^2 S$	0	2	0	1
$J''^3 S$	0	0	3	1
$J'' J' J$	1	1	1	0
$S^3$	0	0	0	2

Wir stellen die Fundamentalgruppen und die numerischen Invarianten der Diskontinuitätsbereiche der Drehgruppen noch einmal zusammen:

#### *Linsenräume.* Zyklische Gruppen

zweistufig  $(0, 0; 2m; -)$ ,

einstufig (bei ungeradem  $m$ )  $(0, 0; m; -)$ .

#### *Prismaräume.* Binäre Diedergruppen der Ordnung $4m'$

$m'$  ungerade  $(0, 0; 4; -)$ ,

$m'$  gerade  $(0, 0; 2, 2; -)$ .

**Oktaederraum.** Binäre Tetraedergruppe

$$(0, 0; 3; -).$$

**Abgestumpfter Würfelraum.** Binäre Oktaedergruppe

$$(0, 0; 2; -).$$

**Dodekaederraum.** Binäre Ikosaedergruppe

$$(0, 0; -; -).$$

Erzeugende und wesentliche Relationen der Gruppen in § 6 S. 26. Bezeichnung nach § 9 S. 45.

## § 12.

### Dodekaederraum.

Von Poincaréschen Räumen mit endlicher Fundamentalgruppe sind uns zwei bekannt. Ihre Fundamentalgruppen stimmen mit denen des Dodekaederraumes überein. Wir wissen nicht, ob die beiden Räume untereinander und mit dem Dodekaederraum homöomorph sind<sup>21)</sup>. Dagegen gibt es außer

der Fundamentalgruppe noch eine andere Eigenschaft, die Poincarés Poincaréscher Raum mit dem Dodekaederraum gemein hat, nämlich die Zerlegbarkeit in zwei Doppelringe.

Wir benennen die Kanten und Flächenstücke des Diskontinuitätsbereiches, der uns den Dodekaederraum liefert, wie in der Fig. 11 (schematisches Netz der Dodekaederfläche) angegeben ist, und schreiben die wesentlichen Relationen an, die man aus den Kantenumläufen gewinnt. Wir sind dann nach § 10 sicher, daß die von den  $\alpha_2 = 6$  Erzeugenden  $C_1, \dots, C_6$

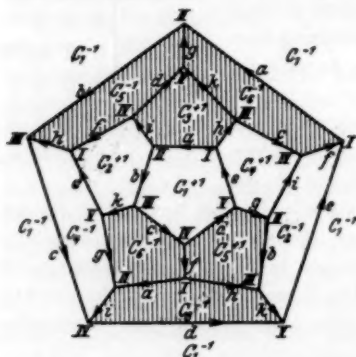


Fig. 11.

und den  $\alpha_1 = 10$  (den Kanten  $a$ ), ...,  $k$ ) entsprechenden wesentlichen Relationen definierte Gruppe mit der binären Ikosaedergruppe (§ 6, S. 26)

<sup>21)</sup> Zusatz während der Korrektur: Herr H. Kneser hat in seinem Vortrag: Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten (Jahresber. d. D. Math. Ver. 38 (1929), S. 256, Fußnote) den Dodekaederraum erwähnt. Er hat uns eine gemeinsame Unterteilung des Außenraumes der Kleeblattschlinge und des längs einer Kurve  $C_1$  ausgebohrten Dodekaederraumes angegeben und damit die Übereinstimmung des Dodekaederraumes mit M. Dehns Poincaréschem Raum bewiesen.



übereinstimmt. Die Kantenzyklen liefern:

$$(1) \quad \begin{cases} a) C_1^{+1} C_8^{-1} C_3^{-1} = 1, & f) C_6^{+1} C_3^{+1} C_8^{-1} = 1, \\ b) C_1^{+1} C_5^{-1} C_3^{-1} = 1, & g) C_4^{+1} C_6^{+1} C_5^{-1} = 1, \\ c) C_1^{+1} C_4^{-1} C_6^{-1} = 1, & h) C_3^{+1} C_5^{+1} C_4^{-1} = 1, \\ d) C_1^{+1} C_5^{-1} C_3^{-1} = 1, & i) C_3^{+1} C_4^{+1} C_5^{-1} = 1, \\ e) C_1^{+1} C_3^{-1} C_4^{-1} = 1, & k) C_6^{+1} C_3^{+1} C_5^{-1} = 1. \end{cases}$$

Um  $C_1, \dots, C_4$  zu eliminieren, hat man:

$$\begin{aligned} g) C_4 &= C_5 C_6^{-1}, \\ h) C_3 &= C_5 C_6^{-1} C_5^{-1}, \\ i) C_3 &= C_5 C_6^{-1} C_5^{-1} C_6 C_5^{-1}, \\ e) C_1 &= C_6 C_5 C_6^{-1}. \end{aligned}$$

Diese Werte werden in a), b), d), e), f), k) eingetragen; es fällt b) und k) fort, weil mit a) übereinstimmend, f), weil mit d)<sup>-1</sup> übereinstimmend, und es bleiben

$$\begin{aligned} a) C_5 C_5 C_6^{-2} C_5 C_5 C_5^{-1} &= 1, \\ d) C_6 C_5 C_6^{-1} C_5 C_6 C_5^{-2} &= 1, \\ e) C_6 C_5 C_6^{-1} C_5 C_6^{-1} C_5 C_6 C_5^{-1} C_6 C_5^{-1} &= 1. \end{aligned}$$

e) ist eine Folge von a) und d); man gewinnt nämlich aus a) durch zyklische Vertauschung

$$a') C_5 C_5 C_6^{-1} C_5 C_5 C_6^{-2} = 1,$$

und es ist a')  $\times$  d) gleich dem zyklisch vertauschten e). Die übriggebliebenen Relationen a) und d) werden umgeformt. Nach a) ist  $C_5 C_5 C_5^{-1} = C_6^2 C_5^{-1} C_6^{-1}$ . In d) eingesetzt gibt das eine Relation (II), zu der wir a) als (I) hinzunehmen:

$$(I) \quad C_5 C_5 C_6^{-2} C_5 C_5 C_5^{-1} = 1,$$

$$(II) \quad C_5 C_5 C_5 C_5^{-1} C_6^{-1} C_5^{-1} = 1.$$

Führt man als neue Erzeugende  $U$  und  $V$  vermöge  $C_5 = V$ ,  $C_6 = V^{-1} U^{-1}$  ein, so geht (I) nach zyklischer Vertauschung über in

$$(I') \quad V^{-2} U^{-1} V U V U V U^{-1} = 1,$$

und (II) in

$$(2) \quad V^{-1} U^{-2} V^{-1} U = 1.$$

(2), zyklisch vertauscht, wird zu

$$(II') \quad U V^{-1} U^{-2} V^{-1} = 1;$$

dies an (I') rechts angesetzt gibt nach zyklischer Vertauschung

$$V^{-3}U^{-1}VUVU^{-1} = 1.$$

(II') noch einmal rechts angesetzt liefert schließlich

$$V^{-4}U^{-1}VU^{-1} = 1.$$

Die Reziproke der letzten Relation ist

$$(3) \quad V^4UV^{-1}U = 1.$$

Die mit dem System (1) gleichwertigen Relationen (2) und (3) stimmen mit den gleichnumerierte Relationen Poincarés überein<sup>32)</sup>, wenn man in diesen die Bezeichnungsänderung  $C_3 \rightarrow V$ ,  $C_4 \rightarrow U$  vornimmt und von der additiven zur multiplikativen Schreibung übergeht. Damit ist die Übereinstimmung der Fundamentalgruppen bewiesen.

Die Gruppe des von M. Dehn entdeckten Poincaréschen Raumes von endlicher Fundamentalgruppe<sup>33)</sup> hat vier Erzeugende mit den Relationen

$$c_1c_4^{-1}c_2 = c_2c_4^{-1}c_3 = c_3c_4^{-1}c_1 = c_1c_2c_3c_4^{-3} = 1.$$

Man eliminiere  $c_4 = c_2c_1$  und darauf  $c_1 = c_2c_3c_4^{-1}$ . Es bleiben übrig

$$(I) \quad c_2c_3c_2^{-2}c_3c_3c_3^{-1} = 1,$$

$$(II) \quad c_3c_2c_3c_3^{-1}c_2^{-1}c_3^{-1} = 1.$$

Diese Relationen gehen durch die Bezeichnungsänderung  $c_2 \rightarrow C_2$ ,  $c_3 \rightarrow C_3$  in die oben aus (1) abgeleiteten Relationen (I) und (II) über. Daher ist auch die Dehnsche Fundamentalgruppe gleich der des Dodekaederraumes, also nicht eine Erweiterung der Ikosaedergruppe durch Spiegelungen, sondern die binäre Ikosaedergruppe.

Wohl die einfachsten Relationen zur Bestimmung der binären Ikosaedergruppe<sup>34)</sup> sind die folgenden vier zwischen drei Erzeugenden  $A, B, C$ :

$$A^5 = B^3 = C^3 = ABC.$$

Poincaré gewinnt seinen Poincaréschen Raum durch Identifizieren (Aufeinanderkleben) der Oberflächen zweier Doppelringe<sup>35)</sup>. Die gleiche Erzeugung läßt der Dodekaederraum zu. Zum Beweise ziehen wir in den Diskontinuitätsbereich zwei Elementarflächenstücke  $H$  und  $H'$  ein, deren Ränder auf der Oberfläche des Dodekaeders die Fünfecke  $C_1^{+1}, C_1^{-1}, C_2^{+1}, C_2^{-1}, C_4^{+1}, C_4^{-1}$  von den übrigen, die in Fig. 11 schraffiert sind, trennen.

<sup>32)</sup> H. Poincaré, Cinquième compl. à l'an. sit., Palermo Rendiconti 18 (1904), S. 109.

<sup>33)</sup> M. Dehn, Topologie des dreidim. Raumes, Math. Annalen 69 (1910), S. 160.

<sup>34)</sup> Jahresber. d. D. Math. Ver. 39 (1930), Aufg. 84.

<sup>35)</sup> Vgl. auch M. Dehn und P. Heegaard, Analysis situs. Eno. Math. Wiss. III, A B 8 S. 187.

Der Diskontinuitätsbereich zerfällt in drei Raumstücke. Wir zeigen, daß der mittlere Teil, der außer von  $H, H'$  von  $C_1^{-1}, C_1^{+1}, C_3^{+1}, C_3^{-1}, C_4^{+1}, C_4^{-1}$  begrenzt wird, durch Identifizierung von  $C_1^{+1}$  mit  $C_1^{-1}, C_3^{+1}$  mit  $C_3^{-1}, C_4^{+1}$  mit  $C_4^{-1}$  in einen Doppelring übergeht, dessen Oberfläche von  $H$  und  $H'$  gebildet wird. Gleiches gilt von dem Reststück, in dem  $C_3, C_3, C_3$  als innere Flächen liegen. — Die Oberfläche des mittleren Raumstückes ist wie die des Diskontinuitätsbereiches selbst eine Kugeloberfläche; sie wird uns durch die Fig. 11 dargestellt, wenn wir darin die beiden schraffierten Gebiete durch die eingespannten Elementarflächenstücke  $H$  und  $H'$  ersetzen. Nun kleben wir  $C_1^{+1}$  und  $C_1^{-1}$  aufeinander. Weil  $C_1^{+1}$  und  $C_1^{-1}$  getrennt liegende Elementarflächenstücke auf der Kugel sind, geht die Vollkugel dadurch in einen Vollring über, in dem  $C_1$  eine Meridianschnitt-

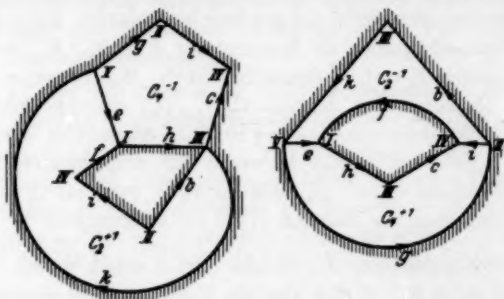


Fig. 12.

fläche ist. Die Oberfläche des Ringes wird von den jetzt zusammenstoßenden Elementarflächenstücken  $H$  und  $H'$  gebildet und überdies von  $C_3^{+1}, C_3^{-1}, C_4^{+1}, C_4^{-1}$ . In der Fig. 12 sind diese letzteren in der richtigen gegenseitigen Lage wiedergegeben. Während in Fig. 11 das Äußere ein zur Figur gehöriges Elementarflächenstück ausmacht und die Zeichenebene durch einen uneigentlichen Punkt zur konformen Ebene (Kugelfläche) geschlossen zu denken ist, gehört in Fig. 12 das schraffierte Äußere der Flächenstücke  $C_3^{+1}, C_4^{-1}$  und  $C_3^{-1}, C_4^{+1}$  nicht mit zur Figur. Vielmehr liegen die beiden von  $C_3^{+1}, C_4^{-1}$  und von  $C_3^{-1}, C_4^{+1}$  gebildeten Teile getrennt, im übrigen aber unbekannt auf der Ringfläche und sind von  $H$  und  $H'$  umgeben. Klebt man nun  $C_2^{+1}$  auf  $C_2^{-1}$ , so bildet sich dadurch ein neuer Henkel, das Innere wird zum Doppelring. Es grenzt auf diesem  $C_4^{+1}$  längs der Kante  $e$  an  $C_4^{-1}$ . Diese beiden Stücke können daher begezogen werden, ohne an den Zusammenhangsverhältnissen des von  $H$  und  $H'$  berandeten Doppelringes etwas zu ändern. — Einfacher gestaltet sich noch der Nachweis, daß auch die beiden äußeren Raumstücke des Dis-

kontinuitätsbereiches durch Zusammensetzen längs der Flächenstücke  $C_2, C_3, C_4$  sich zu einem von  $H$  und  $H'$  berandeten Doppelring schließen.

Die Tatsache, daß für den Dodekaederraum die Bettische Zahl erster Dimension  $p_1 = 0$  ist, während Torsionskoeffizienten fehlen, besagt geometrisch, daß jede geschlossene Kurve nullhomolog, d. h. Rand einer orientierbaren Fläche ist (§ 9, S. 50); gruppentheoretisch, daß die Fundamentalgruppe, die binäre Ikosaedergruppe, mit ihrer Kommutatorgruppe zusammenfällt, während die Homologiegruppe nur aus dem Einheitsselement besteht. Liegt irgendeine geschlossene Kurve  $k$  des Dodekaederraums vor, so kann man nach der orientierbaren Fläche von möglichst niedrigem Geschlecht fragen, die  $k$  zum Rande hat. Es soll hier nicht bewiesen werden, daß es für jede Kurve  $k$ , die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt, eine Ringfläche ist; das würde auf den Satz hinauslaufen, daß jedes Element der binären Ikosaedergruppe als Kommutator  $F_i F_k F_i^{-1} F_k^{-1}$  von zwei geeigneten Elementen  $F_i$  und  $F_k$  darstellbar ist<sup>86)</sup>. Wir begnügen uns damit, es von den fundamentalen Kurven  $C_1, \dots, C_6$ , die den Flächenstücken  $C_1^{+1}, \dots, C_6^{+1}$  des Dodekaeders nach § 10, S. 55 zugeordnet werden können, nachzuweisen. Natürlich genügt es wegen der gruppentheoretischen Ähnlichkeit der Elemente  $C_1, \dots, C_6$ , den Nachweis etwa für  $C_6$  zu erbringen. In der Tat kann man die Relation (I) S. 67 so schreiben:

$$C_5 = C_6 (C_4 C_5^{-1} C_6^{-1}) C_6^{-1} (C_4 C_5^{-1} C_6^{-1})^{-1} = C_6 C_1^{-1} C_6^{-1} C_1$$

wegen g) und c), S. 67.  $C_5$  ist also als Kommutator darstellbar und berandet somit eine Ringfläche, deren Rückkehrschnitte die Kurven  $C_1$  und  $C_6$  sind.

<sup>86)</sup> Den Beweis, daß jedes Element der gewöhnlichen und der binären Ikosaedergruppe Kommutator ist, hat während der Korrektur Herr Max Ziegler in Leipzig dadurch geführt, daß er die Elemente der binären Ikosaedergruppe auf 9 Klassen ähnlicher (= konjugierter) aufteilt und in jeder Klasse einen Kommutator angibt.

## Über eine $n$ -dimensionale Universalmenge im $R_{2n+1}$ .

Von

Georg Nöbeling in Wien.

Unter einem Raum verstehen wir im folgenden stets einen metrischen Raum, in dem eine abzählbare Teilmenge dicht liegt. Menger hat den folgenden Satz ausgesprochen<sup>1)</sup>:

**Satz 1.** *Für beliebiges  $n$  ist jeder  $n$ -dimensionale Raum mit einer Teilmenge des  $(2n+1)$ -dimensionalen Cartesischen  $R_{2n+1}$  homöomorph.*

Für  $n=0$  ist dies der Satz von Sierpiński<sup>2)</sup>, daß jeder im Sinne der Dimensionstheorie nulldimensionale Raum mit einer Teilmenge der Geraden homöomorph ist. Der Beweis des Satzes 1 wurde von Menger für  $n=1$  erbracht und für  $n \geq 2$  skizziert, aber nicht vollständig durchgeführt<sup>3)</sup>. Es ist der Zweck dieser Arbeit, den Satz 1 unabhängig von jener Beweis-skizze allgemein zu beweisen.

Wir werden mehr beweisen. Nach Menger heißt ein Raum ein  $n$ -dimensionaler Universalraum, wenn er selbst  $n$ -dimensional ist und zu jedem  $n$ -dimensionalen Raum eine homöomorphe Teilmenge enthält. Über die Existenz von Universalräumen behauptet Menger den<sup>4)</sup>

**Satz 2.** *Für jedes  $n$  gibt es einen  $n$ -dimensionalen Universalraum.*

Für  $n=0$  ist dies bewiesen durch den Satz von Sierpiński<sup>2)</sup>, daß das Cantorsche Diskontinuum ein nulldimensionaler Universalraum ist. Für  $n=1$  hat Menger einen eindimensionalen Universalraum im  $R_3$  konstruiert<sup>5)</sup>.

Wir wollen nun beweisen, daß die Menge aller derjenigen Punkte des  $R_{2n+1}$ , die höchstens  $n$  rationale Koordinaten haben, ein  $n$ -dimensionaler Universalraum ist. Damit werden Satz 1 und Satz 2 bewiesen sein.

\* \* \*

<sup>1)</sup> Menger, „Dimensionstheorie“, Teubner 1928, S. 295.

<sup>2)</sup> Sierpiński, Fund. Math. 2, S. 89.

<sup>3)</sup> Menger, „Dimensionstheorie“, S. 296 ff.

<sup>4)</sup> Menger, „Dimensionstheorie“ S. 315.

<sup>5)</sup> Menger, Proc. Acad. Amsterdam 20, S. 1125.

Zunächst behaupten wir den

Hilfssatz 1. Sind im  $k$ -dimensionalen Cartesischen Raum  $R_k$   $m$  nicht notwendig verschiedene Punkte

$$(x_1^\mu, \dots, x_k^\mu) \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

und eine Zahl  $\varepsilon > 0$  gegeben, so können wir  $m$  Punkte

$$(\bar{x}_1^\mu, \dots, \bar{x}_k^\mu) \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

so wählen, daß erstens

$$(1) \quad |x_n^\mu - \bar{x}_n^\mu| < \varepsilon \quad (n = 1, \dots, k; \mu = 1, \dots, m)$$

gilt, und zweitens der Rang jeder höchstens  $(k+1)$ -zeiligen Matrix

$$(2) \quad M = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x}_1^{\mu_1} & \dots & \bar{x}_k^{\mu_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \bar{x}_1^{\mu_h} & \dots & \bar{x}_k^{\mu_h} \end{vmatrix}$$

gleich der Anzahl  $h$  ihrer Zeilen ist.

Beweis. Nach einem bekannten Satz der Algebra<sup>6)</sup> kann man die Punkte

$$(\bar{x}_1^\mu, \dots, \bar{x}_k^\mu) \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

mit

$$|x_n^\mu - \bar{x}_n^\mu| < \varepsilon \quad (n = 1, \dots, k; \mu = 1, \dots, m)$$

so wählen, daß alle Determinanten der Matrizen  $M$  von Null verschieden sind. Diese Punkte haben die verlangten Eigenschaften.

\* \* \*

Besitzen  $n+1$  ( $n \geq 0$ ) Punkte  $(x_1^v, \dots, x_l^v)$  ( $v = 1, \dots, n+1$ ) des  $l$ -dimensionalen Cartesischen Raumes  $R_l$  die Eigenschaft, daß die Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & \dots & x_l^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^{n+1} & \dots & x_l^{n+1} \end{vmatrix}$$

den Rang  $n+1$  hat, so nennt man die Menge  $S$  aller Punkte  $(x_1, \dots, x_l)$  mit

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 x_1^1 + \dots + \lambda_{n+1} x_1^{n+1} \\ &\vdots \\ x_l &= \lambda_1 x_l^1 + \dots + \lambda_{n+1} x_l^{n+1} \\ 1 &= \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} \\ \lambda_1 &\geq 0, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

das von den Punkten  $(x_1^v, \dots, x_l^v)$  aufgespannte  $n$ -dimensionale Simplex. Jedes von  $i+1$  ( $i \leq n$ ) Punkten  $(x_1^{v_i}, \dots, x_l^{v_i}), \dots, (x_1^{v_{i+1}}, \dots, x_l^{v_{i+1}})$  aufgespannte Simplex heißt eine  $i$ -dimensionale Seite von  $S$ ; die Punkte  $(x_1^v, \dots, x_l^v)$  heißen auch Eckpunkte von  $S$ .

<sup>6)</sup> Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., 1 (1898), S. 147.

Sind endlich viele höchstens  $n$ -dimensionale Simplex  $S_1, \dots, S_j$  gegeben, von denen wenigstens eines genau  $n$ -dimensional ist, und von denen je zwei als Durchschnitt die leere Menge oder eine beiden gemeinsame Seite haben, so nennt man die Summe  $K = S_1 + \dots + S_j$  einen  $n$ -dimensionalen Komplex. Die Eckpunkte der Simplex  $S_i$  nennt man die Eckpunkte des Komplexes  $K$ .

Es sei im  $R$ , ein beliebiger  $n$ -dimensionaler Komplex  $K = S_1 + \dots + S_j$  mit den Eckpunkten  $(x_1^\mu, \dots, x_l^\mu)$  ( $\mu = 1, \dots, m$ ) gegeben, wobei jeder Eckpunkt nur einmal aufgeschrieben ist. Wir denken uns seine Darstellung  $S_1 + \dots + S_j$  so gewählt, daß zu jedem Simplex  $S_i$  auch alle seine Seiten unter den Simplexes  $S_1, \dots, S_j$  vorkommen. Ist  $p = (x_1, \dots, x_n)$  ein Punkt von  $K$ , so gibt es unter den  $S_1, \dots, S_j$  genau ein niedrigstdimensionales Simplex  $S_i$ , in dem  $p$  liegt. Sind die Punkte  $(x_1^{\mu_1}, \dots, x_{l_1}^{\mu_1}), \dots, (x_1^{\mu_s}, \dots, x_{l_s}^{\mu_s})$  die Ecken von  $S_i$ , so gilt

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 x_1^1 + \dots + \lambda_m x_1^m \\ &\vdots \\ x_l &= \lambda_1 x_l^1 + \dots + \lambda_m x_l^m \\ 1 &= \lambda_1 + \dots + \lambda_m \\ \lambda_{\mu_i} &> 0, \dots, \lambda_{\mu_i} > 0 \\ \lambda_\mu &= 0 \quad \text{für } \mu \neq \mu_1, \dots, \mu_i & (i \leq n+1), \\ \mu_1 &< \dots < \mu_i. \end{aligned}$$

Diese Darstellung des Punktes  $p$  wollen wir die ausgezeichnete Darstellung nennen. Die Parameter  $\lambda_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, m$ ) sind eindeutige, stetige Funktionen von  $p$ , und höchstens  $n+1$  von ihnen sind von Null verschieden.

Wir behaupten jetzt den

**Hilfssatz 2.** Ist im  $l$ -dimensionalen Cartesischen Raum  $R_l$  ( $l \geq 2n+1$ ) ein  $n$ -dimensionaler Komplex  $K$  und eine positive Zahl  $\varepsilon$  gegeben, so kann man  $K$  auf eine Teilmenge  $K'$  des  $(2n+1)$ -dimensionalen Cartesischen Raumes  $R_{2n+1}$  derart abbilden, daß, wenn  $p = (x_1, \dots, x_{2n+1}, \dots, x_l)$  ein Punkt aus  $K$ ,  $p' = (x'_1, \dots, x'_{2n+1})$  sein Bildpunkt in  $K'$  ist, die Beziehungen

$$(5) \quad |x_i - x'_i| < \varepsilon \quad (i = 1, \dots, 2n+1)$$

gelten.

**Beweis:** Es seien  $(x_1^\mu, \dots, x_n^\mu)$  ( $\mu = 1, \dots, m$ ) die Eckpunkte des Komplexes  $K$ , wobei jeder nur einmal aufgeschrieben ist. Neben jedem Punkte  $(x_1^\mu, \dots, x_n^\mu)$  betrachten wir den Punkt  $(x_1^\mu, \dots, x_{2n+1}^\mu)$  des  $R_{2n+1}$ , dessen Koordinaten mit den  $2n+1$  ersten Koordinaten des Punktes  $(x_1^\mu, \dots, x_n^\mu)$  übereinstimmen. Auf die  $m$  Punkte  $(x_1^\mu, \dots, x_{2n+1}^\mu)$  des  $R_{2n+1}$  wenden wir







Diese Menge  $U_n$  ist höchstens  $n$ -dimensional. Bedeutet nämlich  $V_r$  mit  $0 \leq r \leq n$  die Menge aller Punkte des  $R_{2n+1}$ , die genau  $r$  rationale Koordinaten haben, so ist  $U_n = V_0 + \dots + V_n$ . Die Mengen  $V_r$  sind aber nulldimensional<sup>7)</sup>. Also ist die Menge  $U_n$  höchstens  $n$ -dimensional.

Bezeichnen wir alle  $n$ -dimensionalen Ebenen  $\subset R_{2n+1}$  der Form

$$x_{i_1} = r_1, \dots, x_{i_{n+1}} = r_{n+1} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_{n+1} \leq 2n+1),$$

wo  $r_1, \dots, r_{n+1}$  rationale Zahlen bedeuten, in irgendeiner Reihenfolge mit  $E_1, E_2, \dots$ , so gilt für die Menge  $U_n$  die Gleichung

$$(6) \quad U_n = R_{2n+1} - (E_1 + E_2 + \dots).$$

Wir behaupten jetzt den

**Satz.** Jeder  $n$ -dimensionale Raum  $M$  ist mit einer Teilmenge  $M^*$  der Menge  $U_n$  homöomorph.

**Beweis.** Da nach Hurewicz<sup>8)</sup> jeder  $n$ -dimensionale Raum mit einer Teilmenge eines kompakten  $n$ -dimensionalen Raumes homöomorph ist, genügt es, unsern Satz für kompakte Räume  $M$  zu beweisen.

Da weiter vermöge eines Satzes von Urysohn<sup>9)</sup> jeder kompakte Raum mit einer Teilmenge des Hilbertschen Raumes  $H$  homöomorph ist, genügt es für den Beweis unseres Satzes, den Raum  $M$  als eine kompakte  $n$ -dimensionale Teilmenge des Hilbertschen Raumes  $H$  anzunehmen.

Und schließlich bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß für alle Punkte  $(x_1, \dots, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots)$  von  $M$  die Gleichungen

$$x_1 = \dots = x_{2n+1} = 0$$

gelten.

Es sei  $M_m^k$  ( $k = 1, 2, \dots, \text{ad inf.}; m = 1, \dots, m_1$ ) eine erzeugende Doppelfolge von  $M$ <sup>10)</sup>, bestehend aus in  $M$  abgeschlossenen Mengen  $M_m^k$ .

Wir ordnen nun allen Punkten von  $M$  einen beliebigen, aber festen Punkt  $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_{2n+1}, 0, \dots)$  des  $R_{2n+1}$  als Bild zu, wobei  $\varrho_1, \dots, \varrho_{2n+1}$  beliebige Irrationalzahlen sind. Die aus dem Punkte  $\varrho$  bestehende Menge heiße  $M_1$ . Die Abbildung  $M \rightarrow M_1$  ist eindeutig und stetig. Die Menge  $M_1$  hat von der Ebene  $E_1$  einen Abstand

$$(7) \quad \eta_1 = \delta(M_1, E_1) > 0.$$

Wir setzen noch

$$(8) \quad \varepsilon_1 = 1.$$

<sup>7)</sup> Menger, „Dimensionstheorie“, S. 147.

<sup>8)</sup> Proc. Acad. Amsterdam 30 (1927), S. 425.

<sup>9)</sup> Math. Annalen 94 (1924), S. 309; Math. Annalen 92 (1924), S. 302.

<sup>10)</sup> Menger, „Dimensionstheorie“, Teubner 1928, S. 61.

Ausgehend von dieser eindeutigen und stetigen Abbildung  $M \rightarrow M_i$  bilden wir sukzessive für  $i = 1, 2, \dots$ , ad inf. die Menge  $M$  auf eine Teilmenge  $M_i$  des  $R_{2n+1}$  eindeutig und stetig ab gemäß der folgenden Induktionsvorschrift:

Liegen für ein natürliches  $i$  zwei Zahlen  $\varepsilon_i$  und  $\eta_i$  und eine eindeutige stetige Abbildung der Menge  $M$  auf eine Teilmenge  $M_i$  des  $R_{2n+1}$  vor, so bezeichnen wir die Bilder der Mengen  $M_m^k$  in  $M_i$  mit  $(M_m^k)_i$  und wählen nun eine positive Zahl  $\varepsilon_{i+1}$  gemäß folgenden Bedingungen:

- (9)  $\varepsilon_{i+1} < \frac{\varepsilon_i}{4},$   
 (10)  $\varepsilon_{i+1} < \frac{\eta_i}{4},$   
 (11)  $4\varepsilon_{i+1}$  kleiner als der Abstand je zweier fremder Mengen  $M_m^k$  mit  $k \leq i,$   
 (12)  $4\varepsilon_{i+1}$  kleiner als der Abstand je zweier fremder Mengen  $(M_m^k)_i$  mit  $k \leq i.$

Wenn nun  $p = (0, \dots, 0, x_{2n+2}, \dots)$  ein Punkt aus  $M$  und  $(x_i, \dots, x_{2n+1}, 0, \dots)$  sein Bildpunkt in  $M_i$  ist, so ordnen wir dem Punkte  $p$  den Punkt  $p^i = (x_1, \dots, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots)$  als Bild zu. Die Menge aller Punkte  $p^i$  heiße  $M^i$ . Diese Abbildung  $M \rightarrow M^i$  ist topologisch, denn erstens liegen wegen der Stetigkeit der Abbildung  $M \rightarrow M_i$  für je zwei hinreichend nahe beieinander liegende Punkte  $p = (0, \dots, 0, x_{2n+2}, \dots)$  und  $q = (0, \dots, 0, y_{2n+2}, \dots)$  von  $M$  die Koordinaten  $x_j$  und  $y_j$  ( $j \leq 2n+1$ ) ihrer Bildpunkte in  $M_i$  und daher auch ihre Bildpunkte  $p^i$  und  $q^i$  beliebig nahe beieinander; und zweitens gilt für irgendein  $j \geq 2n+2$ , wenn  $p$  und  $q$  verschieden sind,  $x_j + y_j$ , woraus sofort  $p^i + q^i$  folgt.

Nach Alexandroff<sup>11)</sup> können wir die Menge  $M^i$  bei geeigneter Wahl der Zahl  $l \geq 2n+1$  auf einen  $n$ -dimensionalen Komplex  $K_l \subset R_l$  eindeutig und stetig derart abbilden, daß jeder Punkt  $p^i = (x_1, \dots, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots)$  aus  $M^i$  von seinem Bildpunkt  $\bar{p}^i = (x'_1, \dots, x'_l, 0, \dots)$  einen Abstand

$$(13) \quad \delta(p^i, \bar{p}^i) < \frac{\varepsilon_{i+1}}{8\sqrt{2n+1}}$$

hat, so daß also insbesondere die Ungleichungen

$$(14) \quad |x_j - x'_j| < \frac{\varepsilon_{i+1}}{8\sqrt{2n+1}} \quad (j = 1, \dots, l)$$

gelten.

Nach Hilfssatz 2 können wir den  $n$ -dimensionalen Komplex  $K_l \subset R_l$  auf eine Menge  $K'_l \subset R_{2n+1}$  topologisch derart abbilden, daß, wenn  $(x'_1, \dots, x'_l, 0, \dots)$  ein Punkt aus  $K_l$  und  $(x''_1, \dots, x''_{2n+1}, 0, \dots)$  sein Bild-

<sup>11)</sup> Alexandroff, *Annals of Mathematics* (2) 30 (1928), S. 18.

punkt in  $K'_i$  ist, die Ungleichungen

$$(15) \quad |x'_j - x''_j| < \frac{\varepsilon_{i+1}}{3\sqrt{2n+1}} \quad (j = 1, \dots, 2n+1)$$

gelten.

Schließlich wählen wir eine positive Zahl  $\zeta < \frac{\varepsilon_{i+1}}{3\sqrt{2n+1}}$  so klein, daß  $3\zeta$  kleiner ist als der Abstand je zweier fremder Bilder von Mengen  $M_m^k$  ( $k \leq i$ ) in  $K'_i$ . Sodann können wir nach Alexandroff<sup>13)</sup> die Menge  $K'_i$  auf eine Menge  $M_{i+1} \subset R_{2n+1}$  eindeutig und stetig abbilden, so daß erstens der Abstand  $\eta_{i+1}$  der Menge  $M_{i+1}$  von der Ebene  $E_{i+1}$

$$(16) \quad \eta_{i+1} = \delta(M_{i+1}, E_{i+1}) > 0$$

ist, und so, daß zweitens jeder Punkt  $(x''_1, \dots, x''_{2n+1}, 0, \dots)$  aus  $K'_i$  von seinem Bildpunkt  $(x'''_1, \dots, x'''_{2n+1}, 0, \dots)$  einen Abstand  $< \zeta$  hat; hieraus folgen aber einerseits wegen  $\zeta < \frac{\varepsilon_{i+1}}{3\sqrt{2n+1}}$  die Ungleichungen

$$(17) \quad |x''_j - x'''_j| < \frac{\varepsilon_{i+1}}{3\sqrt{2n+1}} \quad (j = 1, \dots, 2n+1),$$

und andererseits haben nach Wahl von  $\zeta$  die Bilder  $(M_{m_i}^k)_{i+1}$  und  $(M_{m_s}^k)_{i+1}$  zweier Mengen  $M_m^k$  und  $M_s^k$  ( $k \leq i$ ) in  $M_{i+1}$  einen Abstand

$$(18) \quad \begin{cases} \delta[(M_{m_i}^k)_{i+1}, (M_{m_s}^k)_{i+1}] > 0 & (k \leq i), \\ \text{falls die Bilder der Mengen } M_m^k \text{ und } M_s^k \text{ in } K'_i \text{ fremd sind.} \end{cases}$$

Die durch Aneinanderreihung der eindeutigen stetigen Abbildungen  $M \rightarrow M^i$ ,  $M^i \rightarrow K_i$ ,  $K_i \rightarrow K'_i$ ,  $K'_i \rightarrow M_{i+1}$  entstehende Abbildung der Menge  $M$  auf eine Teilmenge  $M_{i+1}$  des  $R_{2n+1}$  ist eindeutig und stetig.

Aus der vorgegebenen Abbildung  $M \rightarrow M_i$  und den Zahlen  $\varepsilon_i$  und  $\eta_i$  haben wir damit eine Abbildung  $M \rightarrow M_{i+1}$  und die Zahlen  $\varepsilon_{i+1}$  und  $\eta_{i+1}$  konstruiert.

Auf Grund dieser Induktionsvorschrift konstruieren wir, ausgehend von der Abbildung  $M \rightarrow M_1$ , sukzessive für  $i = 1, 2, \dots$ , ad inf. eine eindeutige stetige Abbildung der Menge  $M$  auf eine Teilmenge  $M_i$  des  $R_{2n+1}$ . Wir wollen jetzt zeigen, daß die Folge der Abbildungen  $M \rightarrow M_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ , ad inf.) gegen eine topologische Abbildung der Menge  $M$  auf eine Teilmenge  $M^*$  des  $R_{2n+1}$  konvergiert.

Es sei  $p = (0, \dots, 0, x_{2n+1}, \dots)$  ein beliebiger Punkt aus  $M$ , und es seien  $p_i = (x_1, \dots, x_{2n+1}, 0, \dots)$  und  $p_{i+1} = (x'''_1, \dots, x'''_{2n+1}, 0, \dots)$  seine Bildpunkte in  $M_i$  und  $M_{i+1}$ . Dann folgen aus (14), (15) und (17) die Ungleichungen

$$|x_j - x'''_j| < \frac{\varepsilon_{i+1}}{\sqrt{2n+1}} \quad (j = 1, \dots, 2n+1).$$

<sup>13)</sup> Alexandroff, Göttinger Nachrichten 1928, S. 37.

Also haben die Punkte  $p_i$  und  $p_{i+1}$  einen Abstand

$$(19) \quad \delta(p_i, p_{i+1}) < \varepsilon_{i+1}.$$

Nun ist wegen (8) und (9)

$$(20) \quad \varepsilon_{i+1} < \frac{1}{4^i}.$$

Also ist wegen (19) und (20) die Punktfolge  $p_1, p_2, \dots$  eine Cauchysche Folge und besitzt daher in  $R_{2n+1}$  einen Limes  $p^*$ , den wir dem Punkte  $p$  als Bild zuordnen. Die Menge aller Punkte  $p^*$  heiße  $M^*$ . Wir wollen zeigen, daß diese Abbildung  $M \rightarrow M^*$  topologisch ist.

Ihre Stetigkeit folgt daraus, daß die Folge der eindeutigen stetigen Abbildungen  $M \rightarrow M_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ , ad inf.) gegen die Abbildung  $M \rightarrow M^*$  wegen (19) und (20) gleichmäßig konvergiert.

Um die Eineindeutigkeit der Abbildung  $M \rightarrow M^*$  zu zeigen, wählen wir zwei verschiedene Punkte  $p$  und  $q$  von  $M$  und haben zu zeigen, daß ihre Bilder  $p^*$  und  $q^*$  verschieden sind. Zunächst kann man eine Zahl  $i$  so finden, daß zwei Mengen  $M_m^i$  und  $M_n^i$ , von denen die eine den Punkt  $p$ , die andere den Punkt  $q$  enthält, einen Abstand

$$\delta(M_m^i, M_n^i) > 0$$

haben. Wegen (11) ist also

$$\delta(M_m^i, M_n^i) > 4 \varepsilon_{i+1}.$$

Um so mehr ist, wenn wir mit  $(M_m^i)^i$  das Bild von  $M_m^i$  in  $M^i$  bezeichnen,

$$\delta[(M_m^i)^i, (M_n^i)^i] > 4 \varepsilon_{i+1},$$

wie sofort aus der Definition der Menge  $M^i$  folgt. Hiernach haben wegen

$$(13) \text{ und } \frac{\varepsilon_{i+1}}{3 \sqrt{2n+1}} < \varepsilon_{i+1} \text{ die Bilder der Mengen } M_m^i \text{ und } M_n^i \text{ in } K_i \text{ einen}$$

positiven Abstand. Da aber  $K_i$  und  $K'_i$  homöomorph sind, haben auch die Bilder der Mengen  $M_m^i$  und  $M_n^i$  in  $K'_i$  einen positiven Abstand. Hieraus folgt wegen (18)

$$\delta[(M_m^i)_{i+1}, (M_n^i)_{i+1}] > 0,$$

und daher ist wegen (12)

$$\delta[(M_m^i)_{i+1}, (M_n^i)_{i+1}] > 4 \varepsilon_{i+2}.$$

Insbesondere haben also die Punkte  $p_{i+1} \in (M_m^i)_{i+1}$  und  $q_{i+1} \in (M_n^i)_{i+1}$  einen Abstand

$$(21) \quad \delta(p_{i+1}, q_{i+1}) > 4 \varepsilon_{i+2}.$$

Nun folgt für jedes  $j > i+1$  aus (9) und (19)

$$\delta(p_{i+1}, q_j) < \varepsilon_{i+2} \cdot \sum_{k=0}^{j-i-2} \frac{1}{4^k} \leq 2 \varepsilon_{i+2}.$$

Mithin gilt für den Punkt  $p^* = \lim_{i \rightarrow \infty} p_i$

$$\delta(p_{i+1}, p^*) \leq 2\varepsilon_{i+1}$$

und analog

$$\delta(q_{i+1}, q^*) \leq 2\varepsilon_{i+1}.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen und (21) folgt

$$\delta(p^*, q^*) > 0,$$

d. h.  $p^*$  und  $q^*$  sind verschieden. Damit ist die Eineindeutigkeit der Abbildung  $M \rightarrow M^*$  gezeigt.

Die Abbildung  $M \rightarrow M^*$  ist also eineindeutig und stetig, und daher wegen der Kompaktheit von  $M$  topologisch.

Schließlich beweisen wir noch, daß  $M^*$  Teilmenge von  $U_n$  ist.

Für ein beliebiges natürliches  $i_0$  gilt nach (7) und (16)

$$(22) \quad \delta(M_{i_0}, E_{i_0}) = \eta_{i_0} > 0.$$

Da nun wegen (10) für  $i > i_0$  die Ungleichung

$$\varepsilon_i < \frac{\eta_{i_0}}{4^{i-i_0}}$$

gilt, so folgt aus (19) für jeden Punkt  $p$  aus  $M$

$$\delta(p_{i_0}, p_i) \leq \frac{\eta_{i_0}}{2}$$

und daher für  $p^* = \lim_{i \rightarrow \infty} p_i$

$$\delta(p_{i_0}, p^*) \leq \frac{\eta_{i_0}}{2}.$$

Hiernach ist wegen (22)

$$\delta(p^*, E_{i_0}) > 0$$

für jeden Punkt  $p^*$ , d. h. die Menge  $M^*$  ist zu  $E_{i_0}$  fremd.

Nun war aber  $i_0$  beliebig gewählt. Also ist  $M^*$  auch zur Menge

$$E_1 + E_2 + \dots$$

fremd. Wegen (6) ist daher  $M^*$  Teilmenge der Menge  $U_n$ .

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 27. 3. 1930.)



# Über regulär-eindimensionale Räume.

Von

Georg Nöbeling in Wien.

Ein Raum<sup>1)</sup> heißt nach Menger<sup>2)</sup> regulär-eindimensional, wenn jeder Punkt in beliebig kleinen Umgebungen mit endlichen Begrenzungen liegt. Ist er zudem kompakt und zusammenhängend, so nennt ihn Menger eine reguläre Kurve<sup>3)</sup>.

Ein beliebiges System  $\mathfrak{S}$  von Räumen heißt nach Menger<sup>4)</sup> *kompaktifizierbar*, wenn jeder Raum aus  $\mathfrak{S}$  mit einer Teilmenge eines kompakten Raumes aus  $\mathfrak{S}$  homöomorph ist. Ein kompaktifizierbares System ist z. B. das System aller endlichen Räume oder nach Hurewicz<sup>5)</sup> für jedes  $n$  das System aller höchstens  $n$ -dimensionalen Räume. Nicht kompaktifizierbar ist dagegen z. B. das System aller abzählbaren Räume. Wir wollen im folgenden erstens zeigen, daß das System aller regulär-eindimensionalen Räume kompaktifizierbar ist<sup>6)</sup>; wir behaupten also den

**Satz 1.** *Jeder regulär-eindimensionale Raum ist mit einer Teilmenge eines kompakten regulär-eindimensionalen Raumes homöomorph.*

Einen Raum  $U$  eines Systems  $\mathfrak{S}$  von Räumen nennt man nach Menger<sup>6)</sup> einen *Universalraum*, wenn er zu jedem Raum des Systems  $\mathfrak{S}$  eine homöomorphe Teilmenge enthält. Zum Beispiel ist im System aller abzählbaren Räume der Raum aller rationalen Punkte der Geraden ein Universalraum. Weiter enthält für jedes  $n$  das System aller  $n$ -dimensionalen Räume einen Universalraum<sup>7)</sup>. Dagegen enthält das System aller endlichen Räume keinen

<sup>1)</sup> Siehe zur Definition des Raumes diesen Band, S. 71.

<sup>2)</sup> Menger, *Math. Annalen* 95, S. 279, und *Wiener akad. Anzeiger* 1929, Nr. 1.

<sup>3)</sup> Menger, *Monatshefte f. Math. u. Phys.* 36, S. 195.

<sup>4)</sup> Hurewicz, *Proc. Acad. Amsterdam* 30 (1927), S. 425.

<sup>5)</sup> Hingegen ist das System aller Räume, die in jedem Punkt von höchstens vierter Ordnung sind, nicht kompaktifizierbar; auch nicht das System aller Räume, die in jedem Punkt eine endliche Ordnung haben. Vgl. die Bemerkung von Beer im 4. Kolloquium des Berichtes von Menger (*Monatshefte f. Math. u. Phys.* 38).

<sup>6)</sup> Menger, „*Dimensionstheorie*“, Teubner 1928, S. 314.

<sup>7)</sup> Vgl. diesen Band, S. 71.

Universa Raum. Wir wollen nun im folgenden zeigen, daß auch das System aller regulär-eindimensionalen Räume keinen Universa Raum enthält. Wir behaupten genauer gesprochen den

Satz 2. Zu jedem regulär-eindimensionalen Raum  $R$  gibt es eine reguläre Kurve  $K$ , zu welcher  $R$  keine homöomorphe Teilmenge enthält.

Hiernach gibt es auch im System aller regulären Kurven keinen Universa Raum<sup>7)</sup>.

\* \* \*

Wir beginnen mit dem

Beweis des Satzes 1. Ist  $\varepsilon$  eine positive Zahl, so können wir den Raum  $R$  durch abzählbar viele Umgebungen  $U_i < \varepsilon$  ( $i=1, 2, \dots$ , ad inf.) mit endlichen Begrenzungen überdecken. Setzen wir  $A_1 = \overline{U}_1$  und

$A_{i+1} = U_{i+1} - \sum_{k=1}^i A_k$ , so haben die Mengen  $A_i$  folgende Eigenschaften:

- (1) Es ist  $R = A_1 + A_2 + \dots$ ;
- (2) jedes  $A_i$  ist in  $R$  abgeschlossen;
- (3) je zwei der Mengen  $A_i$  haben höchstens Randpunkte, und zwar nur endlich viele, gemein;
- (4) jede Menge  $A_i$  hat einen Durchmesser  $\leq \varepsilon$ ;
- (5) jeder Punkt von  $R$  liegt in höchstens endlich vielen Mengen  $A_i$ .

Jede Darstellung  $R = A_1 + A_2 + \dots$ , wo die Mengen  $A_i$  die Eigenschaften (2) bis (5) haben, wollen wir eine  $\varepsilon$ -Darstellung nennen.

Wir wählen jetzt eine 1-Darstellung von  $R$ :

$$R = A_1 + A_2 + \dots$$

und setzen  $R_1 = A_1$  und  $R_2 = A_2 + A_3 + \dots$ . Die Mengen  $A_1, A_2, \dots$  wollen wir die Mengen des ersten Schrittes nennen.

Ausgehend von den Mengen  $R_1$  und  $R_2$  bestimmen wir die Mengen  $R_{i_1, \dots, i_k}$  ( $i_1, \dots, i_k = 1, 2$ ) gemäß der folgenden Induktionsvorschrift:

<sup>7)</sup> Die Frage nach einer regulären Universalkurve wurde von Menger, Fund. Math. 10, S. 107, aufgeworfen. Ihr verdanke ich die Anregung zu dieser Arbeit. —

Bezeichnen wir mit Menger eine Kurve als *rational*, wenn jeder ihrer Punkte in beliebig kleinen Umgebungen mit abzählbaren Begrenzungen enthalten ist, so existiert, wie hier erwähnt werden möge, auch keine rationale Universalkurve. Denn einem Satz von H. Reschovsky, Fund. Math. 14, S. 19, zufolge besitzt jede rationale Kurve  $K$  eine Ordinalzahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse als Geschlecht (im Sinne von Menger, Fund. Math. 10, S. 111) und kann Kurven von höherem Geschlecht topologisch nicht enthalten. Da aber für jede Ordinalzahl  $\alpha$  der zweiten Zahlenklasse Kurven vom Geschlecht  $\alpha$  existieren, so kann  $K$  nicht alle rationalen Kurven topologisch enthalten.

Es mögen nach Ausführung von  $k$  Schritten bereits  $2^k$  Mengen  $R_{i_1, \dots, i_k}$  ( $i_1, \dots, i_k = 1, 2$ ) vorliegen derart, daß jede Menge  $R_{i_1, \dots, i_k}$ , für welche  $i_k = 2$  ist, Summe von unendlich vielen Mengen  $A_j$  eines  $j$ -ten Schrittes ( $j \leq k$ ) ist:  $R_{i_1, \dots, i_{k-1}, 2} = A_i + A_{i+1} + \dots$ . Für jede solche Menge  $R_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}$  mit  $i_k = 2$  setzen wir

$$R_{i_1, \dots, i_k, 1} = A_i$$

und

$$R_{i_1, \dots, i_k, 2} = A_{i+1} + A_{i+2} + \dots$$

Für eine Menge  $R_{i_1, \dots, i_k}$  mit  $i_k = 1$  wählen wir dagegen eine  $\frac{1}{k+1}$ -Darstellung

$$R_{i_1, \dots, i_k} = A_1 + A_2 + \dots$$

und setzen

$$R_{i_1, \dots, i_k, 1} = A_1$$

und

$$R_{i_1, \dots, i_k, 2} = A_2 + A_3 + \dots$$

Alle bei diesem  $(k+1)$ -ten Schritte auftretenden Mengen  $A_j$  nennen wir die Mengen des  $(k+1)$ -ten Schrittes.

Auf Grund dieser Induktionsvorschrift wählen wir, ausgehend von den Mengen  $R_1$  und  $R_2$ , für jedes  $k$  die  $2^k$  Mengen  $R_{i_1, \dots, i_k}$  ( $i_1, \dots, i_k = 1, 2$ ).

Je zwei dieser Mengen,  $R_{i_1, \dots, i_k}$  und  $R_{j_1, \dots, j_k}$ , mit gleicher Indexanzahl haben höchstens Randpunkte, und zwar nur endlich viele, gemein; denn wenn  $l$  die kleinste Zahl ist, so daß die Indizes  $i_l$  und  $j_l$  verschieden sind, so haben wegen (3) und der Definition der Mengen  $R_{i_1, \dots, i_k}$  die Mengen  $R_{i_1, \dots, i_l}$  und  $R_{j_1, \dots, j_l}$ , also wegen  $R_{i_1, \dots, i_k} < R_{i_1, \dots, i_l}$  und  $R_{j_1, \dots, j_k} < R_{j_1, \dots, j_l}$  auch die Mengen  $R_{i_1, \dots, i_k}$  und  $R_{j_1, \dots, j_k}$  höchstens Randpunkte, und zwar nur endlich viele, gemein.

Ist  $i_1, i_2, \dots$  eine Folge von Zahlen, die alle gleich 1 oder 2 sind, und gelten für irgendein  $l$  die Gleichungen  $i_k = 2$  für  $k \geq l$ , so gibt es ein  $j$ , so daß die Mengen  $R_{i_1, \dots, i_l}$ ,  $R_{i_1, \dots, i_{l+1}}$ , ... Summen von Mengen des  $j$ -ten Schrittes sind:

$$R_{i_1, \dots, i_l} = A_i + A_{i+1} + \dots,$$

$$R_{i_1, \dots, i_l, i_{l+1}} = A_{i+1} + A_{i+2} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

Wegen (5) ist hiernach der Durchschnitt

$$\prod_{k=1}^{\infty} R_{i_1, \dots, i_k}$$

leer. Soll also der Durchschnitt nicht leer sein, so müssen unendlich viele der Zahlen  $i_1, i_2, \dots$  gleich 1 sein. Da aber eine Menge  $R_{i_1, \dots, i_{k-1}, 1} = A_i$  einen Durchmesser  $< \frac{1}{k}$  hat, kann der Durchschnitt  $\prod_{k=1}^{\infty} R_{i_1, \dots, i_k}$  höchstens einen einzigen Punkt  $p$  enthalten; und wenn ein solcher Punkt existiert,

so konvergieren die Mengen  $R_{i_1}, \dots, i_k$  gegen ihn. Hieraus folgt sofort, daß, wenn ein Punkt  $p$  in unendlich vielen Mengen  $R_{i_1}, \dots, i_k$  liegt, diese Mengen gegen  $p$  konvergieren.

Hiernach gelten, wenn wir die Mengen  $R_{i_1}, \dots, i_k$  mit  $k$  Indizes in irgendeiner Reihenfolge mit

$$R_1^k, \dots, R_{2^k}^k$$

bezeichnen, die folgenden Beziehungen:

- (6) Es ist  $R = R_1^k + \dots + R_{2^k}^k$  für jedes  $k$ ;
- (7) das System  $1, \dots, 2^k$  zerfällt in  $2^{k-1}$  Zahlenpaare derart, daß, wenn  $n_1, n_1$  das  $n$ -te Paar ist,  $R_n^k = R_{n_1}^{k+1} + R_{n_2}^{k+1}$  gilt;
- (8) jede Menge  $R_n^k$  ist in  $R$  abgeschlossen;
- (9) für jedes  $k$  haben je zwei Mengen  $R_n^k$  höchstens Randpunkte, und zwar nur endlich viele, gemein;
- (10) ist  $i_1, i_2, \dots$  eine Folge von Zahlen mit  $i_k \leq 2^k$ , so ist der Durchschnitt  $\prod_{k=1}^{\infty} R_{i_k}^k$  entweder leer oder genau einpunktig und Limes der Folge  $R_{i_k}^k$  ( $k=1, 2, \dots$ , ad inf.).

Nach einer Methode von Alexandroff<sup>\*)</sup> wollen wir jetzt den Raum  $R$  kompaktifizieren.

Mit  $\kappa_k$  bezeichnen wir das System  $(1, \dots, 2^k)$ . Ist  $\alpha_k$  ein Teilsystem von  $\kappa_k$ , bestehend aus den Elementen  $a_1, \dots, a_s$ , so setzen wir den Durchschnitt  $R_{\alpha_k}^k \dots R_{\alpha_s}^k = R_{\alpha_k}^k$ . Wir definieren:

- (11) Eine endliche Folge  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  heißt ausgezeichnet, falls der Durchschnitt  $R_{\alpha_1}^1 \dots R_{\alpha_k}^k$  nicht leer ist.

Dann gelten offenbar folgende Sätze:

a) Ist  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m$  eine ausgezeichnete Folge, dann auch jede Teilfolge  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ .

b) Jede ausgezeichnete endliche Folge  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  ist Teilfolge einer ausgezeichneten endlichen Folge  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ .

Ist nämlich  $p$  ein Punkt des Durchschnittes  $R_{\alpha_1}^1 \dots R_{\alpha_m}^m$ , so gibt es wegen (6) ein  $\alpha$ , so daß  $p$  in  $R_{\alpha}^{m+1}$  enthalten ist. Bezeichnen wir mit  $\alpha_{m+1}$  das aus der Zahl  $\alpha$  bestehende System, so ist  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$  ausgezeichnet.

c) Jede ausgezeichnete endliche Folge bleibt ausgezeichnet, wenn man irgendeines ihrer Glieder  $\alpha_i$  durch ein System  $\alpha'_i$  ersetzt, welches Teilsystem von  $\alpha_i$  ist.

<sup>\*)</sup> Alexandroff, Math. Annalen 96 (1926), S. 489; vgl. die Darstellung von Menger, „Dimensionstheorie“, S. 187.

Wir definieren:

- (12) Eine Folge  $\{\alpha_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ , ad inf.) heißt Kette, wenn folgendes gilt:
- (12, 1) Alle endlichen Anfangsabschnitte sind ausgezeichnet;
- (12, 2) die Folge  $\{\alpha_k\}$  verliert die Eigenschaft (12, 1), wenn irgendeines ihrer Glieder durch ein umfassenderes System ersetzt wird.

Zum Beispiel:

- (13) Wenn  $p$  einen beliebigen Punkt aus  $R$  und  $\alpha_k$  das System aller Zahlen  $\alpha$ , für welche  $p$  in  $R_\alpha^k$  enthalten ist, bedeutet, so ist  $\{\alpha_k\}$  eine Kette.

Zunächst ist klar, daß (12, 1) erfüllt ist. Wir nehmen an, (12, 2) wäre nicht erfüllt. Dann können wir also für irgendein  $k$  das System  $\alpha_k$  durch ein umfassenderes System  $\alpha'_k$  ersetzen, ohne daß (12, 1) aufhört, richtig zu sein. Da  $\alpha'_k$  mindestens zwei Elemente enthält, besteht wegen (9) der Durchschnitt  $R_{\alpha'_k}^1 \dots R_{\alpha'_k}^k$  aus höchstens endlich vielen Punkten, und wegen (10) bestehen daher für alle hinreichend großen  $l$  die Durchschnitte  $R_{\alpha'_k}^1 \dots R_{\alpha'_k}^l$  aus genau einem Punkt  $q$ . Wegen (10) muß  $q = p$  sein; für alle in  $\alpha'_k$  enthaltenen Zahlen  $\alpha$  ist also  $p$  in  $R_\alpha^k$  enthalten, d. h.  $\alpha'_k$  ist mit  $\alpha_k$  identisch, was der Annahme widerspricht.  $\{\alpha_k\}$  ist also eine Kette, die wir mit  $p^*$  bezeichnen wollen.

Durch die soeben angestellten Überlegungen haben wir gleichzeitig mitbewiesen:

- (14) Ist  $\{\alpha_k\}$  eine Kette und enthält für irgendein  $\kappa$  das System  $\alpha_\kappa$  mindestens zwei Elemente, so ist  $\{\alpha_k\}$  die zu einem (eindeutig bestimmten) Randpunkte  $p$  einer Menge  $R_\kappa^*$  gehörige Kette  $p^*$ .

Weiter gilt:

- (15) Wenn zwei Ketten  $\{\alpha_k\}$  und  $\{\beta_k\}$  gegeben sind mit der Eigenschaft, daß für unendlich viele  $k$  die Systeme  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  Elemente gemein haben, so sind  $\{\alpha_k\}$  und  $\{\beta_k\}$  identisch.

Es habe nämlich erstens die eine der beiden Ketten, etwa  $\{\alpha_k\}$ , die Eigenschaft, daß alle Systeme  $\alpha_k$  aus je einem Element  $a_k$  bestehen. Dann gilt  $R_{a_k}^k \subset R_{a_\kappa}^*$  für  $\kappa \leq k$ , denn es gibt wegen (7) sicher ein  $b$  zu jedem  $\kappa \leq k$ , so daß  $R_{a_k}^k$  Teilmenge von  $R_b^*$  ist. Dieses  $b$  muß dann wegen (12, 2) in  $\alpha_\kappa$  enthalten, also mit  $a_\kappa$  identisch sein. Wenn nun für unendlich viele  $k$  das Element  $a_k$  in  $\beta_k$  liegt, so gilt dasselbe für alle  $k$ , wie aus  $R_{a_k}^k \subset R_{a_\kappa}^*$  ( $\kappa \leq k$ ) wegen (12, 2) folgt. Wegen (12, 2) muß demnach  $\{\alpha_k\}$  mit  $\{\beta_k\}$  übereinstimmen. Wenn der erste Fall nicht vorliegt, so gibt es nach (14) zwei Punkte  $p$  und  $q$ , die  $p^* = \{\alpha_k\}$  und  $q^* = \{\beta_k\}$

erzeugen. Wenn nun für unendlich viele  $k$  die Systeme  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  Elemente gemein haben, so müssen wegen (10)  $p$  und  $q$  und daher auch  $p^*$  und  $q^*$  identisch sein.

Definieren wir nun:

- (16) Die  $m$ -te Umgebung  $U_m\{\alpha_k\}$  einer Kette  $\{\alpha_k\}$  ist die Menge aller Ketten  $\{\beta_k\}$ , für welche  $\beta_1, \dots, \beta_m$  Teilsysteme bzw. von  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sind,

so folgt aus (15) sofort

d) Für je zwei nicht identische Ketten  $\{\alpha_k\}$  und  $\{\beta_k\}$  existiert eine natürliche Zahl  $k_0$ , so daß, wenn  $\{\zeta_k\}$  bzw.  $\{\eta_k\}$  irgend zwei Ketten von  $U_{k_0}\{\alpha_k\}$  bzw.  $U_{k_0}\{\beta_k\}$  sind, für alle  $k > k_0$  die Systeme  $\zeta_k$  und  $\eta_k$  elementenfremd sind.

Nach Alexandroff\*) ist die Menge aller Ketten  $\{\alpha_k\}$  ein kompakter Raum. In ihm ist jede Kette  $\{\alpha_k\}$  Durchschnitt der sich auf  $\{\alpha_k\}$  zusammenziehenden Umgebungsfolge  $U_m\{\alpha_k\}$  ( $m=1, 2, \dots$ ). Eine Kettenfolge  $\{\alpha_k^i\}$  ( $i=1, 2, \dots$ ) konvergiert also gegen  $\{\alpha_k\}$ , wenn für jedes  $m$  in  $U_m\{\alpha_k\}$  fast alle  $\{\alpha_k^i\}$  enthalten sind.

Ist  $p$  ein beliebiger Punkt aus  $R$ , so ordnen wir ihm die von ihm erzeugte Kette  $p^* = \{\alpha_k\}$  als Bild zu und bezeichnen die Menge aller Ketten  $p^*$  mit  $R^*$ . Wir wollen zeigen, daß die Abbildung  $p \rightarrow p^*$  topologisch ist.

Sind  $p$  und  $q$  zwei verschiedene Punkte aus  $R$ , so sind die von ihnen erzeugten Ketten  $p^*$  und  $q^*$  wegen (10) verschieden.

Ist  $p_1, p_2, \dots$  eine konvergente Punktfolge aus  $R$  mit dem Limes  $p$ , so läßt sich zu jedem  $m$  wegen (8) und weil nur endlich viele Mengen  $R_n^k$  mit  $k \leq m$  existieren, ein  $i_0$  so angeben, daß jede Menge  $R_n^k$  mit  $k \leq m$ , die einen Punkt  $p_i$  mit  $i > i_0$  enthält, auch den Punkt  $p$  enthält. Das bedeutet aber, daß für  $i > i_0$  die Ketten  $p_i^*$  in  $U_m\{\alpha_k\}$  liegen, d. h. daß die Folge  $p_1^*, p_2^*, \dots$  gegen  $p^*$  konvergiert.

Ist umgekehrt  $p_1^*, p_2^*, \dots$  eine konvergente Folge in  $R^*$  mit dem Limes  $p^*$ , so enthält also für jedes  $m$  die Summe aller  $p$  enthaltenden  $R_n^m$  fast alle Punkte  $p_i$ ; wegen (10) konvergiert also die Folge  $p_1, p_2, \dots$  gegen  $p$ .

Die Abbildung  $p \rightarrow p^*$  ist also topologisch.

Es bleibt noch nachzuweisen, daß  $K$  regulär ist. Dazu genügt es, zu zeigen, daß die Begrenzungen der Umgebungen  $U_m\{\alpha_k\}$  endlich sind. Es sei  $\{\beta_k\}$  auf dem Rande von  $U_m\{\alpha_k\}$  gelegen. Wären nun  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  elementenfremd, so wären nach (16) die Umgebungen  $U_m\{\alpha_k\}$  und  $U_m\{\beta_k\}$  elementenfremd; dann könnte aber  $\{\beta_k\}$  nicht auf dem Rande von  $U_m\{\alpha_k\}$  liegen. Es sei  $b$  ein den beiden Systemen  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  angehörendes Element. Enthielte nun für jedes  $k \leq m$  das System  $\beta_k$  nur ein Element  $b_k$ , so wäre

$R_b^m$  Teilmenge von  $R_{b_k}^k$ , also  $b_k$  Element von  $\alpha_k$ , d. h.  $\{\beta_k\}$  läge in  $U_m\{\alpha_k\}$ . Für ein  $\kappa \leq m$  enthält demnach das System  $\beta_\kappa$  mindestens zwei Elemente. Wegen (14) ist dann  $\{\beta_k\}$  das Bild  $p^*$  eines Randpunktes  $p$  einer Menge  $R_n^m$  mit  $\kappa \leq m$ , und weil wegen (9) nur endlich solche Punkte  $p$  existieren, ist die Begrenzung von  $U_m\{\alpha_k\}$  endlich.

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

\*     \*     \*

Wir behaupten jetzt den folgenden

**Hilfssatz.** Zu jeder monoton wachsenden Folge von natürlichen Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  gibt es eine reguläre Kurve  $K$ , die für jedes natürliche  $n$  nur durch Tilgung von mindestens  $\alpha_n$  Punkten in mindestens  $n$  Komponenten zerlegt werden kann.

**Beweis:** Das offene Einheitsquadrat  $Q$  der  $x, y$ -Ebene zerlegen wir in die vier Teilquadrate

$$Q_1 = \left(0 < x, y < \frac{1}{2}\right), \quad Q_2 = \left(\frac{1}{2} < x < 1, 0 < y < \frac{1}{2}\right), \\ Q_3 = \left(\frac{1}{2} < x, y < 1\right), \quad Q_4 = \left(0 < x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < y < 1\right).$$

Ausgehend von diesen Quadraten  $Q_i$  bestimmen wir für jedes  $k$  je  $4^k$  Quadrate  $Q_{i_1, \dots, i_k}$  gemäß der folgenden Induktionsvorschrift: Liegt allgemein für ein  $k$  das Quadrat

$$Q_{i_1, \dots, i_k} = \left(\frac{a}{2^k} < x < \frac{a+1}{2^k}, \quad \frac{b}{2^k} < y < \frac{b+1}{2^k}\right) \quad (i_1, \dots, i_k = 1, \dots, 4)$$

vor, so zerlegen wir es in die vier Teilquadrate

$$Q_{i_1, \dots, i_k, 1} = \left(\frac{a}{2^k} < x < \frac{2a+1}{2^{k+1}}, \frac{b}{2^k} < y < \frac{2b+1}{2^{k+1}}\right), \\ Q_{i_1, \dots, i_k, 2} = \left(\frac{2a+1}{2^{k+1}} < x < \frac{a+1}{2^k}, \frac{b}{2^k} < y < \frac{2b+1}{2^{k+1}}\right), \\ Q_{i_1, \dots, i_k, 3} = \left(\frac{2a+1}{2^{k+1}} < x < \frac{a+1}{2^k}, \frac{2b+1}{2^{k+1}} < y < \frac{b+1}{2^k}\right), \\ Q_{i_1, \dots, i_k, 4} = \left(\frac{a}{2^k} < x < \frac{2a+1}{2^{k+1}}, \frac{2b+1}{2^{k+1}} < y < \frac{b+1}{2^k}\right).$$

Die Menge aller Punkte, die in unendlich vielen Quadraten  $Q_{i_1, \dots, i_k}$  liegen, nennen wir  $M_1$ .

Wir wählen zwischen  $0, \frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{2}, 1$  je  $\alpha_k$  Irrationalzahlen und bezeichnen das System dieser  $2\alpha_k$  Irrationalzahlen mit  $S_k$ . Liegt allgemein für ein  $k$  ein System  $S_k$  von Irrationalzahlen zwischen 0 und 1 vor, so bezeichnen wir mit  $S_k'$  die Menge aller rationalen Zahlen der Form  $\frac{a}{2^{k+1}}$  zwischen 0



und 1 einschließlich und aller Zahlen aus  $S_1 + \dots + S_k$ . Wir denken uns die Zahlen aus  $S'_k$  der Größe nach geordnet und wählen im Innern jedes zwischen je zwei aufeinander folgenden Zahlen aus  $S'_k$  liegenden Intervalls je  $a_{k+1}$  Irrationalzahlen; das System dieser Irrationalzahlen nennen wir  $S_{k+1}$ . Gemäß dieser Induktionsvorschrift bestimmen wir, ausgehend von  $S_1$ , sukzessive die Systeme  $S_1, S_2, \dots$ .

Mit  $G_k$  bezeichnen wir die Menge aller Punkte, die gleichzeitig in  $Q$  und auf mindestens einer der Geraden  $x = j_1$  oder  $y = j_1$  liegen, wobei  $j_1$  irgendeine Zahl aus  $S_1$  ist. Für irgendein  $k \geq 2$  nennen wir  $G_k$  die Menge aller Punkte, die gleichzeitig in einem Quadrat  $Q_{i_1, \dots, i_{k-1}}$  mit  $k-1$  Indizes und auf mindestens einer der Geraden  $x = j_k$  oder  $y = j_k$  liegen, wobei  $j_k$  irgendeine Zahl des Systems  $S_k$  ist. Wir setzen  $G = G_1 + G_2 \dots$  und  $M = M_1 + G$ .

Die Gerüste  $G_{k+1}, G_{k+2}, \dots$  liegen ganz in der Summe aller Quadrate  $Q_{i_1, \dots, i_k}$  mit  $k$  Indizes. Die Seiten des Quadrates  $Q_{i_1, \dots, i_k}$  haben also mit  $G$  nur endlich viele Punkte gemein, nämlich höchstens die endlich vielen Schnittpunkte der Seiten  $x = j_k, y = j_k$ , wobei  $j_k$  alle Zahlen aus  $S_1 + \dots + S_k$  durchläuft. Alle Quadrate  $Q_{i_1, \dots, i_k}$  haben also bezüglich  $M$  endliche Begrenzungen, d. h.  $M$  ist regulär-eindimensional.

Für jedes  $k$  ist  $G_1 + \dots + G_k$  zusammenhängend. Folglich muß auch  $G = G_1 + G_2 + \dots$  und, da  $G$  in  $M$  dicht liegt,  $M$  zusammenhängend sein.

Jedes Quadrat  $Q_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}$  mit  $k$  Indizes wird begrenzt von Geraden der Form  $x, y = \frac{a}{2^k}$ , und für mindestens eine Seite, etwa  $x = \frac{a}{2^k}$ , ist hierin  $k$  nicht durch eine kleinere Zahl ersetzbar. Die Seite  $x = \frac{a}{2^k}, \frac{b}{2^k} < y < \frac{b+1}{2^k}$  des Quadrates  $Q_{i_1, \dots, i_k}$  liegt also im Innern des Quadrates  $Q_{i_1, \dots, i_{k-1}}$ . Nun liegen zwischen  $\frac{b}{2^k}$  und  $\frac{b+1}{2^k}$  mindestens  $a_k$  Zahlen des Systems  $S_k$ . Folglich liegen mindestens  $a_k$  Punkte gleichzeitig auf der Strecke  $x = \frac{a}{2^k}, \frac{b}{2^k} < y < \frac{b+1}{2^k}$  und einer der Geraden  $y = j_k$ . Die Seite  $x = \frac{a}{2^k}, \frac{b}{2^k} < y < \frac{b+1}{2^k}$  des Quadrates  $Q_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}$  hat also mit  $G_k$  mindestens  $a_k$  Punkte gemein, d. h. die Begrenzung bezüglich  $M$  jedes Quadrates  $Q_{i_1, \dots, i_k}$  enthält mindestens  $a_k$  Punkte.

Wir betrachten jetzt zwei Quadrate  $Q_{i_1, \dots, i_k}$  und  $Q_{i'_1, \dots, i'_k}$ , die sich nur durch den  $k$ -ten Index unterscheiden. Wenn sie eine Seite  $x = \frac{a}{2^k}, \frac{b}{2^k} < y < \frac{b+1}{2^k}$  oder  $y = \frac{b}{2^k}, \frac{a}{2^k} < x < \frac{a+1}{2^k}$  gemein haben, so haben sie nach dem eben Bewiesenen mindestens  $a_k$  Begrenzungspunkte bezüglich  $M$  gemein. Andern-

falls können wir

$$Q_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k} = \left( \frac{a-1}{2^k} < x < \frac{a}{2^k}, \frac{b-1}{2^k} < y < \frac{b}{2^k} \right),$$

$$Q_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k''} = \left( \frac{a}{2^k} < x < \frac{a+1}{2^k}, \frac{b}{2^k} < y < \frac{b+1}{2^k} \right)$$

oder

$$Q_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k} = \left( \frac{a-1}{2^k} < x < \frac{a}{2^k}, \frac{b}{2^k} < y < \frac{b+1}{2^k} \right),$$

$$Q_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k''} = \left( \frac{a}{2^k} < x < \frac{a+1}{2^k}, \frac{b-1}{2^k} < y < \frac{b}{2^k} \right).$$

setzen, wobei  $a$  ungerade ist. Wir betrachten den ersten Fall. Zwischen  $\frac{b-1}{2^k}$  und  $\frac{b}{2^k}$  bzw.  $\frac{a}{2^k}$  und  $\frac{a+1}{2^k}$  liegen je mindestens  $a_k$  Zahlen  $j'_1 < \dots < j'_{a_k}$  bzw.  $j''_1 > \dots > j''_{a_k}$  aus  $S_k$ . Die  $2a_k$  Strecken

$$\frac{a-1}{2^k} < x < \frac{a+1}{2^k}, y = j'_r (1 \leq r \leq a_k) \text{ und } \frac{b-1}{2^k} < y < \frac{b+1}{2^k}, x = j''_r (1 \leq r \leq a_k)$$

liegen, da  $a$  ungerade ist, in  $G_k$ , also in  $M$ . Laufen wir also vom Punkte  $x = \frac{a}{2^k}$ ,  $y = j'_r$  nach rechts bis zur Geraden  $x = j''_r$  und auf dieser aufwärts bis zum Punkte  $x = j''_r$ ,  $y = \frac{b}{2^k}$  und nennen den durchlaufenen Weg  $b_r$ , so haben je zwei Bögen  $b_r$  und  $b_s$  keinen Punkt gemein, und jedes  $b_r$  verbindet einen Randpunkt bzgl.  $M$  von  $Q_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}$  mit einem Randpunkt bzgl.  $M$  von  $Q_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k''}$ . Der zweite Fall erledigt sich entsprechend. Zusammenfassend können wir also sagen:

(1) Zwei Quadrate  $Q_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}$  und  $Q_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k''}$  haben entweder mindestens  $a_k$  Randpunkte bzgl.  $M$  gemein oder können durch mindestens  $a_k$  Bögen  $\subset M$  verbunden werden, die zu je zweien fremd sind.

Außerdem gilt:

(2) Die Randpunkte bzgl.  $M$  von  $Q_{i_1, \dots, i_k}$ , die nicht gleichzeitig Randpunkte bzgl.  $M$  von  $Q_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}}$  sind, lassen sich mit Randpunkten bzgl.  $M$  von  $Q_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}}$  durch Bögen  $\subset M$  verbinden, die zu je zweien fremd sind.

Wir führen den Beweis für  $Q_{i_1, \dots, i_k} = Q_1$ ,  $Q_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}} = Q_{11}$ . Die Zahlen  $j$  aus  $S_1$  seien so numeriert, daß  $0 < j_1 < j_2 < \dots < j_r < \frac{1}{4} < j_{r+1} < \dots < j_{a_1} < \frac{1}{2}$  ist. Die Randpunkte von  $Q_1$  bzgl.  $M$  sind:  $(\frac{1}{2}, j_1), \dots, (\frac{1}{2}, j_{a_1})$ ;  $(j_1, \frac{1}{2}), \dots, (j_{a_1}, \frac{1}{2})$ . Für jedes  $t$  mit  $1 \leq t \leq r$  nennen wir  $b_t$  die Strecke  $y = j_t$ ,  $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ . Sie liegt ganz in  $G_1$ , also in  $M$  und verbindet den Randpunkt  $(\frac{1}{2}, j_t)$  von  $Q_1$  mit dem Randpunkt  $(\frac{1}{4}, j_t)$  von  $Q_{11}$ . Je zwei dieser Bögen  $b_t$  sind offenbar fremd. Zwischen  $j_{a_1}$  und  $\frac{1}{2}$  liegen mindestens

$a_1$ , also mindestens  $s = a_1 - r$  Zahlen

$$(3) \quad \frac{1}{2} > j'_1 > \dots > j'_s > j_a,$$

aus  $S_2$ ; zwischen  $j_r$  und  $\frac{1}{4}$  aus demselben Grunde mindestens  $s$  Zahlen

$$(4) \quad j_r < j''_1 < \dots < j''_s < \frac{1}{4}$$

aus  $S_3$ . Die Strecken  $b'_t = (0 < y < \frac{1}{2}, x = j'_t)$  und  $b''_t = (0 < x < \frac{1}{2}, y = j''_t)$  mit  $1 \leq t \leq s$  liegen in  $G_3$ , also in  $M$ . Wir laufen jetzt vom Punkte  $(\frac{1}{2}, j_{r+t})$ , ( $1 \leq t \leq a_1 - r$ ), aus nach links auf der Geraden  $y = j_{r+t}$  bis zur Strecke  $b'_t$ , auf dieser abwärts bis zur Strecke  $b''_t$  und auf dieser nach links bis zum Quadrat  $Q_{11}$ ; den durchlaufenen Weg nennen wir  $b_{r+t}$ . Der Bogen  $b_{r+t}$  liegt in  $M$  und verbindet den Randpunkt  $(\frac{1}{2}, j_{r+t})$  von  $Q_1$  mit dem Randpunkt  $(\frac{1}{4}, j''_t)$  von  $Q_{11}$ . Wegen (3), (4) haben je zwei Bögen  $b_t$  ( $1 \leq t \leq a_1$ ) keine Punkte gemein. Vertauschen wir  $x$  und  $y$  miteinander, so erhalten wir  $a_1$  neue Bögen  $b_t^*$ , die je einen Randpunkt von  $Q_1$  mit einem Randpunkt von  $Q_{11}$  verbinden, zu je zweien und zu den Bögen  $b_t$  fremd sind. Damit haben wir unsere Behauptung (2) für den Spezialfall  $Q_{i_1}, \dots, i_{k-1} = Q_1$ ,  $Q_{i_1}, \dots, i_{k-1}, i_k = Q_{11}$  bewiesen. Durch dieselben Überlegungen überzeugt man sich von der allgemeinen Richtigkeit von (2).

Es sei jetzt irgendein  $n$ -tupel von Punkten aus  $M_1$  gegeben:  $p_1, \dots, p_n$ . Wir wählen die natürliche Zahl  $k$  so, daß

$$(5) \quad 4^{k-1} < n \leq 4^k$$

gilt. Dann gibt es also eine natürliche Zahl

$$(6) \quad l \geq k$$

derart, daß in einem Quadrat  $Q_{i_1, \dots, i_{l-1}}$  noch zwei Punkte des  $n$ -tupels, etwa  $p_1$  und  $p_2$ , liegen, während  $p_1$  in  $Q_{i_1, \dots, i_{l-1}, i'_2}$  und  $p_2$  in  $Q_{i_1, \dots, i_{l-1}, i'_2}$  liegt. Wegen (1), (2), (5) und (6) können also die Punkte  $p_1$  und  $p_2$  durch mindestens  $a_n$  Bögen  $\subset M$  verbunden werden, die zu je zwei nur die Endpunkte gemein haben. Ist also irgendein  $n$ -tupel von Punkten aus  $M$  gegeben, so existieren in  $M$  mindestens  $a_n$  Bögen, deren Endpunkte dem  $n$ -tupel angehören und die zu je zwei höchstens Endpunkte gemein haben.

Nach Satz 1 können wir die Menge  $M$  als Teilmenge einer kompakten regulär-eindimensionalen Menge  $K$  annehmen, in der  $M$  zudem noch dicht liegt. Da  $M$  zusammenhängend ist, gilt dasselbe für  $K$ , d. h.  $K$  ist eine reguläre Kurve. Tilgen wir nun aus  $K$  eine Menge  $S$  derart, daß  $K - S$  in mindestens  $n$  Komponenten zerfällt, so enthält  $S$  entweder unendlich, also mindestens  $a_n$  Punkte; oder aber  $S$  enthält nur endlich viele Punkte. Dann ist jede Komponente von  $K - S$  in  $K$  offen. Wir können also  $n$  in  $M_1(K - S)$  liegende Punkte  $p_1, \dots, p_n$  derart wählen, daß keine zwei von

ihnen in derselben Komponente von  $K - S$  liegen. Da zwischen diesen Punkten mindestens  $a_n$  bis auf die Endpunkte fremde Bögen  $\subset K$  gespannt werden können, muß  $S$  mindestens  $a_n$  Punkte enthalten. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir beginnen jetzt den Beweis des Satzes 2: Wegen Satz 1 genügt es, die Behauptung für einen kompakten  $R$  zu beweisen.

In diesem kompakten Raum  $R$  gibt es ein System  $R_n^k$  ( $k=1, 2, \dots$ ;  $n=1, \dots, n_k$ ) von Teilmengen  $R_n^k$  derart, daß folgendes gilt:

(1) Es ist  $R = R_1^k + \dots + R_{n_k}^k$  für jedes  $k$ .

(2) Das System  $(1, \dots, n_{k+1})$  zerfällt in  $n_k$  zueinander fremde Teilsysteme derart, daß, wenn  $(v_1, \dots, v_r)$  das  $n$ -te Teilsystem ist,  $R_n^k = R_{v_1}^{k+1} + \dots + R_{v_r}^{k+1}$  gilt.

(3) Jedes  $R_n^k$  ist in  $R$  abgeschlossen.

(4) Für jedes  $k$  haben je zwei der Mengen  $R_n^k$  und  $R_n^k$  höchstens Randpunkte, und zwar nur endlich viele, gemein.

(5) Jedes  $R_n^{k+1}$  hat mit der Begrenzung eines jeden  $R_n^k$  höchstens einen Punkt gemein.

(6) Jedes  $R_n^k$  hat einen Durchmesser  $< \frac{1}{k}$ .

Mit  $b_k$  bezeichnen wir die Anzahl aller Punkte von  $R$ , die Randpunkte von mindestens einem  $R_n^k$  sind. Sodann setzen wir  $a_n = 1 + \sum_{k=1}^n b_k$  und wählen zur Folge  $a_1, a_2, \dots$  eine reguläre Kurve  $K$ , welche die Eigenschaft des Hilfssatzes 2 hat. Wir behaupten, daß  $K$  nicht Teilmenge von  $R$  sein kann.

Nehmen wir an, es sei  $K$  Teilmenge von  $R$ . Dann gibt es ein  $k_0$  derart, daß  $K$  mindestens zwei Randpunkte eines  $R_n^{k_0}$  enthält. Wegen (5) kommen dann für jedes  $v$  unter den Mengen  $K \cdot R_n^{k_0+v}$  ( $n=1, \dots, n_{k_0+v}$ ) mindestens  $2v$  abgeschlossene Umgebungen von  $K$  vor.  $K$  kann also für jedes  $v$  durch Tilgung von höchstens  $b_{k_0+v}$  Punkten in mindestens  $2v$  Komponenten zerlegt werden; speziell für  $v = k_0$  läßt sich  $K$  durch Tilgung von höchstens  $b_{2k_0}$  Punkten in  $2k_0$  Komponenten zerlegen. Andererseits kann aber  $K$  nur durch Tilgung von mindestens  $a_{2k_0} = 1 + \sum_{k=1}^{2k_0} b_k > b_{2k_0}$  in mindestens  $2k_0$  Komponenten zerlegt werden, worin ein Widerspruch liegt. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

(Eingegangen am 27. 3. 1930.)

## Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen der symmetrischen und der linearen Gruppen.

Von

B. L. van der Waerden in Groningen (Niederlande).

In einer kürzlich erschienenen Arbeit<sup>1)</sup> hat Herr Weyl einen neuen Beweis gegeben für den bekannten Zusammenhang zwischen den irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Permutationsgruppe und den irreduziblen ganzrationalen Darstellungen der linearen Transformationsgruppe. Man kann nun, wie ich hier zeigen werde, den Grundgedanken des Weylschen Beweises noch etwas anders fassen und dadurch den Beweis vereinfachen und von einigen Hilfsbetrachtungen befreien.

Die  $n$ -ären irreduziblen Tensoren  $f$ -ter Stufe  $(F_{i_1 \dots i_f})$  bilden einen linearen Raum  $\mathfrak{R}$ , und mit jeder linearen Transformation des  $n$ -dimensionalen Vektorraumes ist eine lineare Transformation von  $\mathfrak{R}$  verknüpft. Diese Tensortransformationen bilden eine Darstellung  $(\lambda)^f$  der  $n$ -dimensionalen linearen Gruppe  $\lambda$ . Es gilt, diese Darstellung in ihre irreduziblen Bestandteile zu zerlegen.

Die Permutationen  $s$  der Indizes  $i_1 \dots i_f$  induzieren ebenfalls lineare Transformationen des Tensorenraumes  $\mathfrak{R}$ , die eine Darstellung  $\mathfrak{D}_n$  der symmetrischen Permutationsgruppe  $\pi = \pi_f$  bilden. Diese Darstellung  $\mathfrak{D}_n$  ist nach der allgemeinen Darstellungstheorie für endliche Gruppen vollständig reduzibel<sup>2)</sup>.

Zwischen die Gruppen  $\lambda$  und  $\pi$  schiebt sich nun als Bindeglied die von Weyl eingeführte Gruppe  $\sigma$  der „symmetrischen Transformationen“,

<sup>1)</sup> H. Weyl, Der Zusammenhang zwischen der symmetrischen und der linearen Gruppe, *Annals of Math.* 30 (1929), S. 499–516.

<sup>2)</sup> Vorausgesetzt, daß die Gruppenordnung  $f!$  nicht durch die Charakteristik des zugrunde gelegten Körpers teilbar ist.

das sind lineare Transformationen im Tensorenraum:

$$(1) \quad F'_{i_1 \dots i_f} = \sum c_{i_1 \dots i_f, k_1 \dots k_f} F_{k_1 \dots k_f},$$

deren Koeffizienten  $c$  sich nicht ändern, wenn man auf die Indizes  $i_1 \dots i_f$  und  $k_1 \dots k_f$  gleichzeitig eine und dieselbe Permutation anwendet. Herr Weyl beweist nun, daß die symmetrischen Transformationen sich linear aus den Transformationen der Gruppe  $(\lambda)^f$  zusammensetzen. Es sei gestattet, den ganz einfachen Beweis hier zu wiederholen. Die Transformationen der Gruppe  $(\lambda)^f$  haben die Gestalt (1) mit

$$(2) \quad c_{i_1 \dots i_f, k_1 \dots k_f} = b_{i_1 k_1} \cdot b_{i_2 k_2} \cdot \dots \cdot b_{i_f k_f}.$$

Zu beweisen ist also, daß alle linearen Gleichungen, die für die speziellen durch (2) gegebenen  $c$  gelten, auch für beliebige symmetrische  $c$  gelten. Schreibt man jedes Indexpaar  $ik$  als einen einzigen Index  $j$ , so folgt aus jeder identisch in den  $b_j$  erfüllten Gleichung

$$\sum q_{j_1 \dots j_f} b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_f} = 0$$

bekanntlich das Verschwinden der Koeffizienten  $\sum q_{j_1 \dots j_f}$  (Summe über alle Permutationen der Indizes), und daraus wieder die Gleichung

$$\sum q_{j_1 \dots j_f} c_{j_1 \dots j_f}$$

für alle in den Indizes  $j$  symmetrischen  $c_{j_1 \dots j_f}$ , q. e. d.

Nun kann man die symmetrischen Transformationen ersichtlich auch definieren als solche lineare Transformationen des Tensorenraumes  $\mathfrak{R}$ , die mit allen Indizespermutationen, d. h. mit allen Transformationen von  $\mathfrak{D}_n$ , vertauschbar sind. Die mit einer vollreduziblen Darstellung vertauschbaren Matrizes sind aber sehr leicht aufzustellen; tut man das, so kommt der ganze gesuchte Zusammenhang zwischen den Gruppen  $\mathfrak{D}_n$  und  $\sigma$  bzw.  $(\lambda)^f$  von selbst zum Vorschein. Der Einfachheit halber, und weil es für die meisten Zwecke genügt, gebe ich hier den Beweis für den Fall des algebraisch-abgeschlossenen Koeffizientenkörpers, doch ist das Ergebnis, wie aus einer noch unveröffentlichten Arbeit von Herrn Rabinowitsch folgt, un schwer auf vollreduzible Darstellungen in einem beliebigen Körper auszudehnen.

Wir spalten den Tensorenraum  $\mathfrak{R}$  in (absolut)-irreduzible Teilräume gegenüber der Gruppe  $\mathfrak{D}_n$  auf, folgendermaßen:

Der Teilraum  $\mathfrak{F} = (F_1, \dots, F_l)$  erleide die Transformationen  $A$ ,  
 der Teilraum  $\mathfrak{F}' = (F'_1, \dots, F'_l)$  erleide äquivalente Transformationen,  
 also bei passender Basiswahl dieselben Transformationen  $A$ ,  
 allgemein erleide  $\mathfrak{F}^{(i)} = (F_1^{(i)}, \dots, F_l^{(i)})$  die Transformationen  $A$ ,

ebenso  $\mathfrak{G}^{(u)} = (G_1^{(u)}, \dots, G_m^{(u)})$  die Transformationen  $B$  (nicht äquiv.  $A$ ), usw.

Unter den so erhaltenen Darstellungsmatrizes:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & \ddots & \\ & & & B & \\ & & & & B & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

kommen nach dem Burnsidischen Satz  $l^2 + m^2 + \dots$  linear-unabhängige vor, d. h. unter ihren Linearkombinationen kommen *alle* Matrizes  $A$ , zusammen mit *allen*  $B$ , usw. vor. Insbesondere kann man wählen:

$$(\text{Transformation } e_1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (0), \dots,$$

$$(\text{Transformation } e_2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad B = (0), \dots,$$

.....

$$(\text{Transformation } e_i) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (0), \dots,$$

$$(\text{Transformation } e_{i+1}) \quad A = (0), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

.....

Die Transformation  $e_i$  transformiert die  $F_1^{(i)}$  in sich selbst, alle anderen Grundtensoren in Null. Also ist jedes  $e_i F$  ( $F$  beliebig) eine Linearkombination der  $F_1^{(i)}$ . Der lineare Raum  $r_1 = e_1 \mathfrak{R}$  wird also von den  $F_1^{(i)}$  aufgespannt, ebenso  $r_2 = e_2 \mathfrak{R}$  von den  $F_2^{(i)}$ , ...,  $r_{i+1}$  von den  $G_1^{(u)}$  usw. Die Tensoren des Raumes  $r_1$  sind durch die „Symmetriebedingung“  $e_1 F = F$  charakterisiert; entsprechendes gilt für  $r_2$  usw.

Soll nun eine lineare Transformation  $S$  mit  $e_1, e_2, \dots$  vertauschbar sein, so muß



$$S F_1^{(\lambda)} = S e_1 F_1^{(\lambda)} = e_1 S F_1^{(\lambda)} = \sum_{\kappa} F_1^{(\kappa)} q_1^{(\kappa \lambda)},$$

$$S F_2^{(\lambda)} = S e_2 F_2^{(\lambda)} = e_2 S F_2^{(\lambda)} = \sum_{\kappa} F_2^{(\kappa)} q_2^{(\kappa \lambda)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S G_1^{(\nu)} = S e_{l+1} G_1^{(\nu)} = e_{m+1} S G_1^{(\nu)} = \sum_{\mu} G_1^{(\mu)} q_{l+1}^{(\mu \nu)},$$

$$\dots \dots \dots$$

sein. Weiter gibt es auch Transformationen  $A$ , die  $F_1^{(\lambda)}$  in  $F_2^{(\lambda)}$  bis  $F_m^{(\lambda)}$  überführen; sollen auch diese mit  $S$  vertauschbar sein, so müssen die  $l$  Matrizen  $q_1, \dots, q_l$  einander gleich sein. Ebenso die  $m$  nächsten Matrizen usw. Also muß die Transformation  $S$  die Gestalt haben:

$$S F_j^{(\lambda)} = \sum F_j^{(\kappa)} q^{(\kappa \lambda)},$$

$$S G_j^{(\nu)} = \sum G_j^{(\mu)} r^{(\mu \nu)},$$

$$\dots \dots \dots$$

Das ist auch hinreichend, damit  $S$  mit allen Matrizen (1) vertauschbar ist. Aus der Gestalt der Matrizen  $S$  ergibt sich, daß sie die Räume  $r_\nu = e_\nu \mathfrak{R}$  invariant lassen und irreduzibel transformieren, und daß diese Transformationen für die Räume  $r_1, \dots, r_l$  äquivalent sind, ebenso für  $r_{l+1}$  bis  $r_{l+m}$  äquivalent, aber inäquivalent zu den erstgenannten usw.

Damit ist bewiesen: *erstens* die volle Reduzibilität des Systems  $\sigma$  und daher auch der Darstellung  $(\lambda)^f$ ; *zweitens* die eindeutige Beziehung zwischen den inäquivalenten irreduziblen Bestandteilen der Darstellungen  $\mathfrak{D}_n$  von  $\pi$  und  $(\lambda)^f$  von  $\lambda$ ; *drittens*, daß die irreduziblen Teilräume des Tensorraumes gegenüber  $\sigma$  oder  $(\lambda)^f$  durch Symmetriebedingungen  $e_\nu F = F$  charakterisiert werden können, wo die  $e_\nu$  idempotente Symmetrieoperatoren der „Gruppenalgebra“ von  $\pi$  sind; *viertens* die folgende genaue Beziehung zwischen den irreduziblen Teilräumen von  $(\lambda)^f$  und  $\mathfrak{D}_n$ : Die Basistensoren von  $\mathfrak{R}$  lassen sich in Rechtecken anordnen:

$$F_1, F_2, \dots, F_l, \quad G_1, G_2, \dots, G_m,$$

$$F'_1, F'_2, \dots, F'_l, \quad \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

deren Zeilen jeweils die äquivalenten irreduziblen Teilräume gegenüber  $\mathfrak{D}_n$ , und deren Spalten die äquivalenten irreduziblen Teilräume gegenüber  $(\lambda)^f$  angeben. Die verschiedenen Rechtecke gehören zu inäquivalenten Darstellungen sowohl gegenüber  $\mathfrak{D}_n$  als gegenüber  $(\lambda)^f$ . Die Grade der irreduziblen Bestandteile von  $\mathfrak{D}_n$  sind gleich den Anzahlen von Malen, daß die entsprechenden Bestandteile in  $(\lambda)^f$  vorkommen, und umgekehrt.

(Eingegangen am 23. 4. 1930.)

# Über die Laplacesche Kaskadenmethode.

Von

Hans Hamburger in Köln.

## Inhalt.

	Seite
Einleitung . . . . .	96
§ 1. Vorbereitende Betrachtungen . . . . .	104
§ 2. Laplacesche Koeffizientenfolgen . . . . .	110
§ 3. Differentialgleichungen vom Laplaceschen Typus . . . . .	117
§ 4. Die Kaskadenmethode und die Riemannsche Integrationsmethode . . . . .	121
§ 5. Koeffizienten einer Laplacefolge und Laplacesche Invarianten . . . . .	125
§ 6. Anwendung der Kaskadenmethode auf ein System von Differentialgleichungen . . . . .	130
§ 7. Anwendung der Kaskadenmethode auf Integrodifferentialgleichungen . . . . .	133

## Einleitung.

1. Ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung vom hyperbolischen Typus

$$(L) \quad L(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

vorgelegt, deren Koeffizienten  $a, b, c$  analytische Funktionen von  $x$  und  $y$  sind, so führt in gewissen speziellen Fällen die sogenannte Laplacesche Kaskadenmethode zur vollständigen Integration der Differentialgleichung<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Laplace, Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles, Mém. de math. et de phys. de l'Ac. des Sciences pour 1773, S. 341 (gedruckt 1777). Wiederabgedruckt in Œuvres complètes publ. par l'Ac. des Sc. 9 (1893), S. 5—68. Siehe insbesondere S. 22—24 und S. 28—37. Vgl. auch Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2. 2. Aufl. (1913), S. 23—38.

Die Kaskadenmethode besteht in einer Kette von Substitutionen. Man setze

$$(1) \quad \begin{aligned} z_1 &= \frac{\partial z}{\partial y} + az, \\ h_0 &= \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c. \end{aligned}$$

Die Funktion  $h_0$ , die bei gewissen einfachen Transformationen der Differentialgleichung (L) erhalten bleibt, nennen wir nach Darboux eine „Laplace'sche Invariante“ der Differentialgleichung (L). Substituiert man den Ausdruck (1) für  $z_1$  in die Differentialgleichung (L), so wird (L) in die Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 = h_0 z$$

übergeführt. Ist jetzt  $h_0 = 0$ , so ergibt die sukzessive Integration der Differentialgleichungen (1) und (2)

$$(3) \quad \begin{aligned} z_1 &= \varphi(y) B(xy), \\ z &= A(xy) \left( \varphi(x) + \int_{y_0}^y \frac{B(x\eta)}{A(x\eta)} \varphi(\eta) d\eta \right). \end{aligned}$$

Hierbei ist zur Abkürzung

$$(4) \quad A(xy) = e^{-\int_{y_0}^y a(x\eta) d\eta}, \quad B(xy) = e^{-\int_{x_0}^x b(\xi y) d\xi}$$

gesetzt, während  $\varphi(x)$  und  $\varphi(y)$  willkürliche Funktionen von  $x$  allein bzw. von  $y$  allein bezeichnen. Für den Fall  $h_0 = 0$  liefert mithin der Ausdruck (3) das allgemeine Integral der Differentialgleichung (L).

Ist  $h_0 \neq 0$ , so führt die Elimination von  $z$  aus den Gleichungen (1) und (2) zu einer Differentialgleichung für  $z_1$ :

$$(L_1) \quad L_1(z_1) = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 = 0.$$

Hierbei ist

$$(5) \quad a_1 = a - \frac{\partial \log h_0}{\partial y}, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c - \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial \log h_0}{\partial y}.^{*)}$$

Nunmehr behandle man die Differentialgleichung  $L_1(z_1) = 0$  ebenso wie vorhin die Differentialgleichung  $L(z) = 0$  und setze

$$(6) \quad \begin{aligned} z_2 &= \frac{\partial z_1}{\partial y} + a_1 z_1, \\ h_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial x} + a_1 b_1 - c_1, \end{aligned}$$

\*) Vgl. Darboux, loc. cit. Fußnote 1), S. 28, Formel (18).

wo  $h_1$  die „Laplacesche Invariante“ der Differentialgleichung  $(L_1)$  ist. Die Substitution von  $z_2$  in  $(L_1)$  ergibt

$$(7) \quad \frac{\partial z_2}{\partial x} + b_1 z_2 = h_1 z_1.$$

Ist  $h_1 = 0$ , so ergibt die sukzessive Integration der Differentialgleichungen (7) und (6) in Verbindung mit (2) einen Ausdruck für das allgemeine Integral der Integralgleichung  $(L)$ , der wieder von zwei willkürlichen Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$  abhängt. Ist aber  $h_1 \neq 0$ , so ergibt die Elimination von  $z_1$  aus den beiden Gleichungen (6) und (7) eine Differentialgleichung  $L_2(z_2) = 0$  für  $z_2$ , die vom gleichen Typus wie die Differentialgleichungen  $(L)$  und  $(L_1)$  ist. Dieses Verfahren setze man solange als möglich fort; man erhält so eine Folge von Funktionen  $z_v$ , eine Folge von Differentialgleichungen  $(L_v)$ , denen die Funktionen  $z_v$  genügen, und endlich eine Folge von Invarianten  $h_v$ .

2. Nun sind zwei Fälle möglich, je nachdem das Verfahren abbricht oder nicht. Im ersten Falle werde man nach  $n$  Schritten auf eine Differentialgleichung  $L_n(z_n) = 0$  geführt, deren Laplacesche Invariante  $h_n = 0$  ist. Substituiert man nunmehr in  $L_n$

$$(8) \quad \frac{\partial z_n}{\partial y} + a_n z_n = z_{n+1},$$

so folgt — ebenso wie die Gleichung (2) für  $z_1$  aus  $(L)$  — für  $z_{n+1}$  die einfache Differentialgleichung

$$\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} + b_n z_{n+1} = h_n z_n = 0,$$

und somit ergibt sich

$$z_{n+1} = \psi(y) B_n(xy),$$

und weiter aus (8)

$$z_n = A_n(xy) \left( \varphi(x) + \int_{y_0}^y \frac{B_n(x\eta)}{A_n(x\eta)} \psi(\eta) d\eta \right),$$

wenn entsprechend wie in (4) zur Abkürzung

$$(9) \quad A_n(xy) = e^{-\int_{x_0}^x a_n(x\eta) d\eta}, \quad B_n(xy) = e^{-\int_{y_0}^y b_n(\xi y) d\xi}$$

gesetzt ist, während  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$  wieder willkürliche Funktionen bedeuten. Die weiteren Funktionen

$$z_{n-1}, z_{n-2}, \dots, z_1, z$$

berechne man der Reihe nach aus den Gleichungen

$$\frac{\partial z_v}{\partial x} + b_{v-1} z_v = B_{v-1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z_v}{B_{v-1}} \right) = h_{v-1} z_{v-1} \quad (v = n, n-1, \dots, 2, 1),$$

und indem man aus (4), (5) und (9) die Beziehungen

$$(10) \quad A_1 = A h_0, \quad A_2 = A_1 h_1 = A h_0 h_1, \quad \dots, \quad A_n = A h_0 h_1 \dots h_{n-1}, \quad \dots, \quad h_{n-1}, \\ b = b_1 = \dots = b_n, \quad B = B_1 = \dots = B_n \quad ^3)$$

folgt, erhält man schließlich als allgemeines Integral der Differentialgleichung (L) den Ausdruck

$$(11) \quad z = \frac{B}{h_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \dots \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{A h_0 h_1 \dots h_{n-1}}{B} \left( \varphi(x) + \int_{y_0}^y \frac{B(x\eta)}{A h_0 h_1 \dots h_{n-1}(x\eta)} \psi(\eta) d\eta \right),$$

Er hängt außer von den beiden willkürlichen Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$  und den Koeffizienten  $A$  und  $B$  von (L) von der Folge Laplacescher Invarianten  $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$  ab. Um die  $h_i$  zu berechnen, braucht man nun nicht erst, wie es nach dem Vorhergehenden scheint, die Laplaceschen transformierten Differentialgleichungen ( $L_i$ ) aufzustellen, sondern es lassen sich die  $h_i$  ohne Vermittlung der Differentialgleichungen ( $L_i$ ) unmittelbar aus geeigneten Rekursionsformeln berechnen (vgl. Formel (95) in § 5). Im Falle  $h_{n-1} \neq 0, h_n = 0$  ist die Differentialgleichung (L) nach der Laplaceschen Kaskadenmethode integrierbar, und wir sagen kurz: (L) sei vom „Laplaceschen Typus“ in bezug auf  $x$ .<sup>4)</sup>

Verschwindet keine der Invarianten  $h_i$ , identisch, so existiert eine unendliche Folge von Invarianten  $h_i$ , und entsprechend gehört zu der vorgelegten Differentialgleichung (L) eine unendliche Folge von Laplaceschen Transformationen und von transformierten Differentialgleichungen ( $L_i$ ). In diesem Falle führt die Laplacesche Transformationsmethode nicht zur Konstruktion des allgemeinen Integrals von (L).

3. Außer der Substitution (1) läßt sich auf (L) auch die Substitution

$$(12) \quad z_{-1} = \frac{\partial z}{\partial x} + b z$$

anwenden. Bildet man noch eine weitere Laplacesche Invariante

$$k_0 = \frac{\partial b}{\partial y} + a b - c,$$

so wird (L) durch die Substitution (12) in die Differentialgleichung

$$(13) \quad \frac{\partial z_{-1}}{\partial y} + a z_{-1} = k_0 z$$

<sup>3)</sup> Vgl. Darboux, loc. cit. Fußnote <sup>1)</sup>, S. 37, Formel (38).

<sup>4)</sup> Vgl. Darboux, loc. cit. Fußnote <sup>1)</sup>, S. 38, Formel (40) und (41).

<sup>5)</sup> In § 3 (Definition 2) ist die Definition der Differentialgleichung (L) vom Laplaceschen Typus anders formuliert, doch wird der Zusammenhang mit der oben angegebenen Definition durch den schon Laplace bekannten Satz 5, § 3 hergestellt.

übergeführt. Je nachdem ob  $k_0 = 0$  oder  $k_0 \neq 0$  ist, ist bereits die Gleichung (13) integrierbar, oder aber man erhält für  $z_{-1}$  durch Elimination von  $z$  aus (12) und (13) eine Differentialgleichung  $(L_{-1})$ , zu der wieder eine neue Invariante

$$k_1 = \frac{\partial b_{-1}}{\partial y} + a_{-1} b_{-1} - c_{-1}$$

gehört, und auf die man die Substitution

$$z_{-2} = \frac{\partial z_{-1}}{\partial x} + b_{-1} z_{-1}$$

anwenden kann. Je nachdem  $k_1 = 0$  oder  $\neq 0$  ist, bricht das Verfahren hier ab oder kann weiter fortgesetzt werden. Wird man auf diese Weise nach  $m$  Schritten auf eine Invariante  $k_m = 0$  geführt, so läßt sich das allgemeine Integral von  $(L)$ , das von zwei willkürlichen Funktionen abhängt, wieder explizit angeben, und zwar erhält man

$$z = \frac{A}{k_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{k_1} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{k_{m-1}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{B k_0 k_1 \dots k_{m-1}}{A} \left( \psi(y) + \int_{x_0}^x \frac{A(\xi y)}{B k_0 k_1 \dots k_{m-1}(\xi y)} \varphi(\xi) d\xi \right).$$

In diesem Fall sagen wir, die Differentialgleichung  $(L)$  ist vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $y$ .

Verschwindet aber keine der Invarianten  $k_i$  identisch, so erhält man eine unendliche Folge von Invarianten  $k_i$  und von transformierten Differentialgleichungen  $(L_{-i})$ ; mithin führen die Laplaceschen Transformationen (12) dann nicht zur Konstruktion des allgemeinen Integrals von  $(L)$ .

4. Die Laplacesche Kaskadenmethode liefert in ihrer bisherigen Gestalt somit dann und nur dann das allgemeine Integral von  $(L)$ , wenn von den beiden Folgen von Invarianten  $h_i$  und  $k_i$  mindestens die eine abbricht. In der vorliegenden Note wird nun eine Abänderung der Kaskadenmethode angegeben, durch die es gelingt, das allgemeine Integral von  $(L)$  auch für den Fall anzugeben, daß die Folgen der  $h_i$  und  $k_i$  beide nicht abbrechen<sup>6)</sup>.

Um zu unserem Ziele zu gelangen, gehen wir von folgender Bemerkung aus. Wenn  $(L)$  vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $x$  ist, setze man in Formel (11)  $\psi(y) = 0$  und denke sich die  $n$  angegebenen Differentiationen ausgeführt. Man erhält dann für das Integral  $z$  eine Darstellung durch eine endliche Summe

$$(14) \quad z = A(xy) \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} + l_1(xy) \frac{d^{n-1} \varphi(x)}{dx^{n-1}} + \dots + l_n(xy) \varphi(x),$$

<sup>6)</sup> In der Arbeit des Verf.: Zur Theorie der sphärischen Abbildung im Großen, I. Konvexe Flächen mit zwei Nabelpunkten, Math. Zeitschr. 30 (1930), S. 629–708 findet sich S. 652–662 bereits ein vollständiger Bericht über die im folgenden entwickelte Integrationsmethode, d. h. über den Inhalt der §§ 2, 3, 6.

deren Glieder nach den Ableitungen der willkürlichen Funktion  $\varphi(x)$  fortschreiten.

Bezeichnet man mit

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x), \dots$$

eine beliebige unendliche Folge von Funktionen, die nur den Bedingungen

$$(15) \quad \frac{d\varphi_r}{dx} = \varphi_{r-1} \quad \text{für alle } r \geq 1$$

unterworfen sind, so nimmt die Summe (14) die Gestalt

$$(16) \quad z = A(xy) \varphi_0(x) + \sum_{r=1}^n l_r(xy) \varphi_r(x)$$

an, und es liegt der Gedanke nahe, für den Fall, daß die Differentialgleichung (L) zwar analytische Koeffizienten  $a, b, c$  hat, aber nicht vom Laplaceschen Typus ist, unendliche Summen

$$(17) \quad z = \sum_{r=0}^{\infty} l_r(xy) \varphi_r(x)$$

zu konstruieren, welche für jede Folge von Funktionen  $\varphi_r(x)$ , die der Bedingung (15) genügen, Integrale von (L) liefern.

5. Es erweist sich als vorteilhaft, zunächst auf die Konvergenz der Reihe rechter Hand von (17) zu verzichten, und einfach nach Bedingungen für die Koeffizienten  $l_r$  zu fragen, damit die Reihe (17) bei formaler Differentiation unter Berücksichtigung von (15) der Differentialgleichung (L) genügt.

Die formale Rechnung führt auf einfache Rekursionsformeln für die Koeffizienten  $l_r$ , die in § 2 Formel (53) dieser Note angegeben sind. Es zeigt sich nun aber, daß die Koeffizienten  $l_r$  durch die Rekursionsformeln (53) nicht eindeutig bestimmt sind, sondern vielmehr von einer unendlichen Folge willkürlicher analytischer Funktionen von  $x$  abhängen. Der einfache Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen Koeffizientenfolgen  $l_r$  wird in § 2 Satz 2 angegeben.

Nunmehr wird das Konvergenzproblem der Reihe (17) in Angriff genommen. Die Untersuchung stützt sich dabei auf die vorbereitenden Betrachtungen des § 1, wo die Integrale von (L) in konvergente Reihen entwickelt werden, welche nach ganzzahligen positiven Potenzen von gewissen Parametern fortschreiten.

Man setze ferner, unter  $\varphi(x)$  eine willkürliche einmal stetig differenzierbare Funktion verstanden, in der Reihe (17) die Funktionen

$$(18) \quad \varphi_0(x) = \varphi(x), \quad \varphi_r(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{r-1}}{(r-1)!} \varphi(\xi) d\xi \quad (r \geq 1).$$



Bei dieser Wahl der Funktionen  $\varphi_r(x)$ , die offenbar der Forderung (15) genügen, gelingt es, in Satz 3 § 3 zu jeder Differentialgleichung (L) ein konvergentes Integral der Gestalt (17) zu konstruieren; endlich wird in Satz 4 § 2 ein Kriterium angegeben, das erkennen läßt, ob für eine beliebige Folge von Koeffizienten  $l_r$  die Reihen (17) konvergieren und Integrale von (L) liefern, wenn man für die  $\varphi_r(x)$  die Funktionen (18) einsetzt.

Außer den Integralen (17) werden in § 2 noch andere Integrale von (L) konstruiert, welche sich durch Reihen von der Form

$$(19) \quad z = \sum_{v=0}^{\infty} l_v^*(xy) \psi_v(y)$$

darstellen lassen. Hierbei ist — unter  $\psi(y)$  eine willkürliche Funktion verstanden —

$$\psi_0(y) = \psi(y), \quad \psi_v(y) = \int_0^y \frac{(y-\eta)^{v-1}}{(v-1)!} \psi(\eta) d\eta \quad (v \geq 1)$$

gesetzt.

6. Es sei nunmehr eine Differentialgleichung (L) vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $x$  vorgelegt. Unter den unendlich vielen Folgen von Koeffizienten  $l_r$ , die sich aus den Rekursionsformeln (53) des § 3 ergeben, existiert nach dem Vorhergehenden mindestens eine, die endlich ist, nämlich die aus der Darstellung (11) für  $z$  konstruierten Koeffizienten  $l_r$  der Entwicklung (16). Es gibt aber auch andere Koeffizientenfolgen  $l_r$ , die nicht abbrechen. Ist nun umgekehrt eine Differentialgleichung (L) und eine ihr zugehörige unendliche Folge von Koeffizienten  $l_r$  gegeben, so liegt die Frage nahe: Wie läßt sich aus dieser Koeffizientenfolge  $l_r$  erkennen, ob die zugehörige Differentialgleichung (L) vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $x$  ist? Als vollständige Antwort auf diese Frage erhält man in § 3 den Satz 6: *Damit die Folge von Koeffizienten  $l_r$  zu einer Differentialgleichung (L) vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $x$  gehört, ist notwendig, daß von einem gewissen  $n$  ab die Koeffizienten  $l_r$  sich als homogene lineare Verbindungen der  $n$  ersten Koeffizienten darstellen lassen:*

$$(20) \quad l_r(xy) = \sum_{n=0}^n \chi_{rn}(x) l_n(xy),$$

wobei die Koeffizienten  $\chi_{rn}(x)$  Funktionen der  $x$  allein sind. Es ist bereits hinreichend, daß die Bedingung (20) für ein einziges  $v \geq n+1$  erfüllt ist. Die Differentialgleichung (L) ist somit dann und nur dann nicht vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $x$ , wenn sämtliche Koeffizienten  $l_r$  einer beliebigen (L) zugehörigen Folge im Sinne der Formel (20) linear unabhängig sind.

7. Das durch eine Reihe (17) gelieferte Integral der Differentialgleichung ( $L$ ) hängt nur von einer willkürlichen Funktion ab, liefert mithin nicht das allgemeine Integral von ( $L$ ). Dieses läßt sich aber, wie in Satz 7 § 4 gezeigt wird, als Summe aus den beiden Reihen (17) und (19) darstellen. Weiter wird dann in § 4 ein Zusammenhang mit der bekannten Riemannschen Integrationsmethode<sup>7)</sup> aufgewiesen, indem die bei Riemann auftretende Greensche Funktion durch Reihen der Form (17) und (19) dargestellt wird.

In Satz 8 § 5 werden einige Beziehungen zwischen den Koeffizienten  $l_i$  einer beliebigen zu einer Differentialgleichung ( $L$ ) gehörigen Folge und den Laplaceschen Invarianten  $h_i$  abgeleitet<sup>8)</sup>.

In § 6 endlich wird die in den §§ 1 bis 3 geschilderte Methode auf ein System von Differentialgleichungen und in § 7 auf Integrodifferentialgleichungen angewendet.

8. Zum Schluß noch eine allgemeine Bemerkung über den Nutzen der angegebenen Integrationsmethode. Was die Allgemeinheit ihrer Anwendbarkeit betrifft, so kann sie mit andern, z. B. der Riemannschen Integrationsmethode, nicht konkurrieren, denn bei Riemann sind die Koeffizienten der Differentialgleichung als stetige Funktionen, in der vorliegenden Untersuchung aber als analytische Funktionen vorausgesetzt. Die Bedeutung der Laplaceschen Kaskadenmethode liegt vielmehr in ihrer Anwendbarkeit bei geometrischen Fragestellungen. Sind

$$z_1(xy):z_2(xy):z_3(xy):z_4(xy)$$

die homogenen Koordinaten einer Fläche  $\mathfrak{F}$  im rechtwinkligen Koordinatensystem und bilden die Parameterlinien  $x = \text{konst.}$ ,  $y = \text{konst.}$  ein System konjugierter Kurven auf  $\mathfrak{F}$ , so genügen die vier Funktionen  $z_1, z_2, z_3, z_4$  einer partiellen Differentialgleichung der Gestalt ( $L$ ). Darboux<sup>9)</sup> hat nun zunächst die Laplacesche Transformation aus Formel (1) geometrisch gedeutet und hat ferner gezeigt, daß die zu  $\mathfrak{F}$  gehörige Differentialgleichung ( $L$ ) dann und nur dann vom Laplaceschen Typus ist, wenn  $\mathfrak{F}$  gewisse geometrische Eigenschaften hat.

Auch bei Untersuchungen des Verfassers<sup>10)</sup> über die sphärische Abbildung im großen von konvexen Flächen scheint wieder die Laplacesche

<sup>7)</sup> B. Riemann, „Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite“, Werke 2. Aufl., 1892, S. 156–179, s. insbes. S. 169–172.

Vgl. auch Darboux, loc. cit. Fußnote <sup>1)</sup>, S. 75–81.

<sup>8)</sup> In den Rekursionsformeln (53) § 2, die die Koeffizienten  $l_i$  bestimmen, treten die Invarianten  $h_i$  nicht auf.

<sup>9)</sup> Darboux, loc. cit., Fußnote <sup>1)</sup>, Bd. 2, S. 11–19.

<sup>10)</sup> Ein erster Teil dieser Untersuchungen ist in der in Fußnote <sup>6)</sup> zitierten Abhandlung des Verf. veröffentlicht.

Kaskadenmethode in Verbindung mit den hier auseinandergesetzten Änderungen den natürlichen Zugang zu den dort auftretenden Integrationsproblemen zu liefern.

## § 1.

## Vorbereitende Betrachtungen.

9. Um dem Leser das Verständnis des Folgenden zu erleichtern, schicken wir ein wohl im wesentlichen bekanntes Existenztheorem voraus.

Satz 1. Die drei Koeffizienten  $a(xy)$ ,  $b(xy)$ ,  $c(xy)$  der partiellen Differentialgleichung  $L(z) = 0$  (vgl. Formel (L) der Einleitung) seien in jedem Punkte des Bereiches der komplexen Veränderlichen

$$(21) \quad |x| \leq R, \quad |y| \leq R$$

reguläre analytische Funktionen von  $x$  und  $y$ .

Es seien ferner  $F(x; st)$  und  $G(y; st)$  zwei im Bereiche

$$(22) \quad |x| \leq R, \quad |y| \leq R, \quad |s| \leq R, \quad |t| \leq R$$

analytische Funktionen von  $x; s, t$  bzw.  $y; s, t$ , welche der Beziehung

$$(23) \quad F(s; st) = G(t; st)$$

genügen. Dann existiert ein im Bereiche (22) eindeutig bestimmtes Integral  $z(xy; st)$  der Differentialgleichung  $L(z) = 0$ , das für  $x = s$  und  $y = t$  den Randbedingungen

$$(24) \quad z(sy; st) = G(y; st), \quad z(xt; st) = F(x; st)$$

genügt und in jedem Punkte des Bereiches (22) eine analytische Funktion seiner vier Veränderlichen  $x, y, s, t$  ist.

Beweis. Zur Konstruktion des gesuchten Integrals benütze man das Verfahren der sukzessiven Approximation und bilde nacheinander die Funktionen

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} z^0(xy; st) &= F(x; st) + G(y; st) - F(s; st), \\ z^{(n+1)}(xy; st) &= - \int_t^s \int_t^y \left( a(\xi\eta) \frac{\partial z^{(n)}(\xi\eta; st)}{\partial \xi} + b(\xi\eta) \frac{\partial z^{(n)}(\xi\eta; st)}{\partial \eta} \right. \\ &\quad \left. + c(\xi\eta) z^{(n)}(\xi\eta; st) \right) d\xi d\eta. \end{aligned} \right.$$

Hierbei seien  $x, y, s, t$  beliebige komplexe Werte des Bereiches (22). Zunächst überzeugt man sich leicht, daß alle diese  $z^{(n)}$  im Bereiche (22) analytische Funktionen ihrer vier Veränderlichen  $x, y, s, t$  sind; man kann daher die Integrationswege in (25) von  $s$  nach  $x$  und von  $t$  nach  $y$  geradlinig wählen, d. h. man setze

$$x - s = r_1 e^{i\theta_1}, \quad y - t = r_2 e^{i\theta_2}$$

und substituiere in (25)

$$\begin{aligned} \xi &= s + \varrho_1 e^{i\vartheta_1}, & \eta &= t + \varrho_2 e^{i\vartheta_2}, & (0 \leq \varrho_1 \leq r_1) \\ d\xi &= e^{i\vartheta_1} d\varrho_1, & d\eta &= e^{i\vartheta_2} d\varrho_2, & (0 \leq \varrho_2 \leq r_2). \end{aligned}$$

Nunmehr seien  $M$  und  $N$  zwei passend gewählte positive Zahlen derart, daß im Bereiche (21)

$$|a| \leq M, \quad |b| \leq M, \quad |c| \leq M$$

und im Bereiche (22)

$$\left| a \frac{\partial z^0}{\partial x} + b \frac{\partial z^0}{\partial y} + c z^0 \right| \leq N.$$

Konstruiert man jetzt eine neue Folge positiver Funktionen mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$(26) \quad \begin{cases} u_1(r_1, r_2) = \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} N d\varrho_1 d\varrho_2, \\ u_2(r_1, r_2) = M \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \varrho_2} + u_1 \right) d\varrho_1 d\varrho_2, \\ u_{n+1}(r_1, r_2) = M \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial u_n}{\partial \varrho_2} + u_n \right) d\varrho_1 d\varrho_2, \end{cases}$$

so ergeben sich für die Funktionen  $z^{(n)}$  der Formeln (25) und deren Ableitungen die Abschätzungen

$$(27) \quad \begin{cases} |z^{(n)}(xy; st)| \leq u_n(r_1, r_2) \leq u_n(2R, 2R), \\ \left| \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x} \right| \leq \frac{\partial u_n}{\partial r_1}(r_1, r_2) \leq \frac{\partial u_n}{\partial r_1}(2R, 2R), \\ \left| \frac{\partial z^{(n)}}{\partial y} \right| \leq \frac{\partial u_n}{\partial r_2}(r_1, r_2) \leq \frac{\partial u_n}{\partial r_2}(2R, 2R), \\ \left| \frac{\partial^2 z^{(n)}}{\partial x \partial y} \right| \leq \frac{\partial^2 u_n}{\partial r_1 \partial r_2}(r_1, r_2) \leq \frac{\partial^2 u_n}{\partial r_1 \partial r_2}(2R, 2R), \end{cases}$$

wenn das Wertesystem  $x, y, s, t$  dem Bereiche (22) angehört, da dort  $|x - s| \leq 2R$ ,  $|y - t| \leq 2R$  ist. Nun liefern aber die Formeln (26) die sukzessiven Näherungen für die Differentialgleichung

$$(28) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r_1 \partial r_2} = M \left( \frac{\partial u}{\partial r_1} + \frac{\partial u}{\partial r_2} + u \right) + N,$$

und zwar konvergieren *erstens* die Reihen

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \frac{\partial u}{\partial r_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial r_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial r_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial r_2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r_1 \partial r_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial r_1 \partial r_2}$$

gleichmäßig in jedem endlichen Bereich der  $r_1 r_2$ -Ebene und zweitens ist  $u$  ein Integral der Differentialgleichung (28). Andererseits folgt aus der Abschätzung (27), daß die Reihen

$$(29) \quad \begin{aligned} z(xy; st) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n)}(xy; st), & \frac{\partial z}{\partial x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial z^{(n)}}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 z^{(n)}}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

im Bereiche (22) gleichmäßig konvergieren, und somit ist nach einem bekannten Satz von Weierstraß, da die  $z^{(n)}$  sämtlich analytische Funktionen ihrer vier Veränderlichen  $x, y, s, t$  sind, auch die Funktion  $z(xy; st)$  der Formel (29) analytisch in  $x, y, s, t$ .

Zum Schluß beweist man leicht in der üblichen Weise erstens, daß die Reihe  $z$  aus Formel (29) der Differentialgleichung (L) genügt, daß sie zweitens wegen der Voraussetzung (23) für  $x=s$  die Werte  $G(y; st)$  und für  $y=t$  die Werte  $F(x; st)$  annimmt, und daß drittens das Integral der Differentialgleichung (L) durch die Randbedingungen (24) eindeutig bestimmt ist. Damit sind alle Behauptungen des Satzes 1 bewiesen.

10. Es seien  $A(xy)$  und  $B(xy)$  wieder die Funktionen der Formeln (4) aus Abschnitt 1, so daß also

$$(30) \quad -\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} = a, \quad -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} = b$$

ist. Offenbar sind im Bereiche (21)  $A$  und  $B$  überall von Null verschieden.

Nunmehr suchen wir als erste Anwendung des Existenztheorems ein Integral

$$z = Z(xy; st)$$

der Differentialgleichung (L) zu konstruieren, das den speziellen Randbedingungen

$$(31) \quad Z(sy; st) = A(sy), \quad Z(xt; st) = A(xt)$$

genügt.

Da nach Satz 1 die Existenz des Integrals  $Z$  als eine im Bereiche (22) analytische Funktion von  $x, y, s, t$  bereits gesichert ist, so läßt sich  $Z$  in eine Reihe entwickeln, die nach ganzzahligen Potenzen von  $x-s$  fortschreitet:

$$(32) \quad Z(xy; st) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(xy; t) \frac{(x-s)^n}{n!},$$

$$(33) \quad Z_n(xy; t) = (-1)^n \frac{\partial^n Z(xy; st)}{\partial s^n} \Big|_{s=x}.$$

Die Reihe (31) ist, wie man leicht bemerkt, in dem Bereiche

$$(34) \quad |x-s| \leq R-|x|, \quad |x| \leq R, \quad |y| \leq R, \quad |t| \leq R$$

in allen vier Veränderlichen gleichmäßig konvergent. Andererseits sind auch die partiellen Ableitungen nach  $x$  und  $y$  beliebig hoher Ordnung von  $Z(xy; st)$  in gleichmäßig konvergente Potenzreihen der Form (32) entwickelbar; die Reihe (32) ist daher gliedweise differenzierbar, und man erhält nach einfacher Rechnung, wenn man für die Koeffizienten  $a$  und  $b$  die Ausdrücke aus Formel (30) benutzt,

$$(35) \quad L(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( L(Z_n) - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} Z_{n+1} + \frac{\partial Z_{n+1}}{\partial y} \right) \frac{(x-s)^n}{n!},$$

$$\frac{L(Z)}{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{L(Z_n)}{A} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Z_{n+1}}{A} \right) \right) \frac{(x-s)^n}{n!}.$$

Aus der Forderung  $L(Z) = 0$  identisch in  $s$  ergeben sich nunmehr für die Koeffizienten  $Z_n(xy; t)$  die Rekursionsformeln

$$(36) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Z_{n+1}}{A} \right) = - \frac{L(Z_n)}{A} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \rightarrow \infty).$$

Um die Koeffizienten  $Z_n$  aus diesen Rekursionsformeln zu berechnen, berücksichtigt man, daß nach Formel (31)

$$\lim_{y \rightarrow t} \frac{Z(xy; st)}{A(xy)} \rightarrow 1$$

ist. Hieraus folgt für die Funktionen  $Z_n(xy; t)$  aus Formel (32)

$$(37) \quad \lim_{y \rightarrow t} \frac{Z_0(xy; t)}{A(xy)} \rightarrow 1, \quad \lim_{y \rightarrow t} \frac{Z_n(xy; t)}{A(xy)} \rightarrow 0 \quad (n \geq 1).$$

Außerdem ist wegen (33) und (31)

$$Z_0(xy; t) = Z(xy; xt) = A(xy).$$

Mithin führen die Formeln (36) in Verbindung mit (37) zu den neuen Rekursionsformeln

$$(38) \quad Z_0(xy; t) = A(xy), \quad Z_{n+1}(xy; t) = -A(xy) \int_t^y \frac{L(Z_n(x\eta; st))}{A(x\eta)} d\eta,$$

durch welche die Koeffizienten  $Z_n(xy; t)$  eindeutig bestimmt sind.

Entsprechend konstruiert man das Integral  $Z^*(xy; st)$ , das den Randbedingungen

$$Z^*(sy; st) = B(sy), \quad Z^*(xt; st) = B(xt)$$

genügt, indem man

$$(39) \quad Z^*(xy; st) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^*(xy; s) \frac{(y-t)^n}{n!}$$

setzt und die Koeffizienten  $Z_n^*(xy; s)$  aus den Rekursionsformeln

$$(40) \quad Z_0^*(xy; s) = B(xy), \quad Z_{n+1}^*(xy; s) = -B(xy) \int_0^s \frac{L(Z_n^*(\xi y; s))}{B(\xi y)} d\xi$$

bestimmt. Die Reihe (39) ist dann im Bereiche

$$(41) \quad |t-y| \leq R-|y|, \quad |x| \leq R, \quad |y| \leq R, \quad |s| \leq R$$

gleichmäßig konvergent.

11. Es sei  $F(x; st)$  eine im Bereiche

$$|x| \leq R^*, \quad |s| \leq R^*, \quad |t| \leq R^* \quad (R^* \leq R)$$

reguläre analytische Funktion. Wegen  $A(xt) \neq 0$  für  $|x| \leq R, |t| \leq R$ , läßt sich dann die Funktion  $\frac{F(x; st)}{A(xt)}$  in eine im Bereiche

$$|s-x| \leq R^* - |x|, \quad |x| \leq R^*, \quad |t| \leq R^*$$

gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln, welche nach ganzzahligen Potenzen von  $s-x$  fortschreitet, und zwar setze man

$$(42) \quad F(x; st) = A(xt) \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; t) \frac{(x-s)^n}{n!} \right).$$

Hierbei ist

$$f_n(x; t) = \frac{(-1)^n}{A(xt)} \frac{\partial^n F(x; st)}{\partial s^n} \Big|_{s=x}.$$

Nunmehr konstruiere man ein Integral  $u(xy; st)$  der Differentialgleichung (L), das den Randbedingungen

$$(43) \quad u(xt; st) = F(x; st), \quad u(sy; st) = f_0(s; t) A(sy)$$

genügt. Hierbei ist die Bedingung (23) von Satz 1 wegen

$$u(st; st) = F(s; st) = f_0(s; t) A(st)$$

erfüllt.

Das Integral  $u(xy; st)$  läßt sich nach Satz 1' in eine Potenzreihe

$$(44) \quad u(xy; st) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(xy; t) \frac{(x-s)^n}{n!}$$

entwickeln, welche im Bereiche

$$|s-x| \leq R^* - |x|, \quad |x| \leq R^*, \quad |y| \leq R, \quad |t| \leq R^*$$

gleichmäßig konvergiert.



Ebenso wie in Abschnitt 10, Formel (35), ergibt sich

$$(45) \quad \frac{L(u)}{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{L(u_n)}{A} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_{n+1}}{A} \right) \right) \frac{(x-s)^n}{n!}.$$

Berücksichtigt man die Randbedingungen (43) und die Entwicklungen (42) und (44), so folgt

$$\lim_{y \rightarrow t} \frac{u(xy; st)}{A(xy)} = \frac{1}{A(xt)} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{y \rightarrow t} u_n(xy; t) \frac{(x-s)^n}{n!} = \frac{F(x; st)}{A(xt)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; t) \frac{(x-s)^n}{n!}$$

und somit

$$(46) \quad \lim_{y \rightarrow t} \frac{u_n(xy; t)}{A(xy)} = f_n(x; t).$$

Außerdem ist wegen (44) und (43)

$$u_0(xy; t) = u(xy; xt) = f_0(x; t) A(xy).$$

Setzt man nunmehr die Koeffizienten der Reihe (45) gleich Null, so erhält man wegen (46) die Rekursionsformeln

$$(47) \quad \begin{cases} u_0(xy; t) = f_0(x; t) A(xy), \\ u_{n+1}(xy; t) = A(xy) \left( f_{n+1}(x; t) - \int_t^y \frac{L(u_n(x\eta; st))}{A(x\eta)} d\eta \right), \end{cases}$$

durch welche die Koeffizienten  $u_n(xy; t)$  der Potenzreihe (44) eindeutig bestimmt sind.

Entsprechend konstruiert man das Integral  $u^*(xy; st)$  der Differentialgleichung (L), das den Randbedingungen

$$u^*(xt; st) = g_0(t; s) B(xt), \quad u^*(sy; st) = G(y; st)$$

genügt. Hierbei sei  $G(y; st)$  in eine im Bereiche

$$|y - t| \leq R^* - |y|, \quad |y| \leq R^*, \quad |s| \leq R^* \quad (R^* \leq R)$$

gleichmäßig konvergente Potenzreihe

$$G(y; st) = B(sy) \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y; s) \frac{(y-t)^n}{n!} \right)$$

entwickelbar. Man erhält für das Integral  $u^*$  eine im Bereiche

$$|y - t| \leq R^* - |y|, \quad |x| \leq R, \quad |y| \leq R^*, \quad |s| \leq R^*$$

gleichmäßig konvergente Potenzreihe

$$u^*(xy; st) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^*(xy; s) \frac{(y-t)^n}{n!},$$

deren Koeffizienten  $u_n^*$  durch die Rekursionsformeln

$$(48) \quad \begin{cases} u_0^*(xy; s) = g_0(y; s) B(xy), \\ u_{n+1}^*(xy; s) = B(xy) \left( g_{n+1}(y; s) - \int_s^x \frac{L(u_n^*(\xi y; s))}{B(\xi y)} d\xi \right) \end{cases}$$

eindeutig bestimmt sind.

## § 2.

### Laplace'sche Koeffizientenfolgen.

12. Definition 1. Eine unendliche Folge von Funktionen

$$l_0(xy), l_1(xy), l_2(xy), \dots$$

nennen wir eine „Laplace'sche Koeffizientenfolge“ der Differentialgleichung  $(L)$  in bezug auf  $x$ , wenn die Reihe

$$(49) \quad \Sigma \sim \sum_{n=0}^{\infty} l_n(xy) \varphi_n(x) \quad ^{11)}$$

bei formaler, d. h. gliedweiser Differentiation die Differentialgleichung  $L(\Sigma) = 0$  befriedigt für jede beliebige Folge von Funktionen  $\varphi_n(x)$ , welche der Bedingung

$$(50) \quad \frac{d\varphi_{n+1}(x)}{dx} = \varphi_n(x) \quad \text{für alle } n \geq 0$$

genügen. Die Funktionen  $l_n(xy)$  werden wir auch kurz Koeffizienten der Laplacefolge nennen.

Eine unendliche Folge von Funktionen

$$l_0^*(xy), l_1^*(xy), l_2^*(xy), \dots$$

heißt eine Laplace'sche Koeffizientenfolge der Differentialgleichung  $(L)$  in bezug auf  $y$ , wenn die Reihe

$$(51) \quad \Sigma^* \sim \sum_{n=0}^{\infty} l_n^*(xy) \psi_n(y)$$

bei formaler Differentiation die Differentialgleichung  $L(\Sigma^*) = 0$  befriedigt für jede beliebige Folge von Funktionen  $\psi_n(y)$ , welche der Bedingung

$$(52) \quad \frac{d\psi_{n+1}(y)}{dy} = \psi_n(y) \quad \text{für alle } n \geq 0$$

genügen.

Aus der Definition lassen sich für die Funktionen  $l_n(xy)$  der Laplacefolge leicht Rekursionsformeln herleiten. Die formale Differentiation der

<sup>11)</sup> Die Reihe  $\Sigma$  ist als formale Reihe aufzufassen, d. h. sie ist gebildet ohne Rücksicht auf Konvergenz oder Divergenz.

Reihe  $\Sigma$  ergibt nämlich mit Rücksicht auf die Bedingung (50)

$$L(\Sigma) \sim \left( \frac{\partial l_0}{\partial y} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \frac{d\varphi_0}{dx} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( L(l_n) + \frac{\partial l_{n+1}}{\partial y} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} l_{n+1} \right) \varphi_n,$$

und man erhält, wenn man in dieser Reihe die Koeffizienten von  $\varphi_n$  gleich Null setzt:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{l_0}{A} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{l_{n+1}}{A} \right) = - \frac{L(l_n)}{A}$$

oder aber

$$(53) \quad l_0(xy) = f_0(x) A(xy), \quad l_{n+1}(xy) = A(xy) \left( f_{n+1}(x) - \int_t^y \frac{L(l_n(x\eta))}{A(x\eta)} d\eta \right),$$

wobei die  $f_n(x)$  willkürliche analytische Funktionen von  $x$  allein bedeuten.

Man erkennt aus (53) unmittelbar, daß die Koeffizienten einer Laplacefolge in bezug auf  $x$  keineswegs eindeutig bestimmt sind, daß sie vielmehr von einer Folge willkürlicher analytischer Funktionen

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$$

abhängen. Ferner bemerkt man, daß die Rekursionsformeln (53) für die  $l_n(xy)$  mit den Formeln (47) für die Koeffizienten  $u_n(xy; t)$  übereinstimmen, wenn man in (47)  $f_{n+1}(x; t)$  durch  $f_{n+1}(x)$  ersetzt. Wie sich später zeigt, ist es vorteilhaft, die Funktion  $f_0(x)$  immer so zu wählen, daß sie in dem betrachteten Bereich nirgends verschwindet. Dies werde in folgendem ein für allemal vorausgesetzt. Setzt man speziell in (53)

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0,$$

so wird wegen (38)

$$l_n(xy) = Z_n(xy; t).$$

Die Koeffizienten  $Z_n(xy; t)$  bzw.  $u_n(xy; t)$  der Entwicklungen (32) bzw. (44) aus § 1 ergeben sich somit als Koeffizienten einer Laplacefolge in bezug auf  $x$ .

Als Gegenstück zu den Formeln (53) erhält man für die Koeffizienten  $l_n^*(xy)$  einer Laplacefolge in bezug auf  $y$  die Rekursionsformeln

$$(54) \quad l_0^*(xy) = g_0(x) B(xy), \quad l_{n+1}^*(xy) = B(xy) \left( g_{n+1}(y) - \int_t^x \frac{L(l_n^*(\xi y))}{B(\xi y)} d\xi \right),$$

wobei die  $g_n(y)$  willkürliche analytische Funktionen bedeuten. Die Rekursionsformeln (54) für die  $l_{n+1}^*$  stimmen mit den Formeln (48) für die  $u_n^*(xy; s)$  überein. Endlich liefern die Koeffizienten  $Z_n^*(xy; s)$  der Ent-

wicklung (39) den Spezialfall einer Laplacefolge in bezug auf  $y$ , auf den man geführt wird, wenn man

$$g_0(y) = 1, \quad g_1(y) = g_2(y) = \dots = 0$$

wählt.

13. Nachdem wir bemerkt haben, daß die Folge Laplacescher Koeffizienten nicht eindeutig bestimmt ist, wollen wir jetzt untersuchen, wie eine beliebige Laplacefolge  $l_n(xy)$  der Formeln (53) mit den Koeffizienten  $Z_n(xy; t)$  zusammenhängt, oder allgemeiner formuliert, welche Relationen zwischen den Koeffizienten  $l_n(xy)$  und  $l'_n(xy)$  von zwei verschiedenen Laplacefolgen in bezug auf  $x$  bestehen. Wir behaupten nämlich

Satz 2. Es seien

$$l_0(xy), l_1(xy), \dots, l_n(xy), \dots \text{ einerseits}$$

und

$$l'_0(xy), l'_1(xy), \dots, l'_n(xy), \dots \text{ andererseits}$$

zwei Laplacesche Koeffizientenfolgen in bezug auf  $x$ . Dann lassen sich zu jedem  $l'_n(xy)$   $n+1$  analytische Funktionen  $f_{n\nu}(x)$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n$ ) von  $x$  allein bestimmen, derart, daß

$$(55) \quad l'_n(xy) = \sum_{\nu=0}^n f_{n\nu}(x) l_\nu(xy)$$

wird. Die Formel (55) schreiben wir abkürzend

$$l'_n = [l_0, l_1, \dots, l_n]_x,$$

um anzudeuten, daß  $l'_n$  gleich einer homogenen linearen Verbindung der  $n+1$  Funktionen  $l_0, l_1, \dots, l_n$  ist, deren Koeffizienten von  $x$  allein abhängen.

Es seien ferner

$$l_0^*(xy), l_1^*(xy), \dots, l_n^*(xy), \dots$$

$$l_0^{*'}(xy), l_1^{*'}(xy), \dots, l_n^{*'}(xy), \dots$$

zwei Laplacesche Koeffizientenfolgen in bezug auf  $y$ . Dann lassen sich zu jedem  $l_n^{*'}(xy)$   $n+1$  analytische Funktionen  $g_{n\nu}(y)$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n$ ) von  $y$  allein bestimmen, derart, daß

$$(56) \quad l_n^{*'}(xy) = \sum_{\nu=0}^n g_{n\nu}(y) l_\nu^*(xy),$$

oder abkürzend geschrieben:

$$l_n^{*'} = [l_0^*, l_1^*, \dots, l_n^*]_y. \quad (61)$$

Beweis. Wir beweisen zunächst durch vollständige Induktion die Formel

$$(57) \quad l_n = [Z_0, Z_1, \dots, Z_n]_x,$$

wobei wieder unter  $Z_n$  die durch die Rekursionsformel (38) bestimmten Funktionen zu verstehen sind.

Die Formel (57) ist wegen (53) für  $n=0$  sicher richtig; wir zeigen, daß sie auch für  $n+1$  gilt unter der Annahme, daß sie für  $n$  bereits bewiesen ist. Es sei somit etwa

$$(58) \quad l_n(xy) = \sum_{v=0}^n \varphi_{n,v}(x) Z_v(xy; t).$$

Dann ist nach (53)

$$(59) \quad l_{n+1}(xy) = A(xy) \left( f_{n+1}(x) - \int_i^y \frac{L(l_n(xy))}{A(xy)} d\eta \right).$$

Nun ist aber mit Rücksicht auf (58)

$$(60) \quad \begin{aligned} L(l_n) &= \sum_{v=0}^n \varphi_{n,v} L(Z_v) + \frac{d\varphi_{n,v}}{dx} \left( \frac{\partial Z_v}{\partial y} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} Z_v \right), \\ \frac{L(l_n)}{A} &= \sum_{v=0}^n \varphi_{n,v} \frac{L(Z_v)}{A} + \frac{d\varphi_{n,v}}{dx} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Z_v}{A} \right). \end{aligned}$$

Andererseits ist wegen (36) und (38)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Z_0}{A} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Z_v}{A} \right) = - \frac{L(Z_{v-1})}{A} \quad \text{für } v \geq 1.$$

Mithin ergibt sich aus (60), wenn man noch  $\varphi_{n,n+1} = 0$  setzt,

$$\frac{L(l_n)}{A} = \sum_{v=0}^n \left( \varphi_{n,v} - \frac{d\varphi_{n,v+1}}{dx} \right) \frac{L(Z_v)}{A},$$

und man erhält schließlich für (59) die Formel

$$\begin{aligned} l_{n+1}(xy) &= A(xy) \left( f_{n+1}(x) - \sum_{v=0}^n \left( \varphi_{n,v} - \frac{d\varphi_{n,v+1}}{dx} \right) \int_i^y \frac{L(Z_v(xy))}{A(xy)} d\eta \right) \\ &= f_{n+1} Z_0 + \sum_{v=0}^n \left( \varphi_{n,v} - \frac{d\varphi_{n,v+1}}{dx} \right) Z_{v+1} \quad \text{wegen (38)} \\ &= \sum_{v=0}^{n+1} \varphi_{n+1,v}(x) Z_v(xy; t), \end{aligned}$$

wobei

$$(61) \quad \begin{cases} \varphi_{n+1,0}(x) = f_{n+1}(x), & \varphi_{n+1,v}(x) = \varphi_{n,v-1}(x) - \frac{d\varphi_{n,v}}{dx} \quad (v=1, 2, \dots, n), \\ \varphi_{n+1,n+1}(x) = \varphi_{n,n}(x) = \dots = \varphi_{00}(x) = f_0(x) \end{cases}$$

gesetzt ist. Damit ist die Behauptung (57) bewiesen.

Die Beziehungen (61) zeigen gleichzeitig, wie die Funktionen  $\varphi_{n,v}$  der Formel (58) durch Rekursionen gebildet werden, wenn die  $f_n(x)$  gegeben

sind. Es sind z. B.

$$\varphi_{00} = f_0,$$

$$\varphi_{10} = f_1, \quad \varphi_{11} = f_0,$$

$$\varphi_{20} = f_2, \quad \varphi_{21} = f_1 - \frac{df_0}{dx}, \quad \varphi_{22} = f_0,$$

$$\varphi_{30} = f_3, \quad \varphi_{31} = f_2 - \frac{df_1}{dx} + \frac{d^2 f_0}{dx^2}, \quad \varphi_{32} = f_1 - 2 \frac{df_0}{dx}, \quad \varphi_{33} = f_0 \text{ usw.}$$

Die Matrix der  $\varphi_{n\nu}$  ist somit durch die unendliche Folge der Funktionen  $f_0(x), f_1(x), \dots$  eindeutig bestimmt. Da die Funktionen  $f_n(x)$  sämtlich analytisch vorausgesetzt wurden, so sind auch die Funktionen  $\varphi_{n\nu}$  analytische Funktionen von  $x$ .

Die Gleichungen (58) lassen sich nun aber leicht sukzessive nach den  $Z_\nu$  auflösen, denn es war  $\varphi_{n,n}(x) = f_0(x)$  überall von Null verschieden gewählt worden; man erhält somit

$$(62) \quad Z_n(xy) = \sum_{\nu=0}^n \Phi_{n\nu}(x) l_\nu(xy) = [l_0, l_1, \dots, l_n]_x.$$

Andererseits folgt aus (58) auch

$$(63) \quad l'_n = \sum_{\nu=0}^n \varphi'_{n\nu}(x) Z_\nu(xy) = [Z_0, Z_1, \dots, Z_n]_x,$$

oder aber, indem man wegen (62)

$$Z_\nu = [l_0, l_1, \dots, l_\nu]_x$$

in (63) einsetzt,

$$l'_n = \sum_{\nu=0}^n f_{n\nu}(x) l_\nu(xy) = [l_0, l_1, \dots, l_n]_x,$$

und damit ist die Behauptung (55) bewiesen.

Ebenso beweist man die Behauptung (56), indem man nur an Stelle der  $Z_\nu$  die  $Z_\nu^*$  aus Formel (40) benutzt. Damit ist der Satz 2 vollständig bewiesen.

14. Wir gehen dazu über, durch geeignete Spezialisierung für die Funktionen  $f_\nu(x)$  und die Koeffizienten  $l_\nu(xy)$  gleichmäßig konvergente Reihen  $\Sigma$  bzw.  $\Sigma^*$  der Gestalt (49) bzw. (51) zu konstruieren, die gleichzeitig Integrale der Differentialgleichung (L) liefern. Es seien  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$  zwei beliebige im Intervall  $-R \leq x \leq R$  bzw.  $-R \leq y \leq R$  definierte, mindestens einmal stetig differenzierbare Funktionen (die also nicht mehr analytisch sein müssen). Setzt man

$$(64) \quad \varphi_0(x; s) = \varphi(x), \quad \varphi_n(x; s) = \int_0^s \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(\xi) d\xi \quad (n \geq 1),$$

$$(65) \quad \psi_0(y; t) = \psi(y), \quad \psi_n(y; t) = \int_0^t \frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \psi(\eta) d\eta \quad (n \geq 1),$$

so ist

$$\frac{d\varphi_n(x; s)}{dx} = \varphi_{n-1}(x; s), \quad \frac{d\psi_n(y; t)}{dy} = \psi_{n-1}(y; t),$$

d. h. die Funktionen  $\varphi_n(x; s)$  (bzw.  $\psi_n(y; t)$ ) genügen den Bedingungen (50) (bzw. (52)). Man bemerkt dann leicht, indem man auf die Reihen (32) bzw. (39) aus Abschnitt 10, § 1 zurückgeht, daß auch die Reihen

$$(66) \quad z_1(xy; st) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(xy; t) \varphi_n(x; s),$$

$$(67) \quad z_2(xy; st) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^*(xy; s) \psi_n(y; t)$$

in dem Bereiche (34) bzw. (41) gleichmäßig konvergieren und beide Integrale der Differentialgleichung (L) sind.

Berücksichtigt man außerdem noch die Beziehung

$$(68) \quad \lim_{s \rightarrow s} z_1(xy; st) = \varphi(s) A(sy), \quad \lim_{y \rightarrow t} z_1(xy; st) = \varphi(x) A(xt),$$

$$(69) \quad \lim_{s \rightarrow s} z_2(xy; st) = \psi(y) B(sy), \quad \lim_{y \rightarrow t} z_2(xy; st) = \psi(t) B(xt),$$

so zeigt sich, daß  $z_1(xy; st)$  für  $y = t$  (bzw.  $z_2(xy; st)$  für  $x = s$ ) beliebig vorgeschriebene Werte annehmen, indem man die Funktionen  $\varphi(x)$  (bzw.  $\psi(y)$ ) passend wählt. Da endlich ein Integral der Differentialgleichung (L) durch seine Werte für  $x = s$  und  $y = t$  eindeutig bestimmt ist, so folgt der

**Satz 3.** *Jedes Integral der Differentialgleichung  $L(z) = 0$ , das für  $x = s$  die Werte  $\text{const } A(sy)$  annimmt, läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe der Form (66) entwickeln, deren Koeffizienten eine Laplacefolge in bezug auf  $x$  bilden.*

*Jedes Integral der Differentialgleichung  $L(z) = 0$ , das für  $y = t$  die Werte  $\text{const } B(xt)$  annimmt, läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe der Form (67) entwickeln, deren Koeffizienten eine Laplacefolge in bezug auf  $y$  bilden.*

In § 4 wird gezeigt werden, daß sich jedes Integral von  $z$ , sogar in mehrfacher Weise, als Summe  $z = z_1 + z_2$  darstellen läßt, wo  $z_1$  und  $z_2$  wieder die Reihen der Formeln (66) und (67) bedeuten.

15. Bilden wir nunmehr mit den allgemeinen Koeffizienten  $l_n(xy)$  bzw.  $l_n^*(xy)$  der Formeln (53) bzw. (54) die Reihen

$$(70) \quad \Sigma \sim \sum_{n=0}^{\infty} l_n(xy) \varphi_n(x; s), \quad \Sigma^* \sim \sum_{n=0}^{\infty} l_n^*(xy) \psi_n(y; t)$$

unter  $\varphi_n(x; s)$  bzw.  $\psi_n(y; t)$  die Funktionen (64) bzw. (65) verstanden, so können wir fragen: Welches sind die hinreichenden und notwendigen Bedingungen, damit die Reihen  $\Sigma$  bzw.  $\Sigma^*$  für jede Funktion  $\varphi(x)$  bzw.  $\psi(y)$  in einem hinreichend kleinen Bereich gleichmäßig konvergent sind.



Um zunächst eine notwendige Bedingung zu finden, gehen wir in  $\Sigma$  zur Grenze  $y \rightarrow t$  über. Dann ergibt sich wegen (53) und (64)

$$\lim_{y \rightarrow t} \Sigma \sim A(xt) \left( f_0(x) \varphi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(x) \int_t^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \varphi(\xi) d\xi \right).$$

Wählt man speziell  $\varphi(x) = 1$ , so wird

$$\lim_{y \rightarrow t} \Sigma \sim A(xt) \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{(x-s)^n}{n!} \right).$$

Man bemerkt mithin, daß, wenn  $\Sigma$  für  $y = t$  konvergiert, die Reihe

$$(71) \quad F(x; st) = A(xt) \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{(x-s)^n}{n!} \right)$$

notwendig in einem hinreichend kleinen Bereich gleichmäßig konvergiert.

Umgekehrt ist aber diese Bedingung für die Konvergenz von  $\Sigma$  auch hinreichend. Denn bildet man wie in Abschnitt 11 § 1 das Integral  $u(xy; st)$  von (L), das durch die Randbedingungen (43) bestimmt ist, und setzt man  $F(x; st)$  gleich der Reihe (71), so wird wegen (47) und (53)

$$u_n(xy; t) = l_n(xy),$$

und es ergibt sich für das Integral die in einem hinreichend kleinen Gebiet gleichmäßig konvergente Reihe

$$(72) \quad u(xy; st) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(xy) \frac{(x-s)^n}{n!}.$$

Hieraus folgt aber unmittelbar, daß auch die Reihe

$$\Sigma = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(xy) \varphi_n(x; s) = l_0(xy) \varphi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} l_{n+1}(xy) \int_t^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \varphi(\xi) d\xi$$

in demselben Bereich wie die Reihe (72) gleichmäßig konvergiert. Man bemerkt auch leicht, daß dann  $\Sigma$  ein Integral der Differentialgleichung (L) ist.

Indem man die gleiche Überlegung bezüglich der Reihe  $\Sigma^*$  anstellt, wird man zu dem Satz geführt:

**Satz 4.** *Hinreichend und notwendig, daß die Reihen*

$$\Sigma = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(xy) \varphi_n(x; s) \quad \text{bzw.} \quad \Sigma^* = \sum_{n=0}^{\infty} l_n^*(xy) \psi_n(y; t)$$

*in einem genügend kleinen Bereich gleichmäßig konvergieren, ist, daß die Reihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{(x-s)^n}{n!} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y) \frac{(y-t)^n}{n!}$$

in einem hinreichend kleinen Bereich gleichmäßig konvergent sind. Hierbei sind unter  $f_n(x)$  bzw.  $g_n(y)$  die analytischen Funktionen zu verstehen, die in den Rekursionsformeln (53) bzw. (54) bei der Bildung der Koeffizienten  $l_n(xy)$  bzw.  $l_n^*(xy)$  auftreten. Endlich sind die durch die Reihen  $\Sigma$  bzw.  $\Sigma^*$  dargestellten Funktionen Integrale der Differentialgleichung (L).

Ebenso wie in Satz 3 läßt sich leicht zeigen, daß sich auch durch die Reihen  $\Sigma$  (bzw.  $\Sigma^*$ ) der Formel (70) jedes Integral von (L) darstellen läßt, das für  $x=s$  die Werte  $\text{const } A(sy)$  (bzw. für  $y=t$  die Werte  $\text{const } B(xt)$ ) annimmt. Doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden, da es für das Folgende nicht von Wichtigkeit ist.

### § 3.

#### Differentialgleichungen vom Laplaceschen Typus.

16. Definition 2. Wir nennen die Differentialgleichung (L) vom „Laplaceschen Typus“ in bezug auf  $x$ , wenn unter den unendlich vielen Laplaceschen Koeffizientenfolgen  $l_n(xy)$  mindestens eine endliche Folge (73)  $l_0(xy), l_1(xy), \dots, l_n(xy), (l_{n+1}(xy) = l_{n+2}(xy) = \dots = 0)$  existiert.

Die Differentialgleichung (L) heißt vom „Laplaceschen Typus“ in bezug auf  $y$ , wenn unter den unendlich vielen Laplaceschen Koeffizientenfolgen  $l_n^*(xy)$  mindestens eine endliche Folge

$$l_0^*(xy), l_1^*(xy), \dots, l_m^*(xy), (l_{m+1}^*(xy) = l_{m+2}^*(xy) = \dots = 0)$$

existiert.

Der Zusammenhang dieser Definition mit den Ausführungen aus den Abschnitten 2 und 3 der Einleitung erhellt aus

Satz 5. Dann und nur dann, wenn die Differentialgleichung (L) in bezug auf  $x$  oder in bezug auf  $y$  vom „Laplaceschen Typus“ ist, führt die Laplacesche Kaskadenmethode nach einer endlichen Anzahl von Laplaceschen Transformationen zur expliziten Integration der Differentialgleichung (L).

Diesen Satz hat bereits Laplace<sup>12)</sup> formuliert und bewiesen.

17. Wenn eine beliebige Folge von Laplaceschen Koeffizienten  $l_n(xy)$  gegeben ist, so liegt die Frage nahe: Wie kann man aus der vorgelegten Koeffizientenfolge  $l_n(xy)$  erkennen, ob die zugehörige Differentialgleichung (L) in bezug auf  $x$  vom „Laplaceschen Typus“ ist oder nicht. Eine vollständige Antwort auf diese Frage gibt

<sup>12)</sup> Laplace, loc. cit. Fußnote 1), S. 28—35, vgl. auch Darboux, loc. cit. Fußnote 1), Bd. 2, § 334, S. 34—35.

**Satz 6.** Es sei eine Differentialgleichung  $(L)$  und eine zugehörige Laplacesche Koeffizientenfolge  $l_\nu(xy)$  vorgelegt. Ist dann die Differentialgleichung  $(L)$  vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $x$ , so sind notwendig nur endlich viele von den Koeffizienten  $l_\nu(xy)$  in einem gewissen Sinne linear unabhängig; d. h. präzise formuliert: unter den  $l_\nu(xy)$  existieren genau  $n+1$  Funktionen  $l_0(xy), l_1(xy), \dots, l_n(xy)$ , derart, daß für jedes  $\nu$  die Beziehung

$$(74) \quad l_\nu = [l_0, l_1, \dots, l_n]_x$$

gilt.

Andererseits ist eine hinreichende Bedingung für den Laplaceschen Typus, daß für einen einzigen Index  $r$  die Bedingung

$$(75) \quad l_{r+1} = [l_0, l_1, \dots, l_r]_x$$

besteht.

Der Beweis dieses Satzes wird unten in Abschnitt 18 durchgeführt werden. Aus Satz 6 folgt unmittelbar, wenn man in der Differentialgleichung  $(L)$  die Rolle von  $x$  und  $y$  vertauscht:

**Satz 6a.** Ist eine Folge von Laplaceschen Koeffizienten  $l_\nu^*(xy)$  vorgelegt, so existieren notwendig, damit die zugehörige Differentialgleichung  $(L)$  vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $y$  ist,  $m+1$  Koeffizienten  $l_0^*(xy), l_1^*(xy), \dots, l_m^*(xy)$ , derart, daß für jedes  $\mu$

$$l_\mu^* = [l_0^*, l_1^*, \dots, l_m^*]_y$$

ist.

Andererseits ist eine hinreichende Bedingung für den Laplaceschen Typus in bezug auf  $y$ , daß für ein einziges  $r$  die Beziehung

$$l_{r+1}^* = [l_0^*, l_1^*, \dots, l_r^*]_y$$

besteht.

**18. Beweis von Satz 6.** Wir beweisen zunächst, daß die Beziehungen (74) notwendig erfüllt sind, wenn die vorgelegte Differentialgleichung  $(L)$  vom Laplaceschen Typus ist. Für  $0 \leq \nu \leq n$  ist die Behauptung trivial und immer von selbst erfüllt.

Um (74) auch für alle  $\nu \geq n+1$  zu beweisen, mögen wieder die Funktionen  $\hat{l}_\nu(xy)$  aus Formel (73) die endliche Koeffizientenfolge liefern, die zur Differentialgleichung  $(L)$  vom Laplaceschen Typus gehört.

Dann ist nach Satz 2 für jedes  $\nu \geq n+1$

$$(76) \quad l_\nu = [\hat{l}_0, \hat{l}_1, \dots, \hat{l}_\nu]_x = [\hat{l}_0, \hat{l}_1, \dots, \hat{l}_n]_x,$$

da für  $\nu \geq n+1$  nach Formel (73)  $\hat{l}_\nu = 0$  ist. Andererseits ist aber nach Satz 2 auch

$$\hat{l}_x = [l_0, l_1, \dots, l_n]_x \quad \text{für } 0 \leq x \leq n.$$

Setzt man diesen Ausdruck für die Koeffizienten  $\hat{l}_n$  in Formel (76) ein, so ergibt sich

$$l_r = [l_0, l_1, \dots, l_n]_s,$$

womit der erste Teil von Satz 6 bewiesen ist.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, formen wir zunächst die in (75) formulierte hinreichende Bedingung um, indem wir den speziellen Fall von Laplaceschen Koeffizienten  $Z_n(xy; t)$  aus Formel (38)<sup>13)</sup> heranziehen. Nach Satz 2 ist

$$Z_{r+1} = [l_0, l_1, \dots, l_{r+1}]_s.$$

Hieraus folgt aber wegen der Voraussetzung (75)

$$(77) \quad Z_{r+1} = [l_0, l_1, \dots, l_r]_s,$$

und da nach Satz 2 auch umgekehrt

$$(78) \quad l_r = [Z_0, Z_1, \dots, Z_r]_s,$$

so ergibt sich, wenn man (78) in (77) einsetzt,

$$Z_{r+1} = [Z_0, Z_1, \dots, Z_r]_s$$

oder, ausführlicher geschrieben,

$$(79) \quad Z_{r+1}(xy; t_0) = \sum_{q=0}^r \chi_q(x) Z_q(xy; t_0),$$

wobei die  $\chi_q(x)$  wohlbestimmte analytische Funktionen sind. Da nach Formel (38)

$$Z_0(xt_0; t_0) = A(xt_0), \quad Z_r(xt_0; t_0) = 0 \quad \text{für alle } r \geq 1,$$

so folgt aus (79), indem man in (79)  $y = t_0$  setzt,

$$(80) \quad \chi_0(x) A(xt_0) = 0, \quad \chi_r(x) = 0.$$

Sind jetzt andererseits die  $\hat{l}_r(xy)$  Koeffizienten einer weiteren Laplacefolge, so wird

$$\hat{l}_r(xy) = \sum_{n=0}^r \varphi_{r,n}(x) Z_n(xy; t_0),$$

wobei die Funktionen  $\varphi_{r,n}(x)$  durch die Rekursionsformeln (61) mit den Funktionen

$$f_r(x) = \frac{\hat{l}_r(xt_0)}{A(xt_0)} \quad (\text{vgl. Formel (53)})$$

zusammenhängen. Wir suchen nunmehr die Funktionen  $f_q(x)$  für  $q = 0, 1, \dots, r+1$  so zu bestimmen, daß

$$(81) \quad \varphi_{r+1, r+1} = 1, \quad \varphi_{r+1, q} = -\chi_q(x) \quad (0 \leq q \leq r)$$

<sup>13)</sup> Die Abhängigkeit der  $Z_n$  vom Parameter  $t$  ist hier ohne Bedeutung, man denke sich daher für  $t$  eine feste Zahl  $t = t_0$  gewählt.



## § 4.

## Die Kaskadenmethode und die Riemannsche Integrationsmethode.

19. Da das Integral  $z$  der Differentialgleichung ( $L$ ) durch seine Werte für  $x=s$  und  $y=t$  eindeutig bestimmt ist, so erhält man jedes Integral der Differentialgleichung ( $L$ ), indem man seine Werte für  $x=s$  und  $y=t$  willkürlich vorschreibt. Es sei somit etwa

$$(84) \quad z(xt) = f(x), \quad z(sy) = g(y),$$

wobei der den Funktionen  $f$  und  $g$  gemeinsame Wert

$$(85) \quad z(st) = f(s) = g(t) = \zeta$$

gesetzt werde. Hierbei seien  $f(x)$  und  $g(y)$  nicht mehr notwendig analytische Funktionen, sondern es genügt,  $f(x)$  und  $g(y)$  beide einmal stetig differenzierbar vorauszusetzen.

Es gelingt nunmehr leicht, das Integral  $z(xy)$  in der Form

$$(86) \quad z(xy) = z_1(xy; st) + z_2(xy; st)$$

darzustellen, wobei wir mit  $z_1$  und  $z_2$  die Reihen (66) und (67) des Abschnittes 14 aus § 2 bezeichnen. Man substituiere nämlich in den Funktionen  $\varphi_n(x; s)$  und  $\psi_n(y; t)$  aus den Formeln (64) und (65), welche in den Reihen  $z_1$  und  $z_2$  auftreten, für  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$  die Funktionen

$$(87) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{f(x)}{A(xt)} - \gamma \zeta \frac{B(xt)}{B(st)A(xt)}, \\ \psi(y) = \frac{g(y)}{B(sy)} - (1-\gamma) \zeta \frac{A(sy)}{A(st)B(sy)}, \end{cases}$$

unter  $\zeta$  die Konstante aus Formel (85) und unter  $\gamma$  eine willkürlich gewählte Konstante verstanden. Dann ergibt sich mit Rücksicht auf (85)

$$\varphi(s) = (1-\gamma) \frac{\zeta}{A(st)}, \quad \psi(t) = \gamma \frac{\zeta}{B(st)}$$

und ferner, indem man die Formeln (68) und (69) aus § 2 heranzieht,

$$z(xt) = z_1(xt; st) + z_2(xt; st) = \varphi(x) A(xt) + \psi(t) B(xt) = f(x),$$

$$z(sy) = z_1(sy; st) + z_2(sy; st) = \varphi(s) A(sy) + \psi(y) B(sy) = g(y).$$

Die Funktion  $z$  der Formel (86) genügt somit der Differentialgleichung ( $L$ ) und befriedigt die vorgeschriebenen Randbedingungen (84).

Damit ist bewiesen:

**Satz 7.** Jedes beliebige Integral der Differentialgleichung ( $L$ ) läßt sich in Form einer Summe  $z = z_1 + z_2$  darstellen, wobei  $z_1$  (bzw.  $z_2$ ) Reihen bedeuten, welche nach Koeffizienten von Laplacefolgen in bezug auf  $x$  (bzw. in bezug auf  $y$ ) fortschreiten.

20. Die Darstellung (86) für  $z$  ist aber nicht eindeutig bestimmt, da nach Formel (87) die Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$  von einer willkürlichen Konstanten  $\gamma$  abhängen. Setzt man die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  der Formel (87) in die Reihen (66) und (67) für  $z_1$  und  $z_2$  ein, so bemerkt man, daß ebenso wie  $\varphi$  und  $\psi$  auch  $z_1$  und  $z_2$  — und damit auch  $z$  — linear von  $\gamma$  abhängen. Schreibt man für diese Linearform von  $\gamma$

$$z(xy) = u(xy; st) + \gamma v(xy; st),$$

so erhält man nach einfacher Rechnung

$$(88) \quad v(xy; st) = -\zeta \left\{ \frac{B(xt) A(xy)}{A(xt) B(st)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_{n+1}(xy; t)}{B(st)} \int_t^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{B(\xi t)}{A(\xi t)} d\xi \right. \\ \left. - \frac{A(sy) B(xy)}{B(sy) A(st)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_{n+1}^*(xy; s)}{A(st)} \int_t^y \frac{(y-\eta)^n}{n!} \frac{A(s\eta)}{B(s\eta)} d\eta \right\}.$$

Da  $z(xy)$  aber von  $\gamma$  unabhängig ist, so ist notwendig

$$v(xy; st) = 0,$$

d. h. aber es ergibt sich wegen (88) die bemerkenswerte Identität

$$(89) \quad \frac{B(xt) A(xy)}{A(xt) B(st)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_{n+1}(xy; t)}{B(st)} \int_t^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{B(\xi t)}{A(\xi t)} d\xi \\ = \frac{A(sy) B(xy)}{B(sy) A(st)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_{n+1}^*(xy; s)}{A(st)} \int_t^y \frac{(y-\eta)^n}{n!} \frac{A(s\eta)}{B(s\eta)} d\eta.$$

Wir bezeichnen die Funktion, welche durch jede der beiden Seiten der Identität (89) dargestellt wird, mit  $p(xy; st)$ , dann genügt  $p$  bezüglich des ersten Paares von Veränderlichen  $xy$  der Differentialgleichung (L) und den Randbedingungen

$$(90) \quad p(xt; st) = \frac{B(xt)}{B(st)}, \quad p(sy; st) = \frac{A(sy)}{A(st)}.$$

21. Mit Hilfe der Funktion  $p(xy; st)$ , die durch die Randbedingungen (90) eindeutig bestimmt ist, konstruiert Riemann das Integral  $z$  der Differentialgleichung (L), welches den Randbedingungen (84) mit der Zusatzbedingung (85) genügt; und zwar ergibt sich nach Riemann

$$(91) \quad z(xy) = \zeta p(xy; st) + \int_t^x p(xy; \sigma t) \left( \frac{df(\sigma)}{d\sigma} - \frac{1}{B(\sigma t)} \frac{\partial B(\sigma t)}{\partial \sigma} f(\sigma) \right) d\sigma \\ + \int_t^y p(xy; s\tau) \left( \frac{dg(\tau)}{d\tau} - \frac{1}{A(s\tau)} \frac{\partial A(s\tau)}{\partial \tau} g(\tau) \right) d\tau. {}^{14)}$$

<sup>14)</sup> Vgl. Fußnote 7), loc. cit. S. 172 oder Darboux, Fußnote 1), loc. cit. S. 80, Formel (16). Riemann benutzt allerdings an Stelle der Funktion  $p(xy; st)$  eine

(Fortsetzung der Fußnote <sup>14)</sup> auf nächster Seite.)



Wenn man in (91) für  $p$  die Reihen (89) einsetzt, so läßt sich die Darstellung (91) für  $z$  in die Reihenentwicklung (86) des Abschnitts 19

$$(92) \quad z = z_1 + z_2 = \varphi(x) A(xy) + \sum_{n=0}^{\infty} Z_{n+1}(xy; t) \int_0^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \varphi(\xi) d\xi \\ + \psi(y) B(xy) + \sum_{n=0}^{\infty} Z_{n+1}^*(xy; s) \int_0^y \frac{(y-\eta)^n}{n!} \psi(\eta) d\eta$$

überführen. Hier bezeichnen  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$  wieder die von der willkürlichen Konstanten  $\gamma$  abhängigen Funktionen der Formeln (87). Um dies zu zeigen, schreibe man abkürzend

$$F(\sigma) = \frac{df(\sigma)}{d\sigma} - \frac{1}{B(\sigma t)} \frac{\partial B(\sigma t)}{\partial \sigma} f(\sigma) = B(\sigma t) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{f(\sigma)}{B(\sigma t)} \right), \\ G(\tau) = \frac{dg(\tau)}{d\tau} - \frac{1}{A(s\tau)} \frac{\partial A(s\tau)}{\partial \tau} g(\tau) = A(s\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{g(\tau)}{A(s\tau)} \right)$$

und setze

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta p(xy; st) &= \zeta(1-\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(xy; t) \varphi_n^{(2)}(x) \\ &\quad + \zeta \gamma \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^*(xy; s) \psi_n^{(2)}(y), \\ \int_0^x p(xy; \sigma t) F(\sigma) d\sigma &= \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(xy; t) \varphi_n^{(1)}(x), \\ \int_0^y p(xy; s\tau) G(\tau) d\tau &= \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^*(xy; s) \psi_n^{(1)}(y). \end{aligned} \right.$$

Hierbei bezeichnen

$$\varphi_0^{(1)}(x) = \int_0^x \frac{F(\sigma)}{B(\sigma t)} \frac{B(xt)}{A(xt)} d\sigma = \frac{B(xt)}{A(xt)} \left[ \frac{f(\sigma)}{B(\sigma t)} \right]_{\sigma=0}^{\sigma=x} = \frac{f(x)}{A(xt)} - \frac{\zeta B(xt)}{B(st) A(xt)},$$

Funktion  $q(st; xy)$ . Hierbei ist  $q$  bezüglich des ersten Paares von Veränderlichen  $st$  ein Integral der zu  $L(z) = 0$  adjungierten Differentialgleichung

$$M(q) = \frac{\partial^2 q}{\partial s \partial t} + \frac{1}{A(st)} \frac{\partial A(st)}{\partial t} \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{1}{B(st)} \frac{\partial B(st)}{\partial s} \frac{\partial q}{\partial t} \\ + \left( c + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \right) \right) q = 0,$$

das durch die Randbedingungen

$$q(st; xy) = \frac{B(xy)}{B(sy)}, \quad q(xt; xy) = \frac{A(xy)}{A(xt)}$$

eindeutig bestimmt ist. Nachträglich läßt sich aber zeigen, daß die Beziehung

$$q(st; xy) = p(xy; st)$$

besteht. Vgl. etwa Darboux, loc. cit. Fußnote 1), S. 80—81.

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}^{(1)}(x) &= \int_0^x \frac{f(\sigma)}{B(\sigma t)} \left( \int_0^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{B(\xi t)}{A(\xi t)} d\xi \right) d\sigma \\ &= \left[ \frac{f(\sigma)}{B(\sigma t)} \int_0^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{B(\xi t)}{A(\xi t)} d\xi \right]_{\sigma=0}^{\sigma=x} + \int_0^x \frac{f(\sigma)}{B(\sigma t)} \frac{(x-\sigma)^n}{n!} \frac{B(\sigma t)}{A(\sigma t)} d\sigma \\ &= \int_0^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \left( \frac{f(\xi)}{A(\xi t)} - \frac{\zeta B(\xi t)}{B(\sigma t) A(\xi t)} \right) d\xi = \int_0^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \varphi_0^{(1)}(\xi) d\xi,\end{aligned}$$

$$\varphi_0^{(2)}(x) = \frac{B(xt)}{B(st)A(xt)}, \quad \varphi_{n+1}^{(2)}(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \varphi_0^{(2)}(\xi) d\xi,$$

$$\psi_0^{(1)}(y) = \int_0^y \frac{G(\tau)}{A(s\tau)} \frac{A(sy)}{B(sy)} d\tau = \frac{A(sy)}{B(sy)} \left[ \frac{g(\tau)}{A(s\tau)} \right]_{\tau=0}^{\tau=y} = \frac{g(y)}{B(sy)} - \frac{\zeta A(sy)}{A(st)B(sy)},$$

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}^{(1)}(y) &= \int_0^y \frac{G(\tau)}{A(s\tau)} \left( \int_0^y \frac{(y-\eta)^n}{n!} \frac{A(s\eta)}{B(s\eta)} d\eta \right) d\tau \\ &= \int_0^y \frac{(y-\eta)^n}{n!} \left( \frac{g(\eta)}{B(s\eta)} - \frac{\zeta A(s\eta)}{A(st)B(s\eta)} \right) d\eta = \int_0^y \frac{(y-\eta)^n}{n!} \psi_0^{(1)}(\eta) d\eta,\end{aligned}$$

$$\psi_0^{(2)}(y) = \frac{A(sy)}{A(st)B(sy)}, \quad \psi_{n+1}^{(2)}(y) = \int_0^y \frac{(y-\eta)^n}{n!} \psi_0^{(2)}(\eta) d\eta.$$

Setzt man die Reihen (93) in die Darstellung (91) für  $z$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}(94) \quad z &= \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(xy; t) (\varphi_n^{(1)}(x) + \zeta(1-\gamma) \varphi_n^{(2)}(x)) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^*(xy; s) (\psi_n^{(1)}(y) + \zeta\gamma \psi_n^{(2)}(y))\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\varphi_0^{(1)}(x) + \zeta(1-\gamma) \varphi_0^{(2)}(x) = \frac{f(x)}{A(xt)} - \gamma \zeta \frac{B(xt)}{B(st)A(xt)} = \varphi(x) \quad \text{aus Formel (87),}$$

$$\varphi_{n+1}^{(1)}(x) + \zeta(1-\gamma) \varphi_{n+1}^{(2)}(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \varphi(\xi) d\xi,$$

$$\psi_0^{(1)}(y) + \gamma \zeta \psi_0^{(2)}(y) = \frac{g(y)}{B(sy)} - (1-\gamma) \zeta \frac{A(sy)}{A(st)B(sy)} = \psi(y) \quad \text{aus Formel (87),}$$

$$\psi_{n+1}^{(1)}(y) + \gamma \zeta \psi_{n+1}^{(2)}(y) = \int_0^y \frac{(y-\eta)^n}{n!} \psi(\eta) d\eta.$$

Damit ist aber die Übereinstimmung der Riemannschen Darstellung (91) bzw. (94) mit der Reihenentwicklung (92) nachgewiesen.

Die Reihenentwicklungen (89) für  $p$  werden besonders einfach in dem Spezialfall

$$A = B = 1, \quad a = b = 0, \quad c = -h(xy),$$

$$L(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - hz,$$

den man auch die Moutardsche Differentialgleichung nennt. Dann ergibt sich

$$p(xy; st) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(xy; t) \frac{(x-s)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^*(xy; s) \frac{(y-t)^n}{n!}.$$

### § 5.

#### Koeffizienten einer Laplacefolge und Laplacesche Invarianten.

22. Es soll nunmehr eine Beziehung abgeleitet werden welche zwischen den Koeffizienten  $l_v$  (oder  $l_v^*$ ) einer beliebigen Laplacefolge in bezug auf  $x$  (oder in bezug auf  $y$ ) und den in den Abschnitten 1, 2, 3 der Einleitung eingeführten Laplaceschen Invarianten  $h_v$  (oder  $k_v$ ) besteht.

Die Funktionen  $h_v$  und  $k_v$  werden am einfachsten durch Rekursionsformeln bestimmt, indem man setzt<sup>15)</sup>:

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_0 = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x} - c, \\ k_0 = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x} - c, \\ h_1 = 2h_0 - k_0 - \frac{\partial^2 \log h_0}{\partial x \partial y}, \\ k_1 = 2k_0 - h_0 - \frac{\partial^2 \log k_0}{\partial x \partial y}, \\ h_{n+1} = 2h_n - h_{n-1} - \frac{\partial^2 \log h_n}{\partial x \partial y}, \\ k_{n+1} = 2k_n - k_{n-1} - \frac{\partial^2 \log k_n}{\partial x \partial y}. \end{array} \right.$$

Offenbar existiert die Funktion  $h_n(xy)$  in einem Punkte  $xy$  dann und nur dann, wenn in diesem Punkte alle  $n$  Funktionen  $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$  von Null verschieden sind. Entsprechendes gilt für die Funktion  $k_n$ . In diesem Paragraphen sollen nur solche Bereiche betrachtet werden, in dem die Funktionen  $h_v$  und  $k_v$  für  $v = 0, 1, \dots, n$  sämtlich existieren. Sie sind dann in diesen Bereichen gleichzeitig analytische Funktionen, wie aus den Rekursionsformeln (95) unmittelbar hervorgeht.

<sup>15)</sup> Darboux, loc. cit. Fußnote <sup>1)</sup>, S. 28—30, Formel (19), (24) bis (27). Für die von uns mit  $k_0, k_1, \dots, k_n$  bezeichneten Größen schreibt Darboux  $k, k_{-1}, \dots, k_{-n}$ .

Ist die Differentialgleichung  $(L)$  vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $x$ , so verschwindet, wie wir in Abschnitt 2 der Einleitung ausgeführt haben, eine der Invarianten  $h_\nu$ , etwa  $h_n$  identisch, und die Größen  $h_\nu$  sind für  $\nu \geq n+1$  nicht mehr definiert. Entsprechend gilt (vgl. Abschnitt 3), wenn  $(L)$  vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $y$  ist,  $k_m = 0$ ; dann sind die  $k_\mu$  für  $\mu \geq m+1$  nicht mehr definiert.

23. Um zu unseren Relationen zu gelangen, definieren wir für den Fall, daß  $h_n$  bzw.  $k_n$  nicht identisch verschwinden, zwei Differentiations-symbole  $D_h^m, D_k^m$  ( $n \geq m$ ) durch die Gleichungen

$$(96) \quad \begin{cases} D_h^0(u) = \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial y} u(xy), & D_k^0 = \frac{1}{k_0} \frac{\partial}{\partial x} u(xy), \\ D_h^m(u) = \frac{1}{h_n} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_{n-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_{m+1}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_m} \frac{\partial}{\partial y} u(xy) \quad (n \geq m), \\ D_k^m(u) = \frac{1}{k_n} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{k_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x} \dots \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{k_{m+1}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{k_m} \frac{\partial}{\partial x} u(xy) \quad (n \geq m). \end{cases}$$

Nunmehr behaupten wir:

Satz 8. Die Differentialgleichung

$$(L_n) \quad L_n(z_n) = \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + a_n \frac{\partial z_n}{\partial x} + b_n \frac{\partial z_n}{\partial y} + c_n z_n = 0$$

werde aus der Differentialgleichung  $L(z) = 0$  durch  $n$ -malige Laplacesche Transformation abgeleitet, unter der Voraussetzung, daß die Laplacesche Invariante  $h_{n-1}$  nicht identisch verschwindet (vgl. die Ausführungen in den Abschnitten 1 und 2 der Einleitung). Es sei ferner  $A_n$  die in Formel (9) eingeführte Funktion, so daß

$$(97) \quad a_n = -\frac{1}{A_n} \frac{\partial A_n}{\partial y}.$$

Ist jetzt eine  $(L)$  zugehörige Laplacesche Koeffizientenfolge  $l_\nu(xy)$  in bezug auf  $x$  vorgelegt, so ergibt sich

$$D_{h_{n-1}}^0 \left( \frac{l_\nu}{A} \right) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$D_{h_{n-1}}^0 \left( \frac{l_n}{A} \right) = f_0(x),$$

unter  $f_0(x)$  die Funktion aus Formel (53) verstanden.

Setzt man ferner

$$l_\nu^{(n)} = A_n D_{h_{n-1}}^0 \left( \frac{l_{n+\nu}}{A} \right) \quad (\nu = 0, 1, \dots, \rightarrow \infty),$$

so bilden die  $l_\nu^{(n)}$  eine Laplacesche Koeffizientenfolge in bezug auf  $x$ , die zur Differentialgleichung  $(L_n)$  gehört.

Vertauscht man in Satz 8 die Rolle von  $x$  und  $y$ , so erhält man den

**Satz 8a.** Bezeichnet  $l_v^*(xy)$  eine zu  $(L)$  gehörige Laplacesche Koeffizientenfolge in bezug auf  $y$ , so ergibt sich

$$D_k^0 \left( \frac{l_v^*}{B} \right) = 0 \quad (v = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$D_{n-1}^0 \left( \frac{l_n^*}{B} \right) = g_0(y),$$

unter  $g_0(y)$  die Funktion aus Formel (54) verstanden.

Es sei ferner  $(L_{-n})$  diejenige Differentialgleichung, auf welche man nach  $n$  Laplaceschen Transformationen von der Gestalt (12) geführt wird (vgl. die Ausführungen in Abschnitt 3 der Einleitung);  $a_{-n}$ ,  $b_{-n}$ ,  $c_{-n}$  seien die Koeffizienten von  $(L_{-n})$ ,  $B_{-n}$  sei die Funktion aus Formel (9), so daß

$$b_{-n} = -\frac{1}{B_{-n}} \frac{\partial B_{-n}}{\partial x}.$$

Setzt man endlich

$$l_v^{*(-n)} = B_{-n} D_k^0 \left( \frac{l_{n+v}^*}{B} \right) \quad (v = 0, 1, \dots, \rightarrow \infty),$$

so bilden die  $l_v^{*(-n)}$  eine Laplacesche Koeffizientenfolge in bezug auf  $y$ , die zur Differentialgleichung  $(L_{-n})$  gehört.

**24.** Beweis von Satz 8. Wir beweisen die Behauptung zunächst für  $n=1$ . Indem wir von der Transformation (1) ausgehen, ergibt sich mit Rücksicht auf (4)

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} z,$$

$$\frac{z_1}{A} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{A} \right),$$

und wegen Formel (10) und (96)

$$\frac{z_1}{A_1} = \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{A} \right) = D_h^0 \left( \frac{z}{A} \right).$$

Hieraus folgt aber: Ist die Reihe

$$\Sigma \sim \sum_{v=0}^{\infty} l_v(xy) \varphi_v(x)$$

eine beliebige formale Lösung der Differentialgleichung  $(L)$ , wofür nur die  $\varphi_v(x)$  die Bedingungen (50) erfüllen, so muß

$$(98) \quad \Sigma_1 = A_1 D_h^0 \left( \frac{\Sigma}{A} \right) \sim \sum_{v=0}^{\infty} A_1 D_h^0 \left( \frac{l_v}{A} \right) \varphi_v$$

der transformierten Differentialgleichung  $(L_1)$  formal genügen.

Es ist nun aber

$$D_h^0 \left( \frac{l_0}{A} \right) = D_h^0 (f_0(x)) = 0 \quad \text{wegen (53),}$$

$$D_h^0 \left( \frac{l_1}{A} \right) = \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{l_1}{A} \right) = -\frac{1}{h_0} \frac{L(l_0)}{A} \quad \text{wegen (53).}$$

Andererseits wird

$$\begin{aligned} \frac{-L(l_0)}{A} &= \frac{-L(f_0 A)}{A} = -f_0 \left( \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} - \frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} + c \right) \\ &= -f_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} + c \right) = f_0 h_0 \quad \text{wegen (95),} \end{aligned}$$

und somit ist

$$D_h^0 \left( \frac{l_1}{A} \right) = f_0(x),$$

und weiter ergibt sich aus (98)

$$\Sigma_1 \sim A_1 \left( f_0(x) \varphi_1(x) + \sum_{r=1}^{\infty} D_h^0 \left( \frac{l_{r+1}}{A} \right) \varphi_{r+1}(x) \right).$$

Hieraus folgt aber, daß die Funktionen

$$l_0^{(1)} = A_1 D_h^0 \left( \frac{l_1}{A} \right) = A_1 f_0, \quad l_r^{(1)} = A_1 D_h^0 \left( \frac{l_{r+1}}{A} \right)$$

eine Laplacesche Koeffizientenfolge in bezug auf  $x$  der Differentialgleichung  $(L_1)$  bilden. Damit ist die Behauptung des Satzes 8 für  $n=1$  bewiesen.

25. Um Satz 8 auch für allgemeines  $n$  zu beweisen, bedienen wir uns der vollständigen Induktion, nehmen somit an, die Behauptung sei für  $n=\kappa$  richtig und suchen sie nunmehr unter der Voraussetzung  $h_\kappa \neq 0$  für  $n=\kappa+1$  zu beweisen. Es sei demnach

$$(99) \quad \Sigma_\kappa = A_\kappa D_{h_\kappa}^{0, \kappa-1} \left( \frac{\Sigma}{A} \right) \sim \sum_{r=0}^{\infty} l_r^{(\kappa)}(xy) \varphi_{\kappa+r}(x)$$

eine formale Lösung von  $(L_\kappa)$ , wobei

$$(100) \quad l_r^{(\kappa)} = A_\kappa D_{h_\kappa}^{0, \kappa-1} \left( \frac{l_{\kappa+r}}{A} \right) \quad (r=0, 1, \dots, \rightarrow \infty),$$

insbesondere

$$(101) \quad l_0^{(\kappa)} = f_0(x) A_\kappa(xy)$$

ist; außerdem sei

$$(102) \quad D_{h_\kappa}^{0, \kappa-1} \left( \frac{l_r}{A} \right) = 0 \quad (r=0, 1, \dots, \kappa-1).$$

Indem man von der Transformation (8) ausgeht, ergibt sich

$$\begin{aligned} z_{\kappa+1} &= \frac{\partial z_\kappa}{\partial y} - \frac{1}{A_\kappa} \frac{\partial A_\kappa}{\partial y} z_\kappa, \\ \frac{z_{\kappa+1}}{A_{\kappa+1}} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z_\kappa}{A_\kappa} \right). \end{aligned}$$

Nun ist aber nach Formel (10)

$$A_{\kappa+1} = h_\kappa A_\kappa,$$

mithin wegen (96)

$$\frac{z_{\kappa+1}}{A_{\kappa+1}} = D_\kappa^\kappa \left( \frac{z_\kappa}{A_\kappa} \right).$$

Daraus folgt, daß

$$(103) \quad \Sigma_{n+1} = A_{n+1} D_n^* \left( \frac{\Sigma_n}{A_n} \right) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_{n+1} D_n^* \left( \frac{l_r^{(n)}}{A_n} \right) \varphi_{n+r},$$

eine formale Lösung von  $(L_{n+1})$  ist.

Weiter ergibt sich ebenso wie in Abschnitt 24 wegen (101)

$$(104) \quad \begin{aligned} D_n^* \left( \frac{l_0^{(n)}}{A_n} \right) &= D_n^* (f_0) = 0, \\ D_n^* \left( \frac{l_1^{(n)}}{A_n} \right) &= \frac{1}{h_n} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{l_1^{(n)}}{A_n} \right) = -\frac{1}{h_n} \frac{L_n(l_0^{(n)})}{A_n} = -\frac{1}{h_n} \frac{L_n(f_0 A_n)}{A_n} = f_0. \end{aligned}$$

Es ist somit

$$\Sigma_{n+1} \sim A_{n+1} \left( f_0 \varphi_{n+1} + \sum_{r=1}^{\infty} D_n^* \left( \frac{l_{r+1}^{(n)}}{A_n} \right) \varphi_{n+1+r} \right),$$

d. h. aber

$$(105) \quad l_0^{(n+1)} = A_{n+1} D_n^* \left( \frac{l_1^{(n)}}{A_n} \right) = A_{n+1} f_0, \quad l_r^{(n+1)} = A_{n+1} D_n^* \left( \frac{l_{r+1}^{(n)}}{A_n} \right),$$

wobei die  $l_r^{(n+1)}$  die Koeffizienten einer zu  $(L_{n+1})$  gehörigen Laplacefolge in bezug auf  $x$  bezeichnen.

Andererseits ist nach den Definitionsgleichungen (96)

$$D_n^0(u) = D_n^* (D_{n-1}^0(u)).$$

Mithin folgt aus (99) und (103)

$$D_n^0 \left( \frac{\Sigma}{A} \right) = D_n^* \left( D_{n-1}^0 \left( \frac{\Sigma}{A} \right) \right) = D_n^* \left( \frac{\Sigma_n}{A_n} \right) = \frac{\Sigma_{n+1}}{A_{n+1}},$$

ferner aus (102)

$$D_n^0 \left( \frac{l_r}{A} \right) = D_n^* \left( D_{n-1}^0 \left( \frac{l_r}{A} \right) \right) = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n-1),$$

aus (100) und (104)

$$D_n^0 \left( \frac{l_n}{A} \right) = D_n^* \left( D_{n-1}^0 \left( \frac{l_n}{A} \right) \right) = D_n^* \left( \frac{l_0^{(n)}}{A_n} \right) = 0,$$

und endlich aus (100) und (105)

$$D_n^0 \left( \frac{l_{n+1+r}}{A} \right) = D_n^* \left( D_{n-1}^0 \left( \frac{l_{n+1+r}}{A} \right) \right) = D_n^* \left( \frac{l_{r+1}^{(n)}}{A_n} \right) = \frac{l_r^{(n+1)}}{A_{n+1}},$$

insbesondere

$$D_n^0 \left( \frac{l_{n+1}}{A} \right) = \frac{l_0^{(n+1)}}{A_{n+1}} = f_0.$$

Damit sind aber alle Behauptungen des Satzes 8 bewiesen.

Der Satz 8a folgt aus Satz 8, indem man die Rolle von  $x$  und  $y$  vertauscht.



## § 6.

Anwendung der Kaskadenmethode auf ein System von Differentialgleichungen<sup>16)</sup>.

26. Für die in Abschnitt 8 der Einleitung zitierten Anwendungen auf Probleme der Geometrie ist es von Bedeutung, daß sich die in den §§ 1 bis 3 geschilderte Integrationsmethode auch auf andere Typen von Differentialgleichungen anwenden läßt. Wir betrachten zunächst das System von Differentialgleichungen<sup>17)</sup>:

$$(L^*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} v, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} u. \end{cases}$$

Bildet man die Differentialgleichung  $(L)$  mit den Koeffizienten

$$a = -\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y}, \quad b = -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x}, \quad c = 0,$$

so bemerkt man leicht, daß sich aus jedem Integral  $z$  von  $(L)$  eine Lösung des Systems  $(L^*)$  ableiten läßt, indem man setzt

$$u = \frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad v = \frac{1}{B} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Umgekehrt führt jedes Lösungspaar  $u, v$  von  $(L^*)$  zu einem Integral  $z$  von  $(L)$ :

$$(106) \quad z = z_0 + \int_{x_0 y_0}^{xy} u A dx + v B dy,$$

wobei man zu berücksichtigen hat, daß das Kurvenintegral (106) vom Wege unabhängig ist. Es ist aber trotzdem von Bedeutung, das System  $(L^*)$  direkt zu behandeln, ohne auf die Differentialgleichung  $(L)$  zurückzugehen, denn in den Anwendungen wird man auf den Fall<sup>18)</sup> geführt, daß etwa für  $x=0$  die Funktion  $B=0$  wird, mithin die Koeffizienten von  $(L)$  singular werden, während die Koeffizienten von  $(L^*)$  bei geeigneten Voraussetzungen über  $A$  noch regulär bleiben.

Eine Lösung von  $(L^*)$  ist eindeutig bestimmt, wenn die Werte von  $u$  für  $y=t$  und die Werte von  $v$  für  $x=s$  vorgegeben sind. Sind die Randwerte analytische Funktion der Veränderlichen  $x$  bzw.  $y$  und der Para-

<sup>16)</sup> In den §§ 6 und 7 werden ausschließlich solche Integrationsprobleme behandelt, welche in den Untersuchungen des Verfassers zur Theorie der sphärischen Abbildungen im Großen auftreten. Vgl. Fußnote \*).

<sup>17)</sup> loc. cit. Fußnote \*), S. 659–662.

<sup>18)</sup> Vgl. die Problemstellung in der in Fußnote \*) zitierten Arbeit des Verfassers, siehe insbesondere S. 641–643.

meter  $s$  und  $t$ , so zeigt man, indem man ebenso wie beim Beweise von Satz 1 schließt, daß auch  $u$  und  $v$  analytische Funktionen der vier Veränderlichen  $x, y, s, t$  sind.

27. Man betrachte die formalen Reihen

$$(107) \quad \begin{cases} \Sigma_1 \sim f_0(x) \frac{d\varphi_0(x)}{dx} + \sum_{v=0}^{\infty} u_v(xy) \varphi_v(x), \\ \Sigma_2 \sim \sum_{v=0}^{\infty} v_v(xy) \varphi_v(x), \end{cases}$$

wobei die  $\varphi_v(x)$  nur den Bedingungen (50) unterworfen sind. Damit die Reihen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  eine formale Lösung des Systems ( $L^*$ ) liefern, müssen ihre Koeffizienten  $u_v(xy)$ ,  $v_v(xy)$  den Rekursionsformeln

$$(108) \quad \begin{cases} v_0(xy) = f_0(x) \frac{1}{B(xy)} \frac{\partial A(xy)}{\partial y}, \\ u_v(xy) = f_{v+1}(x) + \int_t^y \frac{1}{A(x\eta)} \frac{\partial B(x\eta)}{\partial x} v_v(x\eta) d\eta, \\ v_{v+1}(xy) = \frac{1}{B(xy)} \frac{\partial A(xy)}{\partial y} u_v(xy) - \frac{\partial v_v(xy)}{\partial x} \end{cases}$$

genügen; hierbei bezeichnen die  $f_v(x)$  wieder willkürliche analytische Funktionen. Die Rechnungen, die zu den Formeln (108) führen, entsprechen den Entwicklungen aus Abschnitt 12 § 2. Wir überlassen ihre Durchführung dem Leser.

Die durch die Formeln (108) bestimmten Funktionen  $u_v$ ,  $v_v$  sollen wieder Koeffizienten einer zum System ( $L^*$ ) gehörigen Laplacefolge in bezug auf  $x$  heißen.

Entsprechende Formeln erhält man für die Koeffizienten einer Laplacefolge in bezug auf  $y$ , indem man von den Reihen

$$(109) \quad \begin{cases} \Sigma_1^* \sim + \sum_{v=0}^{\infty} u_v^*(xy) \varphi_v(y), \\ \Sigma_2^* \sim g_0(y) \frac{d\psi_0(y)}{dy} + \sum_{v=0}^{\infty} v_v^*(xy) \varphi_v(y) \end{cases}$$

ausgeht.

28. Aus den Formeln (108) folgert man ebenso wie im Abschnitt 13 § 2 ein Gegenstück zu Satz 2, nämlich den

**Satz 9.** Sind zwei verschiedene zum System ( $L^*$ ) gehörige Laplacesche Koeffizientenfolgen  $u_v$ ,  $v_v$  und  $u'_v$ ,  $v'_v$  in bezug auf  $x$  vorgelegt, so gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} u'_v &= [1, u_0, u_1, \dots, u_v]_x, \\ v'_v &= [v_0, v_1, \dots, v_v]_x. \end{aligned}$$

Sind zwei verschiedene zum System  $(L^*)$  gehörige Laplacesche Koeffizientenfolgen  $u^*, v^*$  und  $u^{**}, v^{**}$  in bezug auf  $y$  vorgelegt, so gelten die Beziehungen

$$u^{**} = [u_0^*, u_1^*, \dots, u_r^*]_y,$$

$$v^{**} = [1, v_0^*, v_1^*, \dots, v_r^*]_y.$$

Die Frage, wann die Reihen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  bzw.  $\Sigma_1^*$  und  $\Sigma_2^*$  konvergieren, wird entsprechend zu Satz 4 beantwortet durch

Satz 10. Substituiert man für die  $\varphi_r(x)$  die Funktionen  $\varphi_r(x; s)$  aus Formel (64), so konvergieren die Reihen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  dann und nur dann, wenn die Potenzreihe

$$F(x; s) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(x) \frac{(x-s)^r}{r!}$$

wenigstens in einem hinreichend kleinen Bereich der  $x$ -Ebene konvergiert. Hierbei sind unter den  $f_r(x)$  die Funktionen der Rekursionsformeln (108) zu verstehen. Die Konvergenz der Reihen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  ist dann in einem hinreichend kleinen Bereich der  $x$ -Ebene gleichmäßig, und außerdem liefern die Reihen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  eine Lösung des Systems  $(L^*)$ .

Ein entsprechender Satz gilt auch für die Konvergenz der Reihen  $\Sigma_1^*$  und  $\Sigma_2^*$  der Formeln (109).

Der Beweis des Satzes 10 wird ebenso wie der Beweis des entsprechenden Satzes 4 in Abschnitt 15 § 2 geführt, und zwar geht man von einer Lösung  $u, v$  des Systems  $(L^*)$  aus, die durch die Randwerte

$$u(xt) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(x) \frac{(x-s)^r}{r!}, \quad v(st) = 0.$$

bestimmt ist, und entwickelt diese Lösung in Potenzreihen

$$u = f_0(x) + \sum_{r=0}^{\infty} u_r(xy; t) \frac{(x-s)^{r+1}}{(r+1)!},$$

$$v = \sum_{r=0}^{\infty} v_r(xy; t) \frac{(x-s)^{r+1}}{(r+1)!}.$$

Dann ergeben sich zur Bestimmung der Koeffizienten  $u_r(xy; t)$ ,  $v_r(xy; t)$  Rekursionsformeln, die mit (108) übereinstimmen.

Das allgemeine Integral von  $(L^*)$  läßt sich immer als Summe der Reihen (107) und (109)

$$u = \Sigma_1 + \Sigma_1^*, \quad v = \Sigma_2 + \Sigma_2^*$$

darstellen; man sieht dies leicht ein, indem man die Schlüsse des Beweises von Satz 7 in Abschnitt 19 geeignet abändert.

29. Wir sagen: Das System  $(L^*)$  ist vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $x$ , wenn unter den Laplaceschen Koeffizientenfolgen  $u_v, v_v$  mindestens eine existiert, die endlich ist, d. h. bei der  $u_v(xy) = v_v(xy) = 0$  für  $v \geq n+1$ . Entsprechend wird der Laplacesche Typus in bezug auf  $y$  definiert, indem man verlangt, daß mindestens eine der Koeffizientenfolgen  $u_v, v_v$  endlich ist.

Ebenso wie man in den Abschnitten 17 und 18 des § 3 den Satz 6 aus dem Satz 2 herleitet, folgert man hier aus Satz 9 den

Satz 11. Das System  $(L^*)$  sei vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $x$ . Bilden die Funktionen  $u_v(xy), v_v(xy)$  eine beliebige zu  $(L^*)$  gehörige Laplacesche Koeffizientenfolge, so gelten notwendig für alle  $v$  die Beziehungen

$$u_v = [1, u_0, u_1, \dots, u_n]_x,$$

$$v_v = [v_0, v_1, \dots, v_n]_x.$$

Damit umgekehrt das System  $(L^*)$  vom Laplaceschen Typus in bezug auf  $x$  ist, ist bereits hinreichend, daß für eine beliebige zu  $(L^*)$  gehörige Laplacesche Koeffizientenfolge  $u_v, v_v$  für einen einzigen Index  $v$  die Beziehung

$$v_{v+1} = [v_0, v_1, \dots, v_v]_x$$

erfüllt ist.

Einen entsprechenden Satz findet man für ein System  $(L^*)$ , das in bezug auf  $y$  vom Laplaceschen Typus ist.

## § 7.

Anwendung der Kaskadenmethode auf Integrodifferentialgleichungen.

30. Satz 12. Es bezeichne wieder  $L(z)$  den in Abschnitt 1 eingeführten Differentialausdruck,  $\alpha(xy), \beta(xy)$  zwei Funktionen, die ebenso wie  $a, b, c$  im Bereiche

$$(110) \quad |x| \leq R, \quad |y| \leq R$$

analytische sind. Es sei endlich  $t_0$  eine feste komplexe Zahl derart, daß  $|t_0| < R$  und  $t$  ein beliebiger komplexer Wert des Bereiches

$$0 \leq |t| \leq R - |t_0|.$$

Nunmehr bilde man die Integrodifferentialgleichung<sup>19)</sup>

$$(A) \quad A(z) = L(z) + \alpha(xy) \int_t^{t+t_0} \beta(\alpha\tau) z(\alpha\tau) d\tau = 0.$$

<sup>19)</sup> Diese Integrodifferentialgleichung liegt den Untersuchungen zugrunde, welche in einem zweiten Teile der in Fußnote \*) zitierten Arbeit des Verfassers durchgeführt werden.

Es seien ferner  $F(x; st)$  und  $G(y; st)$  zwei im Bereiche

$$(111) \quad |x| \leq R, \quad |y| \leq R, \quad |s| \leq R, \quad |t| \leq R - |t_0|$$

analytische Funktionen von  $x, s, t$  bzw.  $x, s, t$ , welche der Beziehung

$$F(s; st) = G(t; st)$$

genügen. Dann existiert ein im Bereiche (111) eindeutig bestimmtes Integral  $z(xy; st)$ , das für  $x = s$  und  $y = t$  die Randwerte

$$(112) \quad z(sy; st) = G(y; st), \quad z(xt; st) = F(x; st)$$

annimmt, und in jedem Punkte des Bereiches eine reguläre analytische Funktion seiner vier Veränderlichen  $x, y, s, t$  ist.

Beweis. Man transformiere die Integrodifferentialgleichung (A), indem man

$$z = Az'$$

substituiert, unter  $A$  wieder die Funktion der Formel (4) verstanden. Eine einfache Rechnung ergibt, daß dann  $z'$  der Integrodifferentialgleichung

$$(A') \quad A'(z') = \frac{\partial z'}{\partial x \partial y} + b' \frac{\partial z'}{\partial y} + c' z' + \alpha'(xy) \int_t^{t+t_0} \beta'(x\tau) z'(x\tau) d\tau$$

genügen muß. Hierbei ist

$$b' = b + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x}, \quad c' = c + \frac{1}{A} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right), \quad \alpha' = \frac{\alpha}{A}, \quad \beta' = \beta A$$

gesetzt.

Nunmehr suche man ein Integral  $z'$  von (A') zu konstruieren, welches die Randwerte

$$(113) \quad z'(sy; st) = \frac{G(y; st)}{A(sy)}, \quad z'(xt; st) = \frac{F(x; st)}{A(xt)}$$

annimmt. Indem man jetzt ebenso verfährt wie beim Beweise des Satzes 1, benutze man das Verfahren der sukzessiven Approximation und bilde nacheinander die Funktionen

$$z^0(xy; st) = \frac{F(x; st)}{A(xt)} + \frac{G(y; st)}{A(sy)} - \frac{F(s; st)}{A(st)},$$

$$(114) \quad z^{(n+1)}(xy; st) = - \iint_s^y \left( b'(\xi\eta) \frac{\partial z^{(n)}}{\partial \eta} + c'(\xi\eta) z^{(n)} + \alpha'(\xi\eta) \int_t^{t+t_0} \beta'(\xi\tau) z^{(n)}(\xi\tau) d\tau \right) d\xi d\eta$$

Hierbei seien  $x, y, s, t$  beliebige komplexe Werte des Bereiches (111).

Nachdem man sich überzeugt hat, daß alle diese Funktionen  $z^{(n)}$  im Bereiche (111) analytische Funktionen ihrer vier Veränderlichen  $x, y, s, t$  sind, wähle man geradlinige Integrationswege, setze zu diesem Zwecke

$$x - s = r_1 e^{i\theta_1}, \quad y - t = r_2 e^{i\theta_2}, \quad t_0 = r_0 e^{i\theta_0}$$

und substituiere in (114)

$$\xi = s + \varrho_1 e^{i\vartheta_1}, \quad \eta = t + \varrho_2 e^{i\vartheta_2}, \quad \tau = t + \varrho_0 e^{i\vartheta_0},$$

$$d\xi = e^{i\vartheta_1} d\varrho_1, \quad d\eta = e^{i\vartheta_2} d\varrho_2, \quad d\tau = e^{i\vartheta_0} d\varrho_0.$$

Nunmehr seien  $M$  und  $N$  zwei geeignet gewählte positive Zahlen derart, daß im Bereiche (110)

$$|b'| \leq M, \quad |c'| \leq M, \quad |a'| \leq \sqrt{M}, \quad |\beta'| \leq \sqrt{M}$$

und im Bereiche (111)

$$\left| b' \frac{\partial z^0}{\partial y} + c' z^0 + a' \int_t^{t+t_0} \beta' z^0 d\tau \right| \leq N.$$

Konstruiert man jetzt eine neue unendliche Folge positiver Funktionen

$$u_1(r_1, r_2) = \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} N d\varrho_1 d\varrho_2,$$

$$u_{n+1}(r_1, r_2) = M \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} \left( \frac{\partial u_n}{\partial \varrho_2} + u_n + \int_0^{r_2} u_n(\varrho_1 \varrho_0) d\varrho_0 \right) d\varrho_1 d\varrho_2,$$

so ergeben sich für alle Funktionen  $z^{(n)}$  und deren Ableitungen die Abschätzungen

$$(115) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial^2 z^{(n)}}{\partial x \partial y} \right| \leq \left| \frac{\partial^2 u_n(r_1, r_2)}{\partial r_1 \partial r_2} \right| \leq \left| \frac{\partial^2 u_n(2R, 2R)}{\partial r_1 \partial r_2} \right|, \\ \left| \frac{\partial z^{(n)}}{\partial y} \right| \leq \left| \frac{\partial u_n(r_1, r_2)}{\partial r_2} \right| \leq \left| \frac{\partial u_n(2R, 2R)}{\partial r_2} \right|, \\ |z^{(n)}| \leq |u_n(r_1, r_2)| \leq |u_n(2R, 2R)|, \end{cases}$$

wenn das Wertesystem  $x, y, s, t$  dem Bereiche (111) angehört, da dort

$$|x - s| = r_1 \leq 2R, \quad |y - t| = r_2 \leq 2R$$

ist.

Setzt man noch

$$M' = M(1 + 2R(1 + r_0)),$$

so verifiziert man leicht durch vollständige Induktion die Abschätzungen

$$\left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial r_1 \partial r_2} \right| \leq N, \quad \left| \frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial r_1 \partial r_2} \right| \leq NM'^n \frac{r_1^n}{n!},$$

$$\left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial r_2} \right| \leq NM'^n \frac{r_1^{n+1}}{(n+1)!}, \quad |u_{n+1}| \leq 2RNM'^n \frac{r_1^{n+1}}{(n+1)!},$$

und hieraus folgt unmittelbar die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^2 u_n(2R, 2R)}{\partial r_1 \partial r_2} \right|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial u_n(2R, 2R)}{\partial r_2} \right|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(2R, 2R)|.$$

Schließlich bilde man die Reihen

$$(116) \quad z'(xy; st) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n)}(xy; st),$$

$$\frac{\partial z'}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial z^{(n)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 z^{(n)}}{\partial x \partial y},$$

dann konvergieren diese Reihen wegen (115) gleichmäßig im Bereich (111), stellen dort analytische Funktionen dar und liefern ein Integral von  $(A')$ , welches, wie man leicht bemerkt, die vorgeschriebenen Randwerte (113) annimmt.

Multipliziert man die Funktion  $z'$  aus Formel (116) mit  $A(xy)$ , so erhält man offenbar ein Integral  $z$  von  $(A)$ , das im Bereiche (111) regulär analytisch ist und den gestellten Randbedingungen (112) genügt. Damit ist der Beweis der Existenzbehauptung aus Satz 12 vollständig erbracht.

Der Beweis der Eindeutigkeitsbehauptung folgt in der üblichen Weise, indem man ihn zunächst für die Integrodifferentialgleichung  $(A')$  durchführt.

31. Man bilde jetzt eine unendliche Folge von Funktionen

$$\lambda_0(xy), \lambda_1(xy), \dots, \lambda_n(xy), \dots$$

mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$(117) \quad \lambda_0 = f_0(x) A(xy), \quad \lambda_{n+1} = A(xy) \left( f_{n+1}(x) - \int_{\eta}^y \frac{A(\lambda_n)}{A(x\eta)} d\eta \right).$$

Hierbei bezeichnen die  $f_n(x)$  wieder beliebige im Bereiche  $0 \leq |x| \leq R$  reguläre analytische Funktionen. Man bemerkt dann leicht, daß die Reihe

$$\Sigma \sim \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(xy) \varphi_n(x)$$

für jede Folge von Funktionen  $\varphi_n(x)$ , die den Bedingungen (50) genügen, die Integrodifferentialgleichung  $(A)$  formal befriedigt. Wir nennen daher die durch die Rekursionsformeln (117) bestimmten Funktionen  $\lambda_n(xy)$  eine zu  $(A)$  gehörige Laplacesche Koeffizientenfolge in bezug auf  $x$ .

*In der Integrodifferentialgleichung  $(A)$  ist die Veränderliche  $y$  durch die Integration im letzten Gliede von  $(A)$  ausgezeichnet. Damit hängt zusammen, daß sich zu  $(A)$  zwar eine Laplacefolge in bezug auf  $x$ , aber offenbar keine Laplacefolge in bezug auf  $y$  konstruieren läßt.*

32. Indem man von den Formeln (117) ausgeht und ebenso schließt wie beim Beweise von Satz 2 in Abschnitt 13, erhält man als Gegenstück zu Satz 2 den

Satz 13. Sind  $\lambda_n(xy)$  und  $\lambda'_n(xy)$  die Koeffizienten von zwei verschiedenen zu  $(A)$  gehörigen Laplacefolgen in bezug auf  $x$ , so besteht die Beziehung

$$\lambda'_n = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n]_x.$$



Aus Satz 12 folgt man leicht das Analogon zu Satz 4 (vgl. den Beweis in Abschnitt 15, § 2), nämlich den

**Satz 14.** *Bezeichnen  $\varphi_n(x; s)$  wieder die Funktionen aus Formel (64), welche von einer willkürlichen Funktion  $\varphi(x)$  abhängen, so ist die Reihe*

$$(118) \quad z(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(xy) \varphi_n(x; s)$$

*für jede beliebige einmal stetig differenzierbare Funktion  $\varphi(x)$  in einem hinreichend kleinen Bereich*

$$|x - s| \leq \delta, \quad |y - t| \leq \delta$$

*dann und nur dann gleichmäßig konvergent, wenn die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{(x-s)^n}{n!}$$

*in einem hinreichend kleinen Bereiche gleichmäßig konvergiert; hierbei sind mit  $f_n(x)$  wieder die Funktionen aus den Rekursionsformeln (117) bezeichnet. Im Konvergenzfall ist dann die durch die Reihe (118) dargestellte Funktion  $z$  ein Integral von  $(A)$ .*

Durch eine Reihe der Form (118) lassen sich nur solche Integrale  $z$  von  $(A)$  darstellen, welche Randwerte der Gestalt

$$z(sy) = \text{konst. } A(sy), \quad z(xt) \text{ beliebig}$$

annehmen. Somit liefert die Kaskadenmethode hier nicht das allgemeine Integral von  $(A)$ , da keine  $(A)$  zugehörige Laplacefolgen in bezug auf  $y$  existieren.

**33.** Wir nennen die Integrodifferentialgleichung  $(A)$  vom Laplaceschen Typus, wenn unter den unendlich vielen Laplaceschen Koeffizientenfolgen  $\lambda_n(xy)$  mindestens eine endliche Folge

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \quad (\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \dots = \lambda_{n+v} = \dots = 0)$$

existiert.

Ebenso wie man in den Abschnitten 17 und 18 aus Satz 2 den Satz 6 herleitet, folgt man hier aus Satz 13 den

**Satz 15.** *Die Integrodifferentialgleichung  $(A)$  sei vom Laplaceschen Typus. Bilden die Funktionen  $\lambda_\nu(xy)$  eine beliebige zu  $(A)$  gehörige Laplace'sche Koeffizientenfolge, so gelten notwendig für alle  $\nu$  die Beziehungen*

$$\lambda_\nu = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n]_\nu.$$

*Damit umgekehrt  $(A)$  vom Laplaceschen Typus ist, ist bereits hinreichend, daß für eine beliebige zu  $(A)$  gehörige Laplace'sche Koeffizien-*

tenfolge  $\lambda_r$  für einen einzigen Index  $r$  die Beziehung

$$\lambda_{r+1} = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r]$$

erfüllt ist.

34. Zum Schluß noch einige Bemerkungen über das System von Integrodifferentialgleichungen<sup>20)</sup>:

$$(A^*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} v + \alpha(xy) \int_t^{t+t_0} \beta(x\eta) v(x\eta) d\eta, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} u. \end{cases}$$

Auch dieses System besitzt eine Folge von Laplaceschen Koeffizienten in bezug auf  $x$  (aber nicht in bezug auf  $y$ !). Setzt man

$$v_0 = f_0(x) \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y},$$

$$u_r = f_{r+1}(x) + \int_t^y \left( \frac{1}{A(x\eta)} \frac{\partial B(x\eta)}{\partial x} v_r(x\eta) + \alpha(x\eta) \int_t^{t+t_0} \beta(x\tau) v_r(x\tau) d\tau \right) d\eta,$$

$$v_{r+1} = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} u_r - \frac{\partial v_r}{\partial x},$$

und bildet man mit diesen Koeffizienten  $u_r$  und  $v_r$  die Reihen  $\Sigma_1, \Sigma_2$  der Formeln (107) aus § 6, so liefern nunmehr  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  eine formale Lösung des Systems  $(A^*)$ .

Man bemerkt schließlich leicht, daß die Sätze 9, 10, 11 des § 6 auch noch richtig bleiben, wenn man sie auf solche Laplacesche Koeffizientenfolgen  $u_r, v_r$  in bezug auf  $x$  anwendet, welche zu dem System  $(A^*)$  gehören.

<sup>20)</sup> Dieses System ist in Kapitel IV der in Fußnote \*) zitierten Arbeit untersucht worden. Der Existenzbeweis für die Lösung ist dort S. 674–676 durchgeführt; er läßt sich leicht entsprechend den Beweisen von Satz 1 und Satz 12 derart ergänzen, daß die Lösung als eine analytische Funktion ihrer Veränderlichen und der bei den Randbedingungen auftretenden Parameter erscheint. Vgl. auch die Ausführungen loc. cit. S. 703–704.

## Ganze transzendente Funktionen mit rationalen Taylorkoeffizienten und vorgeschriebenen Nullstellen.

Von

Oskar Perron in München.

I. Wenn eine rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten eine algebraische Zahl zur Nullstelle hat, so sind alle konjugierten Zahlen ebenfalls Nullstellen. Im Gegensatz dazu hat Herr Molien kürzlich gezeigt, daß eine meromorphe Funktion mit rationalen Taylorkoeffizienten sehr wohl eine quadratische Irrationalzahl zur Nullstelle haben kann, ohne daß die konjugierte Zahl ebenfalls Nullstelle ist<sup>1)</sup>. Genau dasselbe ist aber schon mehr als 40 Jahre früher von Strauß festgestellt worden, der sogar eine *ganze* Funktion dieser Art konstruierte. Allgemeiner hat Dedekind gezeigt, daß es ganze transzendente Funktionen mit rationalen Taylorkoeffizienten gibt, die eine beliebige reelle Zahl zur Nullstelle haben und *sonst überhaupt keine reelle Nullstelle mehr besitzen*. Noch viel allgemeiner ist aber ein Ergebnis von Hurwitz, das besagt, daß es zu jeder ganzen (rationalen oder transzendenten) Funktion  $f(z)$  mit *reellen* Taylorkoeffizienten eine andere  $F(z)$  mit *rationalen* Taylorkoeffizienten gibt, die genau die gleichen Nullstellen hat<sup>2)</sup>.

Die Konstruktion von Hurwitz besteht einfach darin, daß er eine ganze Funktion  $g(z)$  derart bestimmt, daß die Funktion

$$f(z) e^{g(z)} = F(z)$$

<sup>1)</sup> Th. Molien, Über gewisse transzendente Gleichungen, Math. Annalen 103 (1930), S. 35—37.

<sup>2)</sup> Emil Strauß, Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst funktionentheoretischer Anwendung, Acta Mathematica 11 (1887), S. 13—18. — R. Dedekind, Über Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1 (1892), S. 33—35. — A. Hurwitz, Über beständig konvergierende Potenzreihen mit rationalen Zahlenkoeffizienten und vorgeschriebenen Nullstellen, Acta Mathematica 14 (1891), S. 211—215. (Diese Literaturangaben verdanke ich Herrn Blumenthal.)

rationale Taylorkoeffizienten bekommt, was sich auf unendlich viele Arten machen läßt. Dabei wird im allgemeinen  $g(z)$  transzendent und  $F(z)$  eine ganze Funktion von unendlicher Ordnung sein. Aus den anders gearteten Konstruktionen von Strauß und Dedekind läßt sich über die Ordnung der konstruierten Funktion direkt nichts entnehmen. Hiernach scheint immer noch die folgende Frage offen und vielleicht nicht ohne Interesse:

Gibt es eine ganze Funktion endlicher Ordnung mit rationalen Taylorkoeffizienten, die eine gegebene irrationale (z. B. algebraische) Zahl  $\alpha$  zur Nullstelle hat, die aber endlich viele andere Zahlen  $\alpha_r$  (z. B. die zu  $\alpha$  konjugierten Zahlen) nicht zu Nullstellen hat oder die überhaupt keine Nullstelle außer  $\alpha$  besitzt?

Von diesen Fragen ist die erste, wie man wohl erwartet, zu bejahen, die zweite (durch „oder die“ eingeleitete) aber, was man nach allem Vorausgegangenen kaum mehr erwarten wird, zu verneinen.

II. Die angedeutete bejahende Antwort ist als Teilresultat enthalten in dem

Satz 1. Sei  $R$  eine positive beliebig große Zahl und  $\varrho$  eine reelle nicht negative Zahl; sei ferner  $f(z)$  ein nicht identisch verschwindendes Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann gibt es eine ganze Funktion  $F(z)$  der Ordnung  $\varrho$  mit rationalen Taylorkoeffizienten, deren Nullstellen, soweit sie im Kreis  $|z| \leq R$  liegen, sich mit den Nullstellen von  $f(z)$  decken.

Die Antwort auf unsere Frage ergibt sich hieraus, indem man  $f(z) = z - \alpha$  setzt und  $R$  größer wählt als die absoluten Beträge der endlich vielen andern Zahlen  $\alpha_r$ . Zum Beweis von Satz 1 setzen wir

$$(1) \quad f(z) = z^h(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots), \quad a_0 \neq 0,$$

wo  $h \geq 0$  ist und wo die  $a_r$  reell sind und von einem gewissen  $\nu$  an alle verschwinden. Der Satz wird bewiesen sein, wenn wir eine ganze Funktion der Ordnung  $\varrho$

$$(2) \quad g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

derart angeben können, daß  $g(z)$  für  $|z| \leq R$  nicht verschwindet und daß das Produkt  $f(z)g(z) = F(z)$  rationale Taylorkoeffizienten bekommt. Wir setzen also

$$(3) \quad (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) = r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \dots$$

und müssen es dann so einrichten, daß die  $r_r$  rational werden. Nach Ausmultiplizieren ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung

$$(4) \quad \begin{cases} a_0 b_0 = r_0, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = r_1, \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = r_2, \\ \dots \end{cases}$$

Wir wählen nun  $r_0$  irgendwie als rationale Zahl, aber so, daß die aus der ersten Gleichung (4) zu berechnende reelle Zahl  $b_0$  größer als 1 wird. Sodann wählen wir  $r_1$  als rationale Zahl so, daß die aus der zweiten Gleichung (4) zu berechnende reelle Zahl  $b_1$  ins Intervall

$$\frac{1}{3R} < b_1 < \frac{1}{2R}$$

fällt. Allgemein wählen wir, nachdem  $r_0, \dots, r_{v-1}$  bereits gewählt und die Zahlen  $b_0, \dots, b_{v-1}$  der Reihe nach aus den ersten  $v$  Gleichungen (4) berechnet sind,  $r_v$  als rationale Zahl so, daß die aus der  $(v+1)$ -ten Gleichung (4) zu berechnende reelle Zahl  $b_v$  ins Intervall

$$(5) \quad \frac{1}{(8R)^v(v!)^\mu} < b_v < \frac{1}{(2R)^v(v!)^\mu}, \quad \text{wobei } \mu = \begin{cases} \frac{1}{\varrho} & \text{für } \varrho \neq 0, \\ v & \text{für } \varrho = 0, \end{cases}$$

fällt. Da die rationalen Zahlen überall dicht liegen, ist eine solche Wahl immer möglich. Die so konstruierte Funktion (2) ist wegen der Ungleichungen (5) nach der Hadamardschen Theorie eine ganze transzendente Funktion der Ordnung  $\varrho$ . Ferner hat die Produktfunktion (3) rationale Taylorkoeffizienten  $r_v$ . Endlich ist für  $|z| \leq R$

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots| \\ &\geq b_0 - \sum_{v=1}^{\infty} b_v |z|^v > 1 - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{|z|^v}{(2R)^v} \geq 1 - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} = 0, \end{aligned}$$

also  $g(z) \neq 0$ . Somit sind alle Bedingungen erfüllt.

III. Die am Schluß von Absatz I in Aussicht gestellte negative Antwort ist enthalten in dem nach den seitherigen Feststellungen immerhin überraschenden

**Satz 2.** *Wenn eine ganze transzendente Funktion  $F(z)$  mit rationalen Taylorkoeffizienten von endlicher Ordnung ist und nur endlich viele Nullstellen hat, so sind die Nullstellen algebraisch, und zwar sind zu jeder Nullstelle auch alle konjugierten Zahlen als Nullstellen gleicher Vielfachheit vorhanden.*

**Beweis.** Wenn  $F(z)$  keine von  $z=0$  verschiedene Nullstelle hat, ist der Satz trivial. Seien daher

$$(6) \quad \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$$

die endlich vielen von 0 verschiedenen Nullstellen, wobei mehrfache entsprechend mehrfach aufgeschrieben sind. Bekanntlich ist dann die Ordnung von  $F(z)$  eine ganze positive Zahl  $m$  und  $F(z)$  hat die Form

$$(7) \quad F(z) = e^{g(z)} z^h \prod_{v=1}^n (1 - \alpha_v z) \quad (h \geq 0),$$

wo  $g(z)$  ein Polynom vom Grad  $m$  ist<sup>3)</sup>. Nimmt man nach Unterdrücken des Faktors  $z^k$  beiderseits die Logarithmen und entwickelt dann nach Potenzen von  $z$ , so ist rechts der Koeffizient von  $z^k$  für  $k > m$  gleich

$$-\frac{1}{k} \sum_{r=1}^n \alpha_r^k,$$

und da er gleich dem Koeffizienten links sein muß, ist er rational. Somit ergibt sich für  $k > m$  insbesondere

$$\alpha_1^k + \alpha_2^k + \dots + \alpha_n^k = \text{rationale Zahl},$$

$$\alpha_1^{2k} + \alpha_2^{2k} + \dots + \alpha_n^{2k} = \text{rationale Zahl},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_1^{nk} + \alpha_2^{nk} + \dots + \alpha_n^{nk} = \text{rationale Zahl}.$$

Hieraus findet man auf Grund der Newtonschen Formeln die symmetrischen Grundfunktionen der Größen

$$(8) \quad \alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k$$

als rationale Zahlen. Die Größen (8) sind also die Wurzeln einer algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades  $G_k(x) = 0$  mit rationalen Koeffizienten. Die Gleichung  $G_k(x^k) = 0$  vom Grad  $nk$  hat dann die  $nk$  Wurzeln

$$\varepsilon_k^{\lambda} \alpha_r \quad (\lambda = 0, 1, \dots, k-1; r = 1, 2, \dots, n),$$

wo  $\varepsilon_k$  eine primitive  $k$ -te Einheitswurzel ist. Wählt man daher für die Zahl  $k$ , die bis jetzt nur der Bedingung  $k > m$  unterworfen ist, zwei geeignete Primzahlen  $p, q$ , so haben die Polynome  $G_p(x^p)$  und  $G_q(x^q)$  nur gerade die  $n$  Wurzeln

$$(9) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

gemein<sup>4)</sup>. Daher sind auch die Größen (9) die Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten, nämlich der Gleichung  $H(x) = 0$ , wo  $H(x)$  der größte gemeinsame Teiler von  $G_p(x^p)$  und  $G_q(x^q)$  ist. Damit ist der Satz bewiesen.

<sup>3)</sup> Vgl. A. Pringsheim, Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Ordnung. Math. Annalen 58 (1904), S. 257–342. Speziell § 6.

<sup>4)</sup> Geeignet sind hier zwei Primzahlen  $p, q$ , wenn keiner der Quotienten  $\frac{\alpha_r}{\alpha_p}$  gleich einer von 1 verschiedenen  $(pq)$ -ten Einheitswurzel ist. Solche Primzahlpaare  $p, q$  gibt es natürlich.

## Sur une propriété des séries entières.

Von

F. Leja in Warschau.

Nous dirons que deux séries  $\sum_0^\infty a_v$  et  $\sum_0^\infty b_v$  sont *semblables*, si leurs différence  $\sum_0^\infty (a_v - b_v)$  est convergente. Il est clair que deux séries semblables sont ou bien en même temps convergentes ou bien en même temps divergentes.

Cela posé, considérons une série entière

$$(1) \quad \sum_0^\infty a_v z^v$$

et supposons qu'elle soit semblable à une série numérique  $\sum_0^\infty b_v$ , dans un ensemble  $E$  situé sur la circonférence  $K \{|z|=1\}$ , c'est-à-dire que la série

$$\sum_0^\infty (a_v z^v - b_v)$$

soit convergente en chaque point de  $E$ . Il s'élève la question:

*L'ensemble  $E$ , peut-il être quelconque si la série  $\sum b_v$  est divergente?*

Il est facile de montrer que l'ensemble  $E$  peut être infini et même partout dense sur la circonférence  $K$  sans que la série  $\sum b_v$  soit convergente. Par exemple, la série

$$\sum_1^\infty \left( \frac{z^{p^v}}{p^v} - \frac{1}{p^v} \right)$$

converge en chaque point de la forme  $z = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers quelconques, bien que la série  $\sum \frac{1}{p^v}$  diverge.

Or, nous allons voir que, si  $E$  est de mesure positive, la série  $\sum b_v$  ne peut jamais être divergente et on en conclut aussitôt que, dans ce cas, la série  $\sum_0^\infty (a_v z^v - b_v)$  converge en même temps à l'intérieur de  $K$ .



On peut généraliser le problème posé et établir la proposition suivante: Considérons une série entière (1) et une série de polynômes

$$(2) \quad \sum_0^{\infty} P_r(z) = \sum_0^{\infty} (b_r + c_r z + \dots + l_r z^p),$$

dont chacun est du degré  $p$  au plus,  $p$  étant un entier quelconque mais fixe, et formons la série

$$(3) \quad \sum_0^{\infty} (a_r z^r - P_r(z)).$$

**Théorème.** — Si une série entière (1) est semblable à une série de polynômes (2) dans un ensemble  $E$  de mesure positive situé sur la circonférence  $K\{|z|=1\}$ , c'est-à-dire si la série (3) converge en chaque point de  $E$ , la série (2) doit être partout convergente et la série (3) converge à l'intérieur de  $K$ .

Dans la démonstration de ce théorème je m'appuierai sur une proposition due à MM. F. Riesz et A. Ostrowski<sup>1)</sup>, à laquelle on peut donner la forme que voici<sup>2)</sup>:

I. Si les fonctions d'une suite

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$$

sont holomorphes et uniformément bornées à l'intérieur d'une courbe rectifiable fermée  $C$  et continues sur  $C$ , et si cette suite converge vers zéro dans un ensemble de mesure positive situé sur  $C$ , elle converge vers zéro à l'intérieur de  $C$ .

J'aurai à m'appuyer encore sur le lemme suivant: Posons

$$(4) \quad W_r = W_r(z_0 z_1 \dots z_{p+1}) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^p & z_0^r \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^p & z_1^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_{p+1} & z_{p+1}^2 & \dots & z_{p+1}^p & z_{p+1}^r \end{vmatrix},$$

où  $p \geq 0$  est un entier fixe et

$$z_0, z_1, \dots, z_{p+1}$$

sont  $p+2$  points situés sur la circonférence  $K\{|z|=1\}$ .

<sup>1)</sup> Cette proposition a été énoncée sans démonstration par M. Ostrowski (Über die Bedeutung der Jensenschen Formel: *Acta Szeged* 1, fasc. 2, 1923, p. 80) et démontrée par M. Riesz (Sur les suites des fonctions analytiques: *Ibidem* 1, fasc. 2, 1923, p. 88).

<sup>2)</sup> Je lui donne une forme un peu plus générale que celle de la note de M. Riesz; on peut passer de l'une à l'autre à l'aide des transformations conformes.

II. *Aucune suite partielle de la suite*

$$W_0, W_1, W_2, \dots$$

ne peut converger vers zéro quels que soient les points  $z_0, z_1, \dots, z_{p+1}$ , arbitrairement choisis dans un ensemble  $E$ , mes  $E > 0$ , situé sur la circonférence  $K$ .

Démonstration. — Considérons d'abord le cas  $p = 0$  et admettons qu'une suite partielle de la suite

$$W_\nu(z_0, z_1) = z_1^\nu - z_0^\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

tende vers zéro, quels que soient les points  $z_0$  et  $z_1$  appartenant à un ensemble  $E$  de mesure positive situé sur  $K$ . Il existe donc une suite croissante d'indices  $\{\nu_k\}$  telle qu'on a

$$(5) \quad z_1^{\nu_k} - z_0^{\nu_k} \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad k \rightarrow \infty,$$

quel que soit  $z$  appartenant à  $E$ .

Or, la suite des fonctions (5), où l'on a fixé  $z_1$ , est bornée dans le cercle  $|z| < 1$ , donc, en vertu du lemme précédent, elle converge vers zéro au point  $z = 0$ , c'est-à-dire on a

$$z_1^{\nu_k} \rightarrow 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse que  $z_1$  est situé sur la circonférence  $K$ .

Le cas général, où  $p$  est un entier quelconque, peut être démontré par induction. Considérons, par exemple, le cas  $p = 1$  et admettons qu'on ait

$$W_{\nu_k}(z, z_1, z_2) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^{\nu_k} \\ 1 & z_1 & z_1^{\nu_k} \\ 1 & z_2 & z_2^{\nu_k} \end{vmatrix} \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad k \rightarrow \infty,$$

quels que soient  $z, z_1$  et  $z_2$  appartenant à  $E$ . Cette suite, où l'on a fixé  $z_1$  et  $z_2$ , est bornée dans le cercle  $|z| < 1$ , donc, en vertu du lemme précédent, elle converge vers zéro pour  $z = 0$ , c'est-à-dire on a

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_1^{\nu_k} \\ z_2 & z_2^{\nu_k} \end{vmatrix} = z_1 z_2 \cdot W_{\nu_k-1}(z_1, z_2) \rightarrow 0$$

quels que soient  $z_1$  et  $z_2$  appartenant à  $E$  et cela est impossible d'après ce que nous venons de voir. Le lemme II est donc démontré.

Démonstration du théorème. — Supposons que la série (3) soit convergente dans un ensemble  $E$ , mes  $E > 0$ , situé sur la circonférence  $K$ . Je dis d'abord que chacune des suites

$$(5) \quad \{a_\nu\}, \{b_\nu\}, \dots, \{l_\nu\}$$

converge vers zéro.

En effet, posons

$$b_r + c_r z + \dots + l_r z^p - a_r z^r = g_r(z)$$

et considérons le système des  $p+2$  équations

$$b_r + c_r z_0 + \dots + l_r z_0^p - a_r z_0^r = g_r(z_0),$$

$$b_r + c_r z_1 + \dots + l_r z_1^p - a_r z_1^r = g_r(z_1),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b_r + c_r z_{p+1} + \dots + l_r z_{p+1}^p - a_r z_{p+1}^r = g_r(z_{p+1}),$$

où  $z_0, z_1, \dots, z_{p+1}$  sont des points quelconques de l'ensemble  $E$ . En résolvant ce système par rapport à  $a_r$  on obtient

$$a_r \cdot W_r = -G_r$$

où  $W_r$  désigne le déterminant (4) et

$$G_r = \begin{vmatrix} 1, & z_0 & \dots & z_0^p & g_r(z_0) \\ 1, & z_1 & \dots & z_1^p & g_r(z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & z_{p+1} & \dots & z_{p+1}^p & g_r(z_{p+1}) \end{vmatrix}.$$

Or,  $G_r \rightarrow 0$  car la suite  $g_r(z)$  tend vers zéro, quel que soit  $z$  appartenant à  $E$ , donc on a

$$a_r \cdot W_r \rightarrow 0,$$

quels que soient  $z_0, z_1, \dots, z_{p+1}$  appartenant à  $E$ . Si la suite  $\{a_r\}$  ne tendait pas vers zéro on aurait pour un  $\varepsilon > 0$  et pour une suite croissante d'indices  $\{r_k\}$

$$|a_{r_k}| > \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots),$$

d'où il suivrait que  $W_{r_k} \rightarrow 0$ , quels que soient  $z_0, z_1, \dots, z_{p+1}$ , ce qui est impossible en vertu du lemme II, donc  $a_r \rightarrow 0$ .

Par la même méthode on démontrera que toutes les suites (5) convergent vers zéro.

Je dis maintenant que la série des polynômes

$$(6) \quad \sum_{r=0}^{\infty} (b_r + c_r z + \dots + l_r z^p)$$

est partout convergente. En effet, dans le cas contraire, au moins une des séries

$$(7) \quad \sum_0^{\infty} b_r, \quad \sum_0^{\infty} c_r, \quad \dots, \quad \sum_0^{\infty} l_r$$

est divergente. Or, il suit de cette hypothèse et du fait, que les termes des séries (7) convergent vers zéro, l'existence d'une suite des sommes<sup>3)</sup>

<sup>3)</sup> On suppose, bien entendu, que  $\mu_k \leq r_k$ , quel que soit  $k = 1, 2, \dots$  et que  $\mu_k \rightarrow \infty$ .

$$(8) \quad \sigma_{\mu_k \nu_k}(z) = \sum_{j=\mu_k}^{\nu_k} (b_j + c_j z + \dots + l_j z^p) \quad (k=1, 2, \dots),$$

qui seront appelées *restes* de la série (6) et qui jouissent des deux propriétés que voici:

1° La suite des restes (8) converge partout vers un polynôme:

$$(9) \quad \sigma_{\mu_k \nu_k}(z) \rightarrow b + cz + \dots + lz^p$$

qui n'est pas identiquement nul.

2° Tous les restes (8) ainsi que les restes partiels

$$\sigma_{\mu_k \mu_k}(z), \sigma_{\mu_k \mu_k+1}(z), \dots, \sigma_{\mu_k \nu_k}(z) \quad (k=1, 2, \dots),$$

sont uniformément bornés pour  $|z| < 1$ , c'est-à-dire on a dans le cercle  $|z| < 1$

$$(10) \quad |\sigma_{\mu_k j}(z)| < M \quad \left( \begin{array}{l} \text{pour } j = \mu_k, \mu_k+1, \dots, \nu_k \\ \text{et pour } k = 1, 2, \dots \end{array} \right),$$

où  $M$  est un nombre fixe<sup>4)</sup>.

Considérons une telle suite des restes (8) et posons

$$(11) \quad s_{\mu_k \nu_k}(z) = \sum_{j=\mu_k}^{\nu_k} a_j z^j \quad (k=1, 2, \dots).$$

En vertu de la convergence de la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a_j z^j - P_j(z))$$

aux points de l'ensemble  $E$ , la suite de restes

$$(12) \quad r_{\mu \nu}(z) = \sum_{j=\mu}^{\nu} (a_j z^j - P_j(z)), \quad \text{où } \mu \leq \nu$$

converge vers zéro avec  $\frac{1}{\mu}$ , quel que soit  $\nu \geq \mu$  et quel que soit  $z$  appar-

<sup>4)</sup> L'existence d'une telle suite (8) peut être établie comme il suit: Posons, pour simplifier,  $p=1$  et considérons la série  $\sum_0^{\infty} (b_v + c_v z)$  et les restes  $b_{\mu \nu} = \sum_{\mu}^{\nu} b_j$ ,  $c_{\mu \nu} = \sum_{\mu}^{\nu} c_j$ .

Si la série  $\sum b_v$  diverge on peut trouver un nombre  $b \neq 0$  et une suite de restes  $b_{m_k n_k}$  tels qu'on ait

$$b_{m_k n_k} \rightarrow b \quad \text{et} \quad |b_{m_k j}| < M \quad \text{pour } m_k \leq j \leq n_k,$$

où  $M$  est un nombre fixe indépendant de  $k$ . Lorsque tous les restes

$$c_{m_k j} \quad (m_k \leq j \leq n_k),$$

sont bornés il suffit de poser

$$\sigma_{\mu_k \nu_k}(z) = b_{\mu_k \nu_k} + c_{\mu_k \nu_k} z,$$

où  $c_{\mu_k \nu_k}$  est une suite partielle de  $c_{m_k n_k}$  et convergente. Dans le cas contraire, on doit diminuer convenablement les indices  $n_k$  pour que les restes  $c_{m_k j}$ ,  $m_k \leq j \leq n_k$ , deviennent bornés.

tenant à  $E$ . Or, mes  $E$  étant positive, on sait qu'il existe dans  $E$  un ensemble parfait  $P$  de mesure positive tel que la suite (12) est uniformément convergente et uniformément bornée dans  $P$ <sup>5)</sup>; en chaque point de  $P$  on a

$$r_{\mu\nu} = s_{\mu\nu}(z) - \sigma_{\mu\nu}(z) \rightarrow 0$$

lorsque  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\mu$  étant plus petit que  $\nu$ , et

$$|r_{\mu\nu}| = |s_{\mu\nu}(z) - \sigma_{\mu\nu}(z)| < N,$$

quels que soient  $\mu$  et  $\nu \geq \mu$ , où  $N$  est un nombre fixe.

Il en suit d'après (9) et (10) qu'on parvient au résultat suivant: Il existe sur la circonférence  $K\{|z|=1\}$  un ensemble parfait  $P$ , mes  $P > 0$ , tel que, en chaque point  $z_0$  de  $P$ , on a

$$(13) \quad s_{\mu_k \nu_k}(z_0) \rightarrow b + c z_0 + \dots + l z_0^p \quad \text{pour } k \rightarrow \infty,$$

et

$$(14) \quad |s_{\mu_k j}(z_0)| < A \quad \left( \begin{array}{l} \text{pour } j = \mu_k, \mu_k + 1, \dots, \nu_k, \\ \text{et pour } k = 1, 2, \dots \end{array} \right),$$

où  $A = M + N$  est un nombre fixe.

Je dis que ce résultat implique une contradiction. En effet,  $z_0$  étant un point quelconque de  $K$ , joignons-le aux extrémités du diamètre parallèle à la tangente au point  $z_0$  et désignons par  $T(z_0)$  la partie du triangle ainsi obtenu qui est contenue dans le cercle  $|z - z_0| \leq 1$ . Soit

$$D = \sum T(z_0)$$

le domaine composé de tous les secteurs fermés  $T(z_0)$ , où  $z_0$  parcourt l'ensemble  $P$ . Je dis que la suite

$$(15) \quad s_{\mu_k \nu_k}(z) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

est uniformément bornée dans le domaine  $D$ .<sup>6)</sup>

En effet, soit  $z$  un point quelconque de  $D$ , donc il appartient à un  $T(z_0)$ . Si  $z = z_0$  on a les inégalités (14) et si  $z = z_0 y + z_0$  on aura  $|y| < 1$  et

$$(16) \quad \frac{|1 - y|}{1 - |y|} < \alpha$$

où  $\alpha$  est un nombre fixe  $> 1$ . Or, d'après (11) on aura

$$s_{\mu_k \nu_k}(z) = (1 - y) \cdot \sum_{j=\mu_k}^{\nu_k} a_j z_0^j \cdot y^j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} y^j,$$

<sup>5)</sup> C'est une conséquence d'un théorème de M. Egoroff. *Comptes rendus* 152 (1911), p. 244.

<sup>6)</sup> L'idée de ce raisonnement ressemble à celle des numéros 14 et 15 du mémoire de MM. Lusin-Privaloff: «Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques», *Ann. de l'Éc. Norm. Sup.* (3), 42 (1925).

d'où

$$(17) \quad s_{\mu_k \nu_k}(z) = (1-y) \sum_{j=\mu_k}^{\infty} A_j y^j,$$

où l'on a posé

$$A_j = \begin{cases} s_{\mu_k j}(z_0), & \text{si } j < \nu_k, \\ s_{\mu_k \nu_k}(z_0), & \text{si } j \geq \nu_k. \end{cases}$$

Or, en vertu de (14) on a  $|A_j| < A$ , donc il suit de (16) et (17) que

$$|s_{\mu_k \nu_k}(z)| < A \cdot \frac{|1-y|}{1-|y|} < A\alpha,$$

ce qui prouve que les fonctions (15) et, par suite, les fonctions

$$(18) \quad f_k(z) = -s_{\mu_k \nu_k}(z) + b + cz + \dots + lz^p \quad (k=1, 2, \dots),$$

sont uniformément bornées dans le domaine  $D$ .

D'autre part, les fonctions  $f_k(z)$  sont continues sur la frontière de  $D$  et la suite (18) converge vers zéro, d'après (13), en chaque point d'un ensemble  $P$  de mesure positive, situé sur la frontière de  $D$ , d'où il suit, en vertu du lemme I, qu'on a

$$(19) \quad f_k(z) \rightarrow 0$$

à l'intérieur de  $D$ .

Mais, la série entière  $\sum_0^{\infty} a_n z^n$  converge dans le cercle  $|z| < 1$ , car  $a_n \rightarrow 0$ , donc la suite  $s_{\mu_k \nu_k}(z)$  tend vers zéro à l'intérieur de  $D$  et, par suite, on a

$$(20) \quad f_k(z) \rightarrow b + cz + \dots + lz^p$$

à l'intérieur de  $D$ . Les résultats (19) et (20) sont contradictoires, car le polynôme:  $b + cz + \dots + lz^p$  n'est pas identiquement nul, donc la série des polynômes (6) est partout convergente et, par suite, notre théorème est démontré.

(Eingegangen am 22. 5. 1930.)

## Zur Theorie der automorphen Formen.

Von

Bruno Schoeneberg in Hamburg.

In der vorliegenden Arbeit soll für die lineare Schar der ganzen eigentlich-automorphen Formen der Dimension  $-2k$  ( $k > 0$ , ganz) eine Basis angegeben werden. Es handelt sich darum, die Existenz von gewissen endlich vielen linear-unabhängigen ganzen Formen der Dimension  $-2k$  nachzuweisen, durch die alle ganzen Formen dieser Dimension in eindeutiger Weise linear darstellbar sind. Diese Basisformen sollen in übersichtlicher Weise aufgebaut werden, wobei die ganzen Formen der Dimension  $-2$  eine wesentliche Rolle spielen. Über die automorphe Gruppe  $\Gamma$ , zu der die Formen gehören, machen wir dabei folgende Voraussetzungen: Ihr Fundamentalbereich habe endliches Geschlecht  $p > 0$  und endlich viele feste Ecken und Spitzen. Das aus ihm entstehende Polygonnetz sei einfach-zusammenhängend. (Dadurch wird erreicht, daß alle unverzweigten Formen ganzzahliger Dimension eindeutig sind.) Ferner sei das durch  $\Gamma$  bestimmte algebraische Gebilde nicht von hyperelliptischem Charakter.

Es zeigt sich, daß diejenigen ganzen Formen der Dimension  $-2k$ , die als lineare Kombination von Potenzprodukten der ganzen Formen der Dimension  $-2$  dargestellt werden können, in den elliptischen Ecken durch ein bestimmtes Verhalten ausgezeichnet sind. Diesen Formen wollen wir uns zunächst zuwenden und dann erst zum allgemeinen Fall übergehen.

Die Gesamtheit der ganzen eigentlich-automorphen Formen der Dimension  $-2$  ist bekanntlich identisch mit der linearen Schar, die bestimmt ist durch die Integranden 1. Gattung  $\varphi(\tau)$  und diejenigen Integranden 3. Gattung  $\psi(\tau)$ , deren Integral nur in parabolischen Spitzen logarithmische Singularitäten hat. Die Anzahl der linear-unabhängigen unter ihnen ist gleich  $p + \Pi - 1$ . Dabei ist  $\Pi$  die Anzahl der parabolischen Spitzen des Fundamentalbereichs. Das Verhalten der Integranden 1. Gattung und der Integranden 3. Gattung mit obiger Einschränkung ist nun bestimmt:



in einer parabolischen Spitze  $\tau_0$  durch

$$(\tau - \tau_0)^2 f(\tau) = a_0 + a_1 t + \dots, \quad t = e^{\frac{2\pi i}{\epsilon} \frac{1}{\tau - \tau_0}},$$

in einer elliptischen Ecke durch

$$(\tau - \tau_2)^2 f(\tau) = t^{1-\frac{1}{\epsilon}} (b_0 + b_1 t + \dots).$$

Dabei ist  $t = \left(\frac{\tau - \tau_1}{\tau - \tau_2}\right)^\epsilon$ ,  $\tau_1$  die elliptische Ecke, für die diese Entwicklung gilt,  $\epsilon$  die Periode der Substitution  $S$ , die  $\tau_1$  festläßt, und  $\tau_2$  der zweite Fixpunkt von  $S$ .

Die Anzahl der Nullstellen eines Integranden 1. Gattung, gemessen in der üblichen Weise, ist demnach gleich

$$2p - 2 + II + \sum \left(1 - \frac{1}{\epsilon_n}\right). \quad (\text{Die Summe erstreckt sich über alle elliptischen Ecken.})$$

Die gleiche Nullstellenzahl ergibt sich auch für unsere Integranden 3. Gattung, wie man durch Quotientenbildung erkennt. Beide Arten von Integranden haben Nullstellen von der Ordnung  $1 - \frac{1}{\epsilon_n}$  in den elliptischen Ecken  $\epsilon_n$ .

Bilden wir nun die in  $\varphi$  und  $\psi$  homogenen Polynome  $k$ -ten Grades  $H_k(\varphi, \psi)$ , die ganze Formen der Dimension  $-2k$  sind, so verschwinden diese in den elliptischen Ecken  $\epsilon_n$  in der Ordnung  $\left(1 - \frac{1}{\epsilon_n}\right)k$ . Durch die  $H_k(\varphi, \psi)$  können also nur solche ganzen Formen dargestellt werden, die in den elliptischen Ecken das angegebene Verhalten aufweisen. Die  $H_k(\varphi, \psi)$  stellen aber auch, wie wir zeigen wollen, alle Formen dieses Verhaltens dar.

Die Anzahl der beweglichen Nullstellen einer ganzen Form der Dimension  $-2k$ , die in den elliptischen Ecken  $\epsilon_n$  Nullstellen der Ordnung  $\left(1 - \frac{1}{\epsilon_n}\right)k$  haben, ist gleich  $(2p - 2 + II)k$ . Daraus folgt: Es gibt nur endlich viele linear-unabhängige unter diesen Formen. Die genaue Anzahl ist nach dem Riemann-Rochschen Satz für  $k \geq 1$  gleich

$$(2p - 2 + II)k - p + 1 = (2k - 1)(p - 1) + IIk.$$

$(2k - 1)(p - 1)$  ist nun aber, wie M. Noether gezeigt hat<sup>1)</sup>, die genaue Anzahl der linear-unabhängigen Potenzprodukte  $k$ -ten Grades von Integranden 1. Gattung. Zur Darstellung der übrigen  $II \cdot k$  Formen ziehen wir diejenigen Integranden 3. Gattung, die ganze automorphe Formen sind, heran. Dazu denken wir uns die parabolischen Spitzen von 1 bis  $II$  numeriert und die Integranden 3. Gattung, deren Existenz feststeht, so ge-

<sup>1)</sup> Math. Annalen 17, S. 263 ff. Der Satz gilt nicht im hyperelliptischen Fall.



Beachten wir, daß aus dem Verhalten der angegebenen Formen in den parabolischen Spitzen ihre lineare Unabhängigkeit folgt, so haben wir folgenden Satz bewiesen:

*Alle ganzen eigentlich-automorphen Formen der Dimension  $-2k$  der Gruppe  $\Gamma$ , deren Verhalten in den elliptischen Ecken durch*

$$(\tau - \tau_2)^{2k} \Phi(\tau) = t^{\left(1 - \frac{1}{e_n}\right)k} (a_0 + a_1 t + \dots), \quad t = \left(\frac{\tau - \tau_1}{\tau - \tau_2}\right)^{e_n}$$

*gekennzeichnet ist, lassen sich eindeutig linear mit Hilfe einer Basis darstellen, welche sich zusammensetzt aus:  $(2k-1)(p-1)$  Potenzprodukten von Integranden 1. Gattung und den Formen*

$$\begin{aligned} &(\psi_1(\tau))^k, \dots, (\psi_{II-1}(\tau))^k, \quad \psi_1(\tau) \cdot (\psi_2(\tau))^{k-1}, \\ &(\psi_r(\tau))^{k-r} \cdot (\varphi_r(\tau))^r \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &(\psi_1(\tau))^k, \dots, (\psi_{II-1}(\tau))^k, \end{aligned}} \right\} r=1, 2, \dots, II-1 \\ &(\psi_{II-1}(\tau))^{k-r} \cdot (\overline{\varphi}(\tau))^r \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &(\psi_1(\tau))^k, \dots, (\psi_{II-1}(\tau))^k, \end{aligned}} \right\} r=1, 2, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Bisher haben wir für die Formen bezüglich ihres Verhaltens in den elliptischen Ecken eine wesentliche Voraussetzung gemacht. Wir wollen jetzt zum allgemeinen Fall übergehen und für alle ganzen Formen der Dimension  $-2k$  eine Basis aufstellen.

Die Anzahl der Nullstellen einer ganzen Form der Dimension  $-2k$  ist  $(2p-2+II)k + \sum_n \left(1 - \frac{1}{e_n}\right)k$ . Davon sind bewegliche Nullstellen  $(2p-2+II)k + \sum_n s_n$ .  $s_n$  ist dabei die größte ganze Zahl  $s$ , für die  $k - \frac{k}{e_n} - s \geq 0$ . Die Anzahl der linear-unabhängigen Formen ist

$$(2k-1)(p-1) + II \cdot k + \sum_n s_n.$$

Die ersten  $(2k-1)(p-1) + II \cdot k$  Formen haben wir schon angegeben. Die übrigen erhalten wir auf folgende Weise:  $\varphi_n(\tau)$  sei ein Integrand 1. Gattung,  $e_n$  eine elliptische Ecke,  $e'_n$  der zweite Fixpunkt der Substitution  $S$ , die auch  $e_n$  festläßt. Dann soll  $\varphi_n(\tau)$  in  $e_n$  durch folgendes Verhalten bestimmt sein:

$$(\tau - e'_n)^2 \cdot \varphi_n(\tau) = t^{1 - \frac{1}{e_n}} (a_0 + a_1 t + \dots), \quad a_0 \neq 0.$$

Ein solches  $\varphi_n$  gibt es.  $f_n(\tau)$  sei eine automorphe Funktion, die in  $p$  Nullstellen des dem  $\varphi_n$  zugeordneten Differentials  $dw_n$  und in der Ecke  $e_n$  einen Pol 1. Ordnung hat und sonst regulär ist. In den ganzen Formen  $\varphi_n^k \cdot f_n^s$ , wo  $1 \leq s \leq s_n$  und  $n$  die Indizes aller elliptischen Ecken durchläuft, haben wir die uns fehlenden Formen erhalten. Daß die Gesamtheit dieser Formen zusammen mit den früheren linear-unabhängig ist, erkennt man an dem Verhalten in den Spitzen und Ecken.

Aus diesen Ergebnissen folgt nun, daß man jede automorphe Funktion mit  $M$  Polen als Quotient von linearen Verbindungen der aufgestellten Formen darstellen kann, wenn man nur die Dimension dem  $M$  entsprechend genügend groß wählt. Ist die Anzahl der elliptischen Ecken gleich Null, so ist es also möglich, jede automorphe Funktion in der Gestalt  $\frac{H_k(\varphi, \psi)}{G_k(\varphi, \psi)}$  darzustellen, wo  $H_k(\varphi, \psi)$  und  $G_k(\varphi, \psi)$  die gleiche Bedeutung wie im Anfang haben.

Wenden wir noch unsere Ergebnisse auf die Hauptkongruenzuntergruppen  $\Gamma(N)$  der Modulgruppe an. Elliptische Ecken kommen hier nicht vor. Die Anzahl der Nullstellen einer ganzen Form der Dimension  $-2$  ist daher gleich  $2p - 2 + \sigma(N)$ , wo die Anzahl der nach  $\Gamma(N)$  nicht äquivalenten rationalen Spitzen des Fundamentalbereichs durch  $\sigma(N)$  bezeichnet ist. Für  $N \leq 6$  sind die Darstellungsverhältnisse bekannt und für  $N \geq 7$  gelten unsere Ergebnisse, da in diesen Fällen die zugehörigen algebraischen Gebilde bekanntlich nicht von hyperelliptischem Charakter sind. Mit Hilfe der von Herrn Hecke<sup>2)</sup> untersuchten höheren Eisensteinschen Reihen der Dimension  $-2$  ist es in diesem Falle sogar möglich, die benutzten Integranden 3. Gattung explizit anzugeben.

<sup>2)</sup> E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik. Hamb. Abh. 4, S. 199 ff.

(Eingegangen am 17. 5. 1930.)

# Über die Approximation stetiger Funktionen durch gegebene Funktionenfolgen.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

Der bekannte Weierstraßsche Approximationssatz besagt, daß jede im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  stetige Funktion  $f(x)$  daselbst durch Polynome  $P(x) = \sum_0^n a_v x^v$  gleichmäßig mit beliebiger Genauigkeit approximierbar ist; das heißt, zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein Polynom  $P(x)$ , so daß

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1$$

ist. Man drückt diesen Tatbestand auch so aus: Die Funktionenfolge

$$(1) \quad 1, x, x^2, \dots, x^v, \dots$$

ist eine *Basis* der stetigen Funktionen im Intervalle  $(0, 1)$ .

Kürzlich hat Herr J. Karamata [in einer inzwischen erschienenen Arbeit in Math. Zeitschr., Bd. 32 (1930), S. 319–320] mit Hilfe dieses Satzes einen sehr einfachen Beweis für einen Satz der Herren Hardy und Littlewood über Potenzreihen mit positiven Koeffizienten gegeben. Herr Landau war so freundlich, mir diesen Beweis — gleich in verallgemeinerter Form — mitzuteilen. Um einen allgemeineren Satz von Hardy und Littlewood<sup>1)</sup> entsprechend zu beweisen, benötige ich nun einen neuen Approximationssatz (Satz 5 am Schlusse dieser Arbeit); sein Beweis gelingt mit Hilfe einer Methode, die ich in älteren Arbeiten mit Erfolg verwendet habe<sup>2)</sup>. Dies führte mich dazu, folgende Frage zu behandeln:

Unter welchen Bedingungen für die Zahlen

$$(2) \quad \varrho; t_1, t_2, t_3, \dots$$

<sup>1)</sup> G. H. Hardy und J. E. Littlewood, On Tauberian Theorems, Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1929), S. 23–37; insbes. Satz 4.

<sup>2)</sup> Vgl. Szász 1, 2, 3 (s. Literaturnachweis), und die daselbst angeführte Literatur; insbes. hat Herr Müntz auf Grund brieflicher Mitteilungen meinen Gedankengang teilweise verwendet.

ist die Funktionenfolge

$$(3) \quad (1 + t_v x)^{-v} \quad (v = 1, 2, 3, \dots)$$

eine Basis der stetigen Funktionen im Intervalle  $(0, 1)$ ?

Es ergeben sich unter anderem folgende Sätze:

Es sei  $\sigma \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ ; wenn die  $t_v$  sich in der von  $-1$  bis  $-\infty$  aufgeschnittenen  $t$ -Ebene im Endlichen häufen, so ist die Funktionenfolge

$$(1 + t_v x)^{\sigma} - 1 \quad (v = 1, 2, 3, \dots)$$

eine Basis aller für  $x = 0$  verschwindenden, in  $(0, 1)$  stetigen Funktionen. (Satz 2.)

Unter denselben Bedingungen für die  $t_v$  ist jede im Intervalle  $(0, 1)$  nirgends verschwindende, stetige Funktion durch Produkte der Gestalt

$$c \cdot \prod_{v=1}^n (1 + t_v x)^{\alpha_v} \text{ gleichmäßig approximierbar. (Satz 3.)}$$

Ist  $\lim_{v \rightarrow \infty} t_v = 0$ , so ist die Folge  $(1 + t_v x)^{\sigma}$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ) eine Basis aller stetigen Funktionen in  $(0, 1)$ . (Satz 4.)

## § 1.

### Die Vollständigkeit der Funktionenfolge.

Ich beginne mit der Frage: Unter welchen Bedingungen für die Zahlenfolge (2) ist die Funktionenfolge (3) eine vollständige?

Es sei  $f(x)$  eine samt dem Quadrate ihres absoluten Betrages im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion; sie darf auch komplexe Werte annehmen. Ich betrachte nun die Funktion ( $\bar{f}$  sei die zu  $f$  konjugierte komplexe Größe)

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\bar{f}(x) dx}{(1 + t x)^v} = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{v(v+1) \dots (v+v-1)}{v!} t^v \int_0^1 \bar{f}(x) x^v dx;$$

diese Reihe konvergiert für  $|t| < 1$ . Die Funktion  $F(t)$  ist offenbar regulär in der von  $-1$  bis  $-\infty$  aufgeschnittenen  $t$ -Ebene, und es ist nur dann  $F(t) \equiv 0$ , wenn

$$(4) \quad \int_0^1 \bar{f}(x) x^v dx = 0 \quad \text{für } v = 0, 1, 2, \dots$$

ist. Aber die Funktionenfolge (1) ist *vollständig*, das heißt die Gleichungen (4) gelten nur, wenn  $f(x) \equiv 0$  ist (bis auf eine Punktmenge vom Maße Null). Von diesem Fall abgesehen ist also  $F(t) \not\equiv 0$ ; man bezeichne die Nullstellen dieser Funktion mit

$$t_1, t_2, t_3, \dots$$

Bedeutet nun  $q$  eine der Zahlen  $0, -1, -2, \dots$ , etwa  $q = -k$ , so ist  $F(t)$  ein Polynom

$$F(t) = \int_0^1 \bar{f}(x)(1+tx)^k dt = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} t^v \int_0^1 \bar{f}(x) x^v dx,$$

und es ist  $F(t) \equiv 0$ , wenn nur

$$\int_0^1 \bar{f}(x) x^v dx = 0 \quad \text{ist für } v = 0, 1, \dots, k.$$

Diese Gleichungen gelten z. B. für gewisse, mit den Legendreschen zusammenhängende Polynome. Jetzt ist also die Funktionenfolge (3) nicht einmal abgeschlossen bei beliebiger Wahl der  $t_v$ .

Es sei nun  $q \neq -k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ); ist für unendlich viele  $t_v$

$$F(t_v) = \int_0^1 \frac{\bar{f}(x) dx}{(1+t_v x)^q} = 0 \quad (v = 1, 2, 3, \dots),$$

und häufen sich die  $t_v$  im Innern des Regularitätsbereiches, so muß  $F(t)$ , also auch  $f(x)$  identisch verschwinden, es gibt also jetzt keine Funktion  $f(x)$ , die zu jedem Element der Folge (3) orthogonal wäre, das heißt die Funktionenfolge (3) ist vollständig. Somit gilt der

**Satz 1.** *Es sei  $q$  von  $0, -1, -2, \dots$  verschieden;  $t_1, t_2, \dots$  seien unendlich viele Zahlen mit einem Häufungspunkt  $t_0$  in der von  $-1$  bis  $-\infty$  aufgeschlitzten  $t$ -Ebene ( $t_0$  endlich); dann ist die Funktionenfolge  $(1+t_v x)^{-q}$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ) vollständig für das Intervall  $0 \leq x \leq 1$ .*

Der Fall, daß sich die  $t_v$  gegen eine reelle Zahl  $\leq -1$  oder gegen  $\infty$  häufen, läßt sich durch Abbildung der aufgeschlitzten  $t$ -Ebene auf das Innere des Einheitskreises  $\left(t = \frac{4z}{(1-z)^2}\right)$  und durch Anwendung eines von Herrn Ostrowski (Jahresb. d. Deutschen Math. Ver. 34 (1925), S. 161–171) verallgemeinerten Blaschkeschen Satzes behandeln; ich gehe darauf hier nicht näher ein.

## § 2.

### Die gleichmäßige Approximation.

Aus Satz 1 folgt bekanntlich, daß jede für  $0 \leq x \leq 1$  stetige Funktion durch die Folge (3) im Mittel approximierbar ist; insbesondere gilt bei gegebenem  $n \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$  und passender Wahl von  $m$ ;  $a_1, a_2, \dots, a_m$

$$\int_0^1 |x^n - \sum_1^m a_v (1+t_v x)^{-q}|^2 dx < \varepsilon^2.$$



Nun ist offenbar (man darf hier  $t_v \neq 0$  annehmen)

$$\int_0^u [x^n - \sum_1^m a_v (1+t_v x)^{-e}] dx = \begin{cases} \frac{u^{n+1}}{n+1} - \sum_1^m a_v \frac{(1+t_v u)^{1-e} - 1}{1-e} & \text{für } e \neq 1, \\ \frac{u^{n+1}}{n+1} - \sum_1^m \frac{a_v}{t_v} \lg(1+t_v u) & \text{für } e = 1; \end{cases}$$

gemeint ist der Hauptwert des Logarithmus. Ferner ist für  $0 \leq u \leq 1$

$$|\int_0^u [x^n - \sum_1^m a_v (1+t_v x)^{-e}] dx|^2 \leq u \int_0^1 |x^n - \sum_1^m a_v (1+t_v x)^{-e}|^2 dx \leq u \varepsilon^2;$$

sei zunächst  $e \neq 1$ , dann ist also

$$(5) \quad \left| \frac{u^{n+1}}{n+1} - \sum_1^m a_v \frac{(1+t_v u)^{1-e} - 1}{1-e} \right| \leq \varepsilon \sqrt{u} \leq \varepsilon, \quad 0 \leq u \leq 1$$

und

$$(6) \quad \left| \frac{u^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} - \sum_1^m a_v \frac{(1+t_v u)^{1-e} - 1}{(1-e)\sqrt{u}} \right| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Hierbei ist  $1-e \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ ; da aber die Folge  $x, x^2, \dots$  eine Basis der für  $x=0$  verschwindenden Funktionen im Intervalle  $(0,1)$  ist, so ergibt sich aus (5) der

Satz 2. *Es sei  $\sigma$  weder Null noch eine natürliche Zahl; die Zahlenfolge  $(t_v)$  besitze einen Häufungspunkt in der von  $-1$  bis  $-\infty$  aufgeschnittenen  $t$ -Ebene; dann ist die Funktionenfolge*

$$(1+t_v x)^{\sigma} - 1 \quad (v=1, 2, 3, \dots)$$

eine Basis der für  $x=0$  verschwindenden stetigen Funktionen im Intervall  $(0,1)$ .

Ebenso folgt aus (6), daß auch die Folge  $\frac{(1+t_v x)^{\sigma} - 1}{\sqrt{x}}$  eine Basis der für  $x=0$  verschwindenden Funktionen im Intervall  $(0,1)$  ist.

Im Falle  $e = 1$  wird analog

$$\left| \frac{u^{n+1}}{n+1} - \sum_1^m a_v \frac{\lg(1+t_v u)}{t_v} \right| \leq \varepsilon \sqrt{u} \leq \varepsilon, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Somit gilt der

Satz 3. *Unter denselben Bedingungen für die  $t_v$  wie in Satz 2 ist die Folge  $\lg(1+t_v x)$  ( $v=1, 2, 3, \dots$ ) und auch  $\frac{1}{\sqrt{x}} \lg(1+t_v x)$  ( $v=1, 2, 3, \dots$ ) eine Basis der für  $x=0$  verschwindenden, stetigen Funktionen im Intervall  $(0,1)$ .*

Demnach wird

$$f(x) - \lg \prod_{v=0}^n (1 + t_v x)^{a_v} = \varepsilon_n(x) \rightarrow 0$$

gleichmäßig, falls  $f(x)$  in  $(0, 1)$  stetig und  $f(0) = 0$  ist; also auch

$$\frac{e^{f(x)}}{\prod (1 + t_v x)^{a_v}} = e^{s_n(x)} = 1 + \delta_n(x), \quad \delta_n \rightarrow 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$g(x) - \prod_{v=1}^n (1 + t_v x)^{a_v} \rightarrow 0$$

gleichmäßig, falls  $g(x)$  eine in  $(0, 1)$  nirgends verschwindende, stetige Funktion mit dem Anfangswert  $g(0) = 1$  ist.

### § 3.

#### Spezielle Fälle; Übergang zum Intervall $(0, \infty)$ .

Unter den Bedingungen des Satzes 2 ist offenbar  $1, (1 + t_v x)^\sigma$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ) eine Basis *aller* in  $(0, 1)$  stetigen Funktionen. Sei speziell  $\lim_{v \rightarrow \infty} t_v = 0$ , dann ist gleichmäßig für  $0 \leq x \leq 1$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} (1 + t_v x)^\sigma = 1.$$

Somit gilt der

**Satz 4.** *Es sei  $\sigma \neq 0, 1, 2, \dots$  und  $\lim_{v \rightarrow \infty} t_v = 0$ ; dann ist die Funktionenfolge  $(1 + t_v x)^\sigma$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ) eine Basis aller stetigen Funktionen im Intervall  $(0, 1)^{*)}$ . Insbesondere ist (für  $t_v = \frac{1}{v}$ )  $(v + x)^\sigma$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ) eine Basis, falls nur  $\sigma < 0$  ist.*

Dieser Spezialfall genügt für die in der Einleitung angedeutete Anwendung.

Es sei jetzt  $\psi(t)$  eine für  $0 \leq t \leq \infty$  stetige Funktion<sup>4)</sup>; setzt man

$$t = \frac{x}{1-x}, \quad \text{also} \quad x = \frac{t}{1+t}, \quad 0 \leq x < 1,$$

so ist die Funktion

$$\psi\left(\frac{x}{1-x}\right) = f(x)$$

stetig für  $0 \leq x \leq 1$ . Nach Satz 4 wird somit

$$|f(x) - \sum_1^n a_v (v + x)^\sigma| < \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

<sup>\*)</sup> Der Fall  $\sigma = -1$  dieses Satzes wurde auf einfacherem Wege von Herrn Szegő (4) bewiesen.

<sup>4)</sup> Für  $t = \infty$  bedeutet dies, daß  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$  existiert.

oder

$$\left| \psi(t) - \sum_1^n a_v \left( v + \frac{t}{1+t} \right)^v \right| < \varepsilon, \quad t \geq 0.$$

Dies ergibt den

**Satz 5.** *Es sei  $\varrho > 0$ ; dann ist jede für  $0 \leq t \leq \infty$  stetige Funktion daselbst gleichmäßig approximierbar durch die Funktionenfolge*

$$\left( v + \frac{t}{1+t} \right)^{-\varrho} = \left[ \frac{1+t}{v+(v+1)t} \right]^{\varrho} = \frac{1}{v^{\varrho}} \left( \frac{1+t}{1+\frac{v+1}{v}t} \right)^{\varrho} \quad (v=1, 2, 3, \dots).$$

#### Literaturnachweis.

1. O. Szász, Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, *Math. Annalen* 77 (1916), S. 482—496.
2. O. Szász, Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate aus einer gegebenen Funktionenfolge (ungarisch), *Math. Phys. Lapok* 25 (1916), S. 157—177.
3. O. Szász, Über die Approximation stetiger Funktionen durch Bernoullische Polynome, *Journal f. d. r. u. a. Math.* 148 (1918), S. 183—188.
4. G. Szegő, Über „dichte“ Funktionenfamilien, *Berichte d. Math.-phys. Kl. d. sächsischen Akademie d. Wiss.* 78 (1926), S. 373—380.

(Eingegangen am 24. 6. 1930.)

## Trattazione in grande del problema di Cauchy per le equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine a caratteristiche reali e distinte.

Von

Antonio Colucci in Neapel.

Lo studio delle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine e di tipo canonico — grazie ai numerosi lavori scritti su tale soggetto da distinti Analisti, specie nell' ultimo cinquantennio — ha condotto a risultati del massimo interesse sia pel matematico che pel fisico, i quali risultati hanno permesso di dare alla teoria di siffatte equazioni un assetto del tutto definitivo.

Sfortunatamente, lo stesso non si può affermare al riguardo delle equazioni lineari *generali* del secondo ordine.

Ordinariamente, ci si accontenta di trasformare una tale equazione, cioè un'equazione del tipo:

$$(1) \quad a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p \frac{\partial u}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial y} + r u = 0,$$

in un'altra di forma canonica.

Questo passaggio si compie mediante la integrazione delle equazioni delle curve caratteristiche, e si opera in tre diversi modi secondochè l'equazione (1) è di tipo iperbolico, ellittico, o parabolico.

Ma, con ciò, non si è per nulla autorizzati ad asserire, senz'altro, che lo studio *in grande* dell'equazione (1) sia una conseguenza di quello della corrispondente trasformata di forma canonica.

Nel caso ellittico, alla trattazione dei problemi al contorno, senza la preventiva riduzione a forma canonica, hanno contribuito principalmente Picard, Hilbert, Paraf, E. Levi, Lichtenstein e Picone.

D'altra parte, le equazioni generali di tipo parabolico sono state studiate con notevole ampiezza da Gevrey e Picone, il quale si è proposto principalmente di *maggiorare* le soluzioni di tali equazioni.

Le equazioni del rimanente tipo — se non erro — sono state molto meno studiate dal punto di vista testé indicato<sup>1)</sup>.

Col presente lavoro mi propongo di dare il teorema di unicità e di esistenza per estese classi di equazioni lineari iperboliche. Esso si collega intimamente ad un mio precedente scritto sulle equazioni lineari del primo ordine (*“Trattazione in grande del problema dei valori iniziali per le equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti.”*, Atti della Reale Accad. delle Sc. di Torino 64 (1929), pp. 219—234) e dimostra, insieme a quello, che le trattazioni *in grande* per le equazioni alle derivate parziali dotate di caratteristiche reali, implicano analoghi problemi per le equazioni di queste curve.

1. Comincio col considerare l'equazione lineare omogenea del primo ordine in due variabili indipendenti:

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \theta(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

dove  $\theta(x, y)$  è una funzione continua, *sempre positiva*, nel rettangolo  $R$  definito dalle limitazioni

$$a' \leq x \leq a'', \quad b' \leq y \leq b'';$$

funzione che supporremo, inoltre, dotata di derivata parziale  $\theta_y'(x, y)$ , pure continua in  $R$ .

Assegniamo ora, nell'intervallo  $(a', a'')$  dell'asse delle  $x$ , due funzioni  $\omega(x), \lambda(x)$  dotate di derivate continue, e tali che

$$\begin{aligned} \omega'(x) &\neq 0; \\ \lambda'(x) &\leq 0, \quad \lambda(a') = b'', \quad \lambda(a'') = b'. \end{aligned}$$

La curva  $\Sigma$  di equazione  $y = \lambda(x)$  (e di punti terminali  $(a', b'')$ ,  $(a'', b')$ ) risulterà, evidentemente, tutta contenuta nel rettangolo sopra definito.

Ciò premesso, una soluzione dell'equazione (2) riesce univocamente determinata in  $R$ <sup>2)</sup> se le imponiamo la condizione

$$u[x, \lambda(x)] = \omega(x) \quad (a' \leq x \leq a'').$$

Dico che tale soluzione  $u(x, y)$  verifica, in tutto  $R$ , la disuguaglianza

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} < 0.$$

<sup>1)</sup> A questo punto mi incombe il dovere di citare il paragrafo 4° dell'interessante lavoro di Friedrichs e Lewy intitolato: *“Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen”*, [Math. Annalen 98 (1927), S. 192—204], nel quale trovasi considerata, nel senso sopra precisato, l'equazione del tipo (1) con  $a < 0$ ,  $b = 0$ .

<sup>2)</sup> Loc. cit. p. 234. — Le ipotesi ivi fatte corrispondono propriamente alle seguenti:  $\theta(x, y) \geq 0$ ,  $\lambda'(x) < 0$ . Ma è chiaro che i risultati ottenuti allora si applicano anche nel caso di  $\theta(x, y) > 0$ ,  $\lambda'(x) \leq 0$ .

Infatti, ricordiamo che lungo una curva caratteristica la  $u(x, y)$  assume un valore costante (quello fornito da  $\omega(x)$  nel punto di incontro di detta caratteristica con la curva  $\Sigma$ ), ed indichiamo con

$$(3) \quad y = \psi(x; x_0, y_0)$$

la curva caratteristica passante per il punto generico  $(x_0, y_0)$  di  $R$ ; cioè l'unico integrale dell'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \theta(x, y),$$

determinato dalla condizione iniziale  $y_0 = y(x_0)$ .

Detta  $\alpha$  l'ascissa del punto in cui tale curva incontra  $\Sigma$ , abbiamo dunque:

$$u[x, \psi(x; x_0, y_0)] = \omega(\alpha).$$

Insieme con la curva (3), consideriamo l'altra ad essa prossima:

$$y = \psi(x; x_0 + h, y_0),$$

e chiamiamo  $\alpha + k$  l'ascissa analoga di  $\alpha$ .

Abbiamo:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(\alpha + k) - \omega(\alpha)}{h};$$

e poichè al tendere di  $h$  a zero — in forza della continuità della curva  $\Sigma$ , e della funzione (3) rispetto ai valori iniziali — anche  $k$  tende a zero, si ricava

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \omega'(\alpha) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h}.$$

Per il calcolo di quest'ultimo limite osserviamo che

$$\psi(\alpha + k; x_0 + h, y_0) - \psi(\alpha; x_0, y_0) = k \cdot \lambda'(\alpha + \delta k) \quad (0 < \delta < 1)$$

che si può anche scrivere

$$k[\psi'_x(\alpha; x_0, y_0) - \lambda'(\alpha + \delta k) + \varepsilon_1] + h[\psi'_{x_0}(\alpha; x_0, y_0) + \varepsilon_2] = 0,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  denotando due quantità infinitesime con  $h$  e  $k$ .

Di qui si trae subito

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = \frac{\psi'_{x_0}(\alpha; x_0, y_0)}{\lambda'(\alpha) - \psi'_x(\alpha; x_0, y_0)}.$$

Ricordando ora che è

$$\psi'_x(\alpha; x_0, y_0) = \theta[\alpha, \psi(\alpha; x_0, y_0)] > 0,$$

$$\psi'_{x_0}(\alpha; x_0, y_0) = -\theta(x_0, y_0) e^{\int_{x_0}^{\alpha} \theta_y[t, \psi(t; x_0, y_0)] dt} \quad ^3)$$

<sup>3)</sup> Goursat, Cours d'Analyse, Tome III, p. 10, (Paris) 1927.

segue senz'altro che

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + 0,$$

e conseguentemente

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 < 0.$$

E' chiaro che all'analogha conclusione si perviene se si suppone  $\theta(x, y) < 0$ , in  $R$ , e si sostituisce la curva  $\Sigma$  con una curva  $\Sigma'$ , non decrescente, i cui punti terminali siano  $(a', b')$ ,  $(a'', b'')$ .

2. Sia ora l'equazione lineare di tipo iperbolico

$$(4) \quad a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p \frac{\partial u}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial y} + r u = 0 \quad (b^2 - ac > 0),$$

dove  $a, b, \dots, r$  sono assegnate funzioni continue nel rettangolo  $R$  di punti estremi  $(a', b')$ ,  $(a'', b'')$ .

L'equazione complessiva delle curve caratteristiche è

$$(5) \quad a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0.$$

Supponiamo che in tutto  $R$  sia verificata la condizione

$$a(x, y) > 0.$$

Posto allora

$$\theta_1(x, y) = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \theta_2(x, y) = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

la (5) si scinde nelle due equazioni differenziali del primo ordine

$$\frac{dy}{dx} = \theta_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \theta_2(x, y).$$

Supporremo inoltre — in quello che segue —  $\theta_1(x, y)$  e  $\theta_2(x, y)$  dotate di derivate parziali continue rispetto ad  $y$ <sup>4)</sup>, ed esamineremo i tre casi seguenti:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad c(x, y) < 0, \\ (2) \quad c(x, y) > 0, \quad b(x, y) < 0 \\ (3) \quad c(x, y) > 0, \quad b(x, y) > 0 \end{array} \right\} (a(x, y) > 0).$$

Nel primo caso avremo:

$$\theta_1(x, y) < 0, \quad \theta_2(x, y) > 0;$$

e negli altri due casi

$$0 < \theta_1(x, y) < \theta_2(x, y), \quad \theta_1(x, y) < \theta_2(x, y) < 0,$$

rispettivamente.

<sup>4)</sup> Questa condizione è certamente verificata se supponiamo, ad es.,  $a, b, c$  dotate di derivate parziali continue rispetto alla  $y$ .



Ciò premesso, consideriamo le due equazioni

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \theta_1(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \theta_2(x, y) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Per quanto si è detto al n.° 1, si può sempre determinare due soluzioni regolari  $\xi(x, y)$ ,  $\eta(x, y)$  di tali equazioni, per modo che risulti, in tutto  $R$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

Consequentemente:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1 \theta_2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0;$$

e le formule

$$(6) \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra i punti del rettangolo  $R$  e quelli di un dominio  $\Omega$  del piano  $(\xi, \eta)$ <sup>5)</sup>. Diciamo

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

le funzioni che nascono dall'inversione del sistema (6). E' noto che l'equazione (4), per effetto di queste ultime formule, si trasforma in un'equazione del tipo

$$(7) \quad 2b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + p_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + q_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + r_1 u = 0$$

dove

$$b_1 = \frac{2(ac - b^2)}{c} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

Consideriamo ora, in  $R$ , il quadrangolo curvilineo determinato dalle quattro caratteristiche (due per ciascun sistema):

$$\xi(x, y) = c_0, \quad \xi(x, y) = c_0 + \vartheta; \quad \eta(x, y) = c'_0, \quad \eta(x, y) = c'_0 + \vartheta',$$

e diciamo  $\Delta$  il relativo dominio. Ad esso corrisponde, nel piano  $(\xi, \eta)$ , il rettangolo  $\Delta'$  definito dalle limitazioni

$$c_0 \leq \xi \leq c_0 + \vartheta, \quad c'_0 \leq \eta \leq c'_0 + \vartheta'.$$

<sup>5)</sup> Come è ben noto, la condizione  $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$  non basta, da sola, ad assicurare la biunivocità della corrispondenza tra il punto  $(x, y)$  ed il punto  $(\xi, \eta)$ . Ma nel caso in esame, l'invertibilità di tale corrispondenza ci viene garantita dal fatto che in tutto  $R$ , ciascuna delle derivate  $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$  ha un segno costante.

Invero, al segmento definito da

$$a' \leq x \leq a'', \quad y = y_0 \quad (b' \leq y_0 \leq b'')$$

corrisponde, nel piano  $(\xi, \eta)$ , un arco di curva regolare crescente o decrescente, i cui estremi (sempre distinti) corrispondono ordinatamente agli estremi  $(a', y_0)$ ,  $(a'', y_0)$  del segmento considerato. E così pure per i segmenti di  $R$  paralleli all'asse delle  $y$ .

Ad ogni curva continua  $\sigma$  contenuta in  $\Delta$ , avente per estremi due vertici opposti del quadrangolo curvilineo, e che sia inoltre incontrata da ogni curva caratteristica penetrante nel quadrangolo in un sol punto, corrisponde, nel piano  $(\xi, \eta)$ , una curva  $\sigma'$  crescente o decrescente, tutta contenuta in  $\Delta'$ , con gli estremi in due vertici opposti di questo rettangolo; e viceversa. E poichè<sup>6)</sup> una soluzione dell'equazione (7) nulla su  $\sigma'$  con le sue derivate parziali  $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}$  è nulla in tutto il rettangolo  $\Delta'$ , ne segue che lo stesso si verifica<sup>7)</sup> in ciascuno dei tre casi (1), (2), (3), per la soluzione di (4), nulla su  $\sigma$  con le sue derivate parziali del prim'ordine.

L'analisi sviluppata innanzi ci permette altresì di affermare che esiste sempre, nelle ipotesi ammesse sopra, una soluzione dell'equazione (4), per la quale  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial x}$  prendono su  $\sigma$  delle successioni continue di valori assegnati.

Napoli, 30 dicembre 1929.

<sup>6)</sup> Cfr. ad es. E. Picard, Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles, p. 133 (Gauthier-Villars, 1927, Cahiers scientifiques).

<sup>7)</sup> E' ovvio che, nelle nostre ipotesi, dalle formule

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

segue che se  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , si ha anche  $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ .

(Eingegangen am 8. 5. 1930.)

# Berichtigung, das Aufstellen der identischen Gleichung einer Matrix betreffend.

Von  
R. Mehrke in Stuttgart.

Das von mir in den Math. Annalen 103, Heft 2, S. 312 gezeigte Verfahren, die (auch Hamilton-Cayleysche Gleichung genannte) identische Gleichung zu ermitteln, der die Folgepotenzen  $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3, \dots$  einer Matrix  $\mathfrak{A}$  genügen, ist nicht allgemein anwendbar, worauf mich Herr J. Wellstein freundlichst aufmerksam gemacht hat. Folgender Weg dagegen führt unbedingt und, wie ich glaube, mit dem geringsten Aufwand an Rechenarbeit zum Ziel. Die gegebene Matrix  $\mathfrak{A} = \|\alpha_{ik}\|$  als Extense mit den  $n^2$  Koordinaten  $\alpha_{ik}$  betrachtend, schreibe man diese (etwa durch senkrechte Striche in  $n$  Abschnitte getrennt) nebeneinander, am einfachsten in der Ordnung der Zeilen von  $\mathfrak{A}$ :

$$|\alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} | \alpha_{21} \alpha_{22} \dots \alpha_{2n} | \dots | \alpha_{n1} \alpha_{n2} \dots \alpha_{nn} |,$$

berechne, wenn  $\mathfrak{A}$  nicht schon linear abhängig von  $\mathfrak{A}^0$  sein sollte, die Koordinaten von  $\mathfrak{A}^2$  (s. Anm. 1), die man in derselben Weise anordnet, und prüfe nun auf die a. a. O. Nr. 4 („Rang einer Matrix“) gezeigte Weise, ob  $\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}^2$  linear abhängig sind. Ist es nicht der Fall, so nehme man  $\mathfrak{A}^3$  hinzu usw., bis man am Ziel ist. Beispiel (dasselbe wie a. a. O. auf S. 312):

					$\mathfrak{A}^0$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}^2$
9	1 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1	1		
-6	3 0 0 0	1 3 0 0	0 0 3 0	0 0 1 3		1	
1	9 0 0 0	6 9 0 0	0 0 9 0	0 0 6 9			1
	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	9	-6	1

Ergebnis:  $9\mathfrak{A}^0 - 6\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2 = 0$ .

Bemerkung 1. Die Koordinaten des (von rechts nach links gebildeten) Folgeprodukts  $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$  zweier Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , die ja durch „Komposition“ der Zeilen von  $\mathfrak{B}$  mit den Spalten von  $\mathfrak{A}$  entstehen, findet man wohl am bequemsten, wenn man die Elemente von  $\mathfrak{A}$  nach Spalten geordnet nebeneinander auf den unteren Rand eines Schiebers schreibt, um diesen mit seinen  $n$  Abschnitten der Reihe nach über die Abschnitte der Elemente von  $\mathfrak{B}$  zu halten, so daß die Faktoren der  $n$  Produkte, die man bei jedem Schritt bilden und addieren muß, übereinander stehen. In obigem Fall sind für  $\mathfrak{B}$  der Reihe nach  $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \dots$  zu nehmen.

Bemerkung 2. Bei zwei oder mehr verschiedenen Matrizen gibt es ebenfalls identische Gleichungen (Verallgemeinerungen der Hamilton-Cayley'schen Gleichung), für  $n = 2$  z. B. zwischen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  und  $(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{A})$ . Sie lassen sich auf entsprechende Weise finden.

(Eingegangen am 11. 7. 1930.)

# Über eine asymptotische Eigenschaft der Ableitungen der ganzen Funktionen von den Geschlechtern 1 und 2 mit einer endlichen Anzahl von Nullstellen.

Von

A. Wiman in Upsala.

1. Ist das Geschlecht  $p=1$ , so läßt sich offenbar die Frage auf die Untersuchung einer Funktion  $e^z f(z)$  reduzieren, wobei noch in der ganzen rationalen Funktion  $f(z)$  das zweite Glied fehlen kann. Schreibt man dann die  $n$ -te Ableitung  $e^z f_n(z)$ , so lassen sich, wenn  $n$  hinreichend groß ist, sämtliche Wurzeln von  $f_n(z)$  in konvergente Reihen nach fallenden Potenzen von  $n^{\frac{1}{2}}$  entwickeln. Diese Entwicklungen fangen alle mit dem Gliede  $-n$  an. Die Koeffizienten von  $n^{\frac{1}{2}}$  sowie das konstante Glied sind zwar verschieden, hängen aber nur von der Gradzahl  $k$  der Funktion  $f(z)$  ab. Schreibt man

$$(1) \quad f(z) = z^k + p_1 z^{k-1} + p_k,$$

so haben also die Wurzeln von  $f_n(z)$  für  $n \rightarrow \infty$  *asymptotische Grenzlagen, welche von  $p_1, \dots, p_k$  unabhängig sind*. Für eine reelle Funktion  $e^z f(z)$  folgt insbesondere, daß, wie es sich auch mit der Realität der Wurzeln von  $f(z)$  verhält, die Ableitungen von einem gewissen  $n$  an bloß reelle Wurzeln haben können. In dem oben ausgesprochenen Satz liegt aber viel mehr, indem, *unabhängig von der Realität der Funktion  $f(z)$ , die Nullstellen der Ableitungen für  $n \rightarrow \infty$  je nach reellen Grenzlagen streben müssen*.

Auch im Falle des Geschlechtes  $p=2$  gibt es einen Satz von der asymptotischen Grenzlage der Wurzeln der Ableitungen; doch bekommt man hier keine Entwicklung der Wurzeln von der Art wie die oben besprochene nach  $n^{\frac{1}{2}}$ . Die Sache scheint ja auch jetzt komplizierter zu werden, weil die Anzahl der Nullstellen sich mit jeder neuen Ableitung um eins vergrößert. In den reellen Fällen läßt sich offenbar die Funktion in

eine der Gestalten  $e^{-\frac{z^2}{2}} f(z)$  oder  $e^{\frac{z^2}{2}} f(z)$  überführen. Wie zu erwarten ist, findet man, daß im Falle  $e^{-\frac{z^2}{2}} f(z)$  die Ableitungen für  $n \rightarrow \infty$  lauter reelle Nullstellen bekommen<sup>1)</sup>. In ganz anderer Weise verhält es sich mit einer Funktion  $e^{\frac{z^2}{2}} f(z)$ , indem für  $n \rightarrow \infty$  die Ableitungen mit einer geraden Anzahl von Nullstellen lauter konjugiert imaginäre Wurzeln besitzen und die übrigen bloß eine reelle Wurzel haben. Es ist ja auch leicht zu verstehen, daß die Wurzeln der Ableitungen hier nach der imaginären Achse streben müssen, ebenso wie im Falle  $e^{-\frac{z^2}{2}} f(z)$  nach der reellen Achse.

2. Wir wollen zunächst die Ableitungen der Funktion

$$(2) \quad g(z) = e^z f(z)$$

untersuchen. Für die  $n$ -te Ableitung

$$g^{(n)}(z) = e^z f_n(z)$$

gilt in symbolischer Schreibweise

$$(3) \quad f_n(z) = \left(\frac{d}{dz} + 1\right)^n f(z) = f(z) + \binom{n}{1} f'(z) + \binom{n}{2} f''(z) + \binom{n}{k} f^{(k)}(z).$$

Als erstes Beispiel betrachten wir den Fall  $k=2$ , wo also

$$f(z) = z^2 + p_2.$$

Wir bekommen

$$f_n(z) = z^2 + 2nz + n(n-1) + p_2.$$

Für  $f_n(z) = 0$  erhalten wir demnach die Wurzeln

$$z_1, z_2 = -n \pm \sqrt{n - p_2}.$$

<sup>1)</sup> Vor mehreren Jahren habe ich, wie Herr M. Ålander in einer in diesem Jahre erschienenen Arbeit mitteilt, einen viel allgemeineren Satz als wahrscheinlich ausgesprochen. Es handelt sich dabei um eine reelle ganze Funktion  $e^{-\alpha z^2} f(z)$  ( $\alpha \geq 0$ ), wo  $f(z)$  vom Geschlechte 0 oder 1 ist und höchstens eine endliche Anzahl imaginärer Nullstellen besitzt. Meine Aussage war dann, daß nach einer endlichen Anzahl von Differentiationen die Ableitungen lauter reelle Wurzeln haben sollten. Die Veranlassung zu meiner Vermutung lag darin, daß in diesem Falle die ganze transzendente Funktion als Grenzfunktion einer Reihe von Polynomen mit nur endlich vielen imaginären Wurzeln betrachtet werden kann. In seiner Arbeit „Some problems connected with Fourier's work on transcendental equations“ (Quarterly Journal of Mathematics 1930) kommt Herr G. Pólya zu ganz demselben Satze, doch in Verfolgung eines etwas anderen Gedankenganges. Ebensovienig wie Herrn Pólya ist es mir gelungen, dies Theorem allgemein zu beweisen. Doch haben die Herren Pólya und Ålander einen Beweis für den speziellen Fall gegeben, daß die Ordnung der ganzen Funktion  $< \frac{1}{2}$  ist.

Dieses Resultat stimmt offenbar mit unserer obigen Behauptung überein, daß die Wurzeln von  $f_n(z)$  sich nach fallenden Potenzen von  $n^{\frac{1}{k}}$  entwickeln lassen, wobei als erstes Glied  $-n$  auftreten soll<sup>\*)</sup>.

Es sei jetzt  $k=3$  und

$$f(z) = z^3 + p_2 z + p_3.$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned} f_n(z) &= z^3 + 3nz^2 + 3n(n-1)z + n(n-1)(n-2) + p_2 z + p_2 n + p_3 \\ &= (z+n)^3 + (p_2 - 3n)(z+n) + p_3 + 2n. \end{aligned}$$

Für  $z+n=y$  haben wir demnach

$$y^3 - (3n - p_2)y + 2n + p_3 = 0.$$

Man sieht, daß die Entwicklungen von zwei Wurzeln  $y_1, y_2$  bzw. mit den Gliedern  $\pm \sqrt[3]{3n^{\frac{1}{3}}}$  anfangen; die dritte Wurzel  $y_3$  bekommt aber den endlichen Grenzwert  $\frac{2}{3}$  und läßt sich schon nach Potenzen von  $\frac{1}{n}$  entwickeln. In ähnlicher Weise gibt es stets, wie man leicht versteht, falls  $k$  ungerade ist, eine besondere Wurzel mit einer Entwicklung nach Potenzen von  $\frac{1}{n}$ .

Die Reihe der Funktionen  $f_n(z)$  kann auch rückwärts, d. h. für negative ganzzahlige  $n$ -Werte, fortgesetzt werden. Man erhält immer für  $n \geq 0$

$$f_{n+1}(z) = f_n(z) + f'_n(z).$$

Jede nachfolgende Funktion  $f_{n+h}(z)$  ( $h > 0$ ) erhält man mithin durch  $h$ -malige Differentiation von  $e^z f_n(z)$ . Mit der Entwicklung der Wurzeln für große Beträge von  $n$  nach abnehmenden Potenzen von  $n^{\frac{1}{k}}$  steht jetzt im Zusammenhange, daß für  $n \rightarrow -\infty$  sämtliche Wurzeln von  $f_n(z)$  imaginär werden, doch mit der Ausnahme, daß für  $k$  ungerade diejenige Wurzel, welche nach  $\frac{1}{n}$  entwickelt werden kann, auch für  $n \rightarrow -\infty$  reell bleibt, natürlich unter der Voraussetzung, daß  $f(z)$  eine reelle Funktion darstellt.

3. Es gilt jetzt nachzuweisen, wie man die besprochene Entwicklung der Wurzeln von  $f(z)$  nach  $n^{\frac{1}{k}}$  erhält. Offenbar genügt es zunächst den Fall zu untersuchen, wo man  $f(z) = z^k$  hat. Es wird dann (3) durch die

<sup>\*)</sup> Von diesem Resultate für  $k=2$  ausgehend, hat Herr D. Eriksson, ein Schüler von mir, ein Verfahren konstruiert, um zu beweisen, daß, falls für die Gradzahl  $k-1$  der reellen Funktion  $f(z)$  die Wurzeln von  $f_n(z)$  für  $n \rightarrow \infty$  reell werden und Differenzen von der Größenordnung  $\sqrt[n]{n}$  bekommen, dasselbe auch für die Gradzahl  $k$  der Fall sein muß. Da ein mehr in die Natur der Sache dringendes Beweisverfahren erwünscht schien, bekam ich den Anstoß zu der gegenwärtigen Arbeit.



speziellere Formel

$$(4) \quad f_n(z) = z^k + \binom{k}{1} n z^{k-1} + \binom{k}{2} n(n-1) z^{k-2} \\ + \binom{k}{h} n(n-1) \dots (n-h+1) z^{k-h} + \dots + n(n-1) \dots (n-k+1)$$

ersetzt. Hier soll das rechte Glied von (4) nach  $z+n$  entwickelt werden. Als erstes Glied erhält man dabei

$$(z+n)^k.$$

Die weitere Ausführung dieser Aufgabe läßt sich erreichen durch eine Umformung der Faktoren

$$(5) \quad n(n-1) \dots (n-h+1),$$

indem man hierin die Koeffizienten der besonderen Potenzen von  $n$  auf die Gestalt

$$(6) \quad \alpha_0 h + \alpha_1 h(h-1) + \alpha_2 h(h-1)(h-2) + \dots$$

bringt. Wie man sieht, handelt es sich hier um die symmetrischen Grundfunktionen der Größen  $1, 2, \dots, h-1$ . Für die eingliedrigen Funktionen hat man die Summe

$$\frac{h(h-1)}{2}.$$

Nimmt man die zugehörigen Glieder für  $h=2, 3, \dots, k$  zusammen, so tritt

$$- \frac{k(k-1)}{2} n(z+n)^{k-2}$$

als zweites Glied der Entwicklung von  $f_n(z)$  hervor. Die zweigliedrigen Grundfunktionen kann man nun, wie folgt, anordnen:

$$(h-1)[(h-2) + (h-3) + \dots + 1] \\ + (h-2)[(h-3) + (h-4) + \dots + 1] + \dots \\ = \frac{(h-1)^2(h-2)}{2} + \frac{(h-2)^2(h-3)}{2} + \dots \\ = \left[ \frac{(h-1)(h-2)(h-3)}{2} + \frac{(h-2)(h-3)(h-4)}{2} + \dots \right] \\ + [(h-1)(h-2) + (h-2)(h-3) + \dots].$$

Letztere beiden Summen ergeben

$$(6) \quad \frac{h(h-1)(h-2)(h-3)}{2 \cdot 4} + \frac{h(h-1)(h-2)}{3},$$

und als zugehörige Glieder von  $f_n(z)$  erhält man

$$\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2 \cdot 4} n^2 (z+n)^{k-4} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3} n (z+n)^{k-3}.$$

In gleicher Weise ergibt sich immer, daß, falls man bei der Summierung der  $\nu$ -gliedrigen Grundfunktion das Glied

$$\alpha_n h(h-1) \dots (h-x+1)$$

bekommen hat, hieraus für die  $(\nu+1)$ -gliedrige Grundfunktion die beiden Glieder

$$(7) \quad \frac{\alpha_x}{x+2} h(h-1) \dots (h-x-1) + \frac{x}{x+1} \alpha_n h(h-1) \dots (h-x)$$

entstehen. Man ersieht auch, daß die  $\nu$ -gliedrige Grundfunktion durch  $\nu$  Glieder summiert wird, denen wir jetzt die folgende Gestalt geben wollen:

$$(8) \quad \alpha_1^{(\nu)} h(h-1) \dots (h-\nu) + \dots + \alpha_\nu^{(\nu)} h(h-1) \dots (h-2\nu+1).$$

Aus (7) hat man nun ein Rekursionsverfahren, um  $\alpha_1^{(\nu+1)}, \dots, \alpha_{\nu+1}^{(\nu+1)}$  aus  $\alpha_1^{(\nu)}, \dots, \alpha_\nu^{(\nu)}$  zu bestimmen. Am leichtesten gelingt dies für die beiden äußersten Glieder  $\alpha_1^{(\nu+1)}$  und  $\alpha_{\nu+1}^{(\nu+1)}$ . Man bekommt nämlich

$$(9) \quad \alpha_1^{(\nu+1)} = \frac{\nu+1}{\nu+2} \alpha_1^{(\nu)}, \quad \alpha_{\nu+1}^{(\nu+1)} = \frac{\alpha_\nu^{(\nu)}}{2\nu+2}.$$

Da  $\alpha_1^{(1)} = \frac{1}{2}$  ist, so erhält man hieraus sofort

$$(10) \quad \alpha_1^{(\nu+1)} = \frac{1}{\nu+2}, \quad \alpha_{\nu+1}^{(\nu+1)} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2\nu+2)}.$$

Weiter hat man für  $1 < \lambda < \nu+1$

$$(11) \quad \alpha_\lambda^{(\nu+1)} = \frac{\alpha_{\lambda-1}^{(\nu)}}{\nu+\lambda+1} + \frac{\nu+\lambda}{\nu+\lambda+1} \alpha_\lambda^{(\nu)}.$$

Die gesuchte Entwicklung von  $f_n(z)$  können wir jetzt aufschreiben, indem die Koeffizientenreihe (8) zu den folgenden Gliedern Veranlassung gibt:

$$(12) \quad (-1)^\nu [\alpha_1^{(\nu)} k(k-1) \dots (k-\nu) n(z+n)^{k-\nu-1} + \dots + \alpha_\nu^{(\nu)} k(k-1) \dots (k-2\nu+1) n^\nu (z+n)^{k-2\nu}].$$

Man sieht, wie die Anzahl der Glieder in (8) und (12) anfänglich mit  $\nu$  wächst, dann aber, wenn  $2\nu > k$ , abnimmt.

4. Wir setzen  $z+n=y$  und betrachten

$$f_n(z) = \varphi(y, n) = y^k + \varphi_2(n) y^{k-2} + \varphi_3(n) y^{k-3} + \dots,$$

wobei nach (12) die Koeffizienten  $\varphi_i(n)$  ganze rationale Funktionen von  $n$  bedeuten, so daß sowohl  $\varphi_{2\nu}(n)$  als  $\varphi_{2\nu+1}(n)$  von der Gradzahl  $\nu$  sind. Die Entwicklungen der  $k$  Wurzeln  $y$  für große  $n$ -Werte erfolgen jetzt ganz einfach nach der Puiseuxschen Methode. Die Hauptsache ist dabei die Bestimmung der jedesmaligen Koeffizienten für  $n^{\frac{1}{2}}$ . Nach (10) und (12)

geschieht dies durch die Lösung der Gleichung

$$(13) \quad y^k - \frac{k(k-1)}{2} n y^{k-2} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2 \cdot 4} n^2 y^{k-4} + \dots \\ + (-1)^x \frac{k(k-1)(k-2) \dots (k-2x+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2x} n^x y^{k-2x} + \dots = 0.$$

Sind die fraglichen Koeffizienten  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , so genügen also diese der Gleichung

$$(14) \quad \psi_k(v) = v^k - \frac{k(k-1)}{2} v^{k-2} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2 \cdot 4} v^{k-4} + \dots \\ + (-1)^x \frac{k(k-1)(k-2) \dots (k-2x+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2x} v^{k-2x} + \dots = 0.$$

Die Polynome  $\psi_k(v)$  sind die sogenannten *Hermite'schen Polynome*, welche die ausgezeichneten Eigenschaften besitzen, daß dieselben zueinander sowohl eine Kette von Ableitungen als Sturmschen Funktionen bilden. Man hat ja

$$(15) \quad \psi_k'(v) = k \psi_{k-1}(v),$$

$$(16) \quad \psi_k(v) = v \psi_{k-1}(v) - (k-1) \psi_{k-2}(v).$$

Das Sturmsche Theorem läßt sich mithin hier sofort anwenden, und man findet, daß *sämtliche Nullstellen von  $\psi_k(v)$  reell sind*.

Für  $k$  ungerade  $= 2l+1$  fängt, wie bereits erwähnt, die Entwicklung für *eine* Wurzel von  $\varphi(y, n) = 0$  mit dem konstanten Gliede an, und zwar findet man hierfür, nach der Bezeichnung (12),

$$\alpha_l^{(l+1)} : \alpha_l^{(l)}.$$

Nach (10) hat man

$$\alpha_l^{(l)} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l}.$$

Für die Berechnung der Größen  $\alpha_l^{(l+1)}$  hat man nach (11) ein Rekurrenzverfahren, so daß

$$\alpha_1^{(3)} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2^{(3)} = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5}, \quad \alpha_3^{(4)} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 7}$$

und allgemein

$$\alpha_l^{(l+1)} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2l-1)(2l+1)} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2l-1)(2l+1)} + \dots \\ + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2l-2)(2l+1)}.$$

Man bekommt hiernach für  $\alpha_l^{(l+1)} : \alpha_l^{(l)}$  die Entwicklung

$$(17) \quad \frac{2l}{2l+1} + \frac{(2l-2)2l}{(2l-1)(2l+1)} + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2l-2)2l}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2l-1)(2l+1)}.$$

Das Anfangsglied der Entwicklung für die fragliche Wurzel  $y$  nimmt also mit  $k$  unbegrenzt zu.

Es sei noch bemerkt, daß, falls man für die übrigen Wurzeln  $y$ , deren Entwicklungen schon mit  $n^{\frac{1}{2}}$  anfangen, die konstanten Glieder berechnen will, hierfür nur noch die Kenntnis der oben betrachteten Größen  $\alpha_1^{(2)}$ ,  $\alpha_2^{(3)}$ , ...,  $\alpha_r^{(r+1)}$ , ... erforderlich ist. Dies folgt ja aus der allgemeinen Theorie, nach welcher in  $\varphi(y, n) = 0$   $y$  als algebraische Funktion von  $n$  betrachtet wird.

5. Wir betrachten jetzt den Fall einer allgemeinen Funktion  $f(z)$ , wo also die Koeffizienten  $p_1, p_2, \dots, p_k$  nicht zu verschwinden brauchen. Die Art und Weise, wie man Beiträge zu  $f_n(z)$  durch  $p_1 z^{k-1}, p_2 z^{k-2}, \dots$  erhält, ist sofort zu erkennen. Untersucht man so die Entwicklungen für  $\varphi(y, n) = 0$ , so sieht man ohne Schwierigkeit, daß  $p_1, p_2, \dots, p_k$  bzw. erst auf den Koeffizienten von  $n^{-\frac{1}{2}}, n^{-1}, \dots, n^{-\frac{k-1}{2}}$  Einfluß haben.

Es ist nun klar, daß, jedenfalls wenn die ganze positive Zahl  $n$  hinreichend groß ist, um dem gemeinschaftlichen Konvergenzbereiche der  $k$  Entwicklungen anzugehören, *sämtliche Wurzeln*  $f_n(z) = 0$  *der  $n$ -ten Ableitung einer reellen Funktion  $e^z f(z)$  reell sein müssen*; es ist ja der Koeffizient von  $n^{\frac{1}{2}}$  reell, und die folgenden Koeffizienten werden durch rationale Operationen bestimmt. Unabhängig davon, ob  $f(z)$  eine reelle Funktion darstellt oder nicht, haben wir die Eigenschaft gefunden, daß, bei festgehaltener Gradzahl  $k$  und fehlendem zweiten Gliede von  $f(z)$ , *die Nullstellen  $f_n(z) = 0$  der fraglichen  $n$ -ten Ableitung für  $n \rightarrow \infty$  feste reelle Grenzlagen haben müssen*; freilich kann dies nicht in gleichmäßiger Weise zutreffen.

Ohne Schwierigkeit überführt man die erhaltenen Resultate auf den allgemeineren Fall, wo die Exponentialfunktion  $e^z$  durch  $e^{az}$  ersetzt wird. Hat man dann  $a = |a|e^{i\theta}$ , so sammeln sich die Wurzeln der Ableitungen um den Strahl  $\varphi = \theta + \pi$ , und zwar so, daß dieselben sich durchschnittlich bei jeder Differentiation um die Strecke  $|a|$  bewegen; dabei vergrößern sich aber die gegenseitigen Abstände, welche ja von der Größenordnung  $n^{\frac{1}{2}}$  sein sollen.

6. Bei unserer zweiten Aufgabe handelt es sich um ganze Funktionen vom Geschlechte 2. Wenn wir zunächst den reellen Fall betrachten, so läßt sich der Exponentialfaktor leicht auf eine von den Gestalten

$$e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad e^{\frac{z^2}{2}}$$

bringen, wobei hier im rationalen Faktor  $f(z)$  kein Glied sich beseitigen läßt. Die Ableitungen der Funktion  $e^{-\frac{z^2}{2}}$  schreiben wir

$$(18) \quad H_n(z) e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Die Polynome  $H_n(z)$  müssen, wie leicht ersichtlich ist, lauter reelle Wurzeln haben und sind übrigens mit den Hermiteschen Polynomen identisch, welche schon in den vorhergehenden Entwicklungen eine Hauptrolle gespielt haben; zu beachten ist doch, daß bei den  $H_n(z)$  für das höchste Glied die Zeichen  $\pm$  abwechselnd auftreten. Man hat

$$\begin{aligned} H_1(z) &= -z, & H_2(z) &= z^2 - 1, & H_3(z) &= -z^3 + 3z, \\ H_4(z) &= z^4 - 6z^2 + 3, & H_5(z) &= -z^5 + 10z^3 - 15z, \dots \end{aligned}$$

Die rationale Funktion schreiben wir jetzt in der folgenden Weise:

$$(19) \quad f(z) = H_k(z) + \alpha_1 H_{k-1}(z) + \dots + \alpha_{k-1} H_1(z) + \alpha_k.$$

Bei der  $n$ -ten Ableitung von  $f(z) e^{-\frac{z^2}{2}}$  erhält dann der rationale Faktor die Gestalt

$$(20) \quad H_{n+k}(z) + \alpha_1 H_{n+k-1}(z) + \dots + \alpha_{k-1} H_{n+1}(z) + \alpha_k H_n(z).$$

Die Realität der Nullstellen der Ableitungen für  $n \rightarrow \infty$  ist also auf die entsprechende Eigenschaft eines Ausdrucks (20) bei gegebenen reellen Werten von  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  zurückgeführt. Der Gedanke liegt dann sehr nahe, daß, wenn die behauptete Vermutung wirklich zutrifft, die fraglichen Nullstellen sich an die Wurzeln von  $H_{n+k}(z) = 0$  anschmiegen müssen.

7. Wie vorhin erwähnt, hat man zwischen drei aufeinanderfolgenden Funktionen  $H_{n+x}(z)$  lineare Relationen von der Form

$$(21) \quad H_{n+x}(z) + z H_{n+x-1}(z) + (n+x-1) H_{n+x-2}(z) = 0 \quad (x=2, 3, \dots, k).$$

Diese Relationen wollen wir benutzen, um (20) auf einen Ausdruck, der nur  $H_{n+k}(z)$  und  $H_{n+k-1}(z)$  enthält, zu reduzieren. Man erhält so

$$(20') \quad (1+A) H_{n+k}(z) + (\alpha_1 + A_1) H_{n+k-1}(z),$$

wo  $A$  und  $A_1$  endliche Ausdrücke bedeuten, deren Glieder aus Faktoren von der Größenordnung  $\frac{1}{n}$  oder  $\frac{z}{n}$  bestehen. Dabei ergibt sich für  $A$  besonders, daß jedes Glied einen Faktor von der Größenordnung  $\frac{1}{n}$  enthält. Nun hat man für die Summe der Quadrate der Wurzeln von  $H_n(z) = 0$

$$s_2 = n(n-1).$$

Da die Wurzeln paarweise mit entgegengesetzten Zeichen auftreten, erhält man offenbar für den Maximalbetrag einer Wurzel

$$\bar{z} \leq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} < \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Hieraus folgt, daß, falls (20') für eine Nullstelle von  $H_{n+k-1}(z)$  betrachtet wird, man in bekannter Schreibweise

$$A = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

hat, und mithin, wenn  $n$  hinreichend groß ist, (20) dasselbe Zeichen wie  $H_{n+k}(z)$  nimmt. Ebenso muß es sich selbstverständlich für  $z = \mp \infty$  verhalten. In jedem von den erhaltenen  $n+k$  Intervallen liegt eine Nullstelle von  $H_{n+k}(z)$ . Der Ausdruck (20) hat also entgegengesetztes Zeichen in den Endpunkten jedes Intervalles. Die zugehörigen  $n+k$  Wurzeln müssen demnach reell sein, indem in jedem Intervalle je eine liegen muß.

Hiermit ist bewiesen, daß für eine ganze Funktion  $e^{\frac{f}{2}} f(z)$ , wo  $f(z)$  ein reelles Polynom bedeutet, die Ableitungen für  $n \rightarrow \infty$  lauter reelle Wurzeln haben müssen.

Weitere Aufschlüsse über die Abgrenzung der Lage der Nullstellen von  $H_n(z)$  erhält man durch die Newtonschen Formeln für die Potenzsummen

$$s_{2n} + p_2 s_{2n-2} + p_4 s_{2n-4} + \dots + 2n p_{2n} = 0 \quad \left( n = 1, 2, \left[ \frac{n}{2} \right] \right),$$

wo die Koeffizienten  $p_{2n}$  in Übereinstimmung mit (14) gebildet sind. In solcher Weise findet man

$$(22) \quad \begin{aligned} s_2 &= n(n-1), & s_4 &= n(n-1)(2n-3), \\ s_6 &= n(n-1)(5n^2-17n+15). \end{aligned}$$

Der Maximalbetrag  $\bar{z}$  einer Wurzel kann nun die obere Grenze

$$\sqrt[2n]{\frac{s_{2n}}{2}}$$

nicht übersteigen. Hieraus erhält man

$$(23) \quad \bar{z} \leq \frac{n}{2^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 - \frac{1}{n} \right]^{\frac{1}{2}} < n^{\frac{1}{2}} \left[ \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{3}{2n} \right) \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \left[ \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 5 - \frac{17}{n} + \frac{15}{n^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Es ist hier durch die Bestimmung von  $s_4$  bzw.  $s_6$  ersichtlich, daß der Betrag einer Nullstelle von  $H_n(z)$  nicht von höherer Größenordnung als  $n^{\frac{1}{2}}$  bzw.  $n^{\frac{1}{2}}$  sein kann. Nun ist offenbar jede Potenzsumme  $s_{2n}$ , als rationale Funktion, von der Größenordnung einer ganzen Funktion von  $n$ . Erweist sich dann  $s_{2n}$  von der Größenordnung  $n^{x+1}$ , so kann  $s_{2n+2}$  keine höhere Größenordnung als  $n^{x+2}$  besitzen. Es ist ja  $s_{2n+2} \leq \bar{z}^2 s_{2n}$ , und, nach der Annahme  $\bar{z} = O\left(n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}\right)$ , also  $s_{2n+2} = O\left(n^{\frac{x+2}{2} + \frac{1}{2n}}\right)$ , was  $s_{2n+2} = O(n^{x+2})$  zur Folge haben muß. Hieraus können wir den Schluß ziehen, daß für jede ganze Zahl  $x > 0$   $\bar{z} = o\left(n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}\right)$  oder, was hiermit äquivalent ist, für jede Zahl  $\varepsilon > 0$   $\bar{z} = o\left(n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right)$ .

Daß es anderseits Nullstellen von  $H_n(z)$  gibt, welche von der Größenordnung  $n^{\frac{1}{2}}$  sind, folgt schon aus den Ungleichungen

$$z \geq \sqrt{\frac{s_0}{s_1}} \geq \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \geq \sqrt{\frac{s_2}{n}}.$$

Für den kleinsten Betrag  $z$  einer nicht verschwindenden Wurzel von  $H_n(z) = 0$  erhält man Angaben durch die Ungleichungen

$$\sqrt{\frac{2}{s-3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{s-3}{s-4}}.$$

Für  $n$  gerade ergibt dies

$$\sqrt{\frac{2}{n}} \leq z \leq \sqrt{\frac{3}{n}}$$

und für  $n$  ungerade

$$\sqrt{\frac{6}{n-1}} \leq z \leq \sqrt{\frac{15}{n+2}}.$$

Was zuletzt den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung  $H_n(z)$  betrifft, so dürfte dieser stets von einer Größenordnung sein, die jedenfalls nicht viel von  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  abweicht.

8. Wir wollen noch beweisen, daß die Nullstellen der Ableitungen für  $n \rightarrow \infty$  sich asymptotisch den Nullstellen der Hermite'schen Polynome  $H_{n+k}(z)$  nähern. Zu dem Ende stellen wir folgende Betrachtungen an. Es sei  $z_*$  eine Wurzel von  $H_n(z) = 0$ . Wir haben die Entwicklung

$$(24) \quad H_n(z_* + u) = \sum_1^n H_n^{(x)}(z_*) \frac{u^x}{x!}.$$

Aus  $H'_n(z) = -n H_{n-1}(z)$  folgt

$$H_n^{(x)}(z) = (-1)^x n(n-1) \dots (n-x+1) H_{n-x}(z).$$

Der Relation (24) können wir mithin die Gestalt

$$(24') \quad H_n(z_* + u) = \sum_1^n (-1)^x \binom{n}{x} H_{n-x}(z_*) u^x$$

geben. Den Identitäten (21) entsprechend erhalten wir

$$(25) \quad (n-x) H_n^{(x)}(z) - z H_n^{(x+1)}(z) + H_n^{(x+2)}(z) = 0 \quad (x=0, 1, \dots, n-2).$$

Nach der vorigen Nummer haben wir  $z_* = o(n^{\frac{1}{2}})$ . Setzen wir jetzt noch  $u = \frac{v}{n}$ , so ergibt sich für das rechte Glied von (24) die Majorante

$$(26) \quad |H'_n(z_*)| \sum_1^n \left( \frac{2}{n^{\frac{1}{2}} - s} \right)^{x-1} \frac{|v|^x}{x!}.$$



Setzen wir jetzt  $|v| \leq K$ , wo  $K$  irgendeine feste positive Zahl bedeutet, so ersehen wir aus (26), daß die Entwicklung (24) in der Gestalt

$$(27) \quad H_n'(z_v) u(1+\eta) = -H_{n-1}(z_v) v(1+\eta)$$

geschrieben werden kann, wo für  $n \rightarrow \infty$   $\eta$  beliebig klein wird. In ähnlicher Weise bekommen wir unter denselben Voraussetzungen eine Entwicklung

$$(28) \quad H_{n-1}(z_v + u) = H_{n-1}(z_v)(1 + \eta_1),$$

wo  $\eta_1 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Wir untersuchen jetzt den Ausdruck (20) oder, was auf dasselbe hinauskommt, (20') für  $z = z_v + \frac{v}{n+k}$ . Nach den Ergebnissen der vorigen Nummer haben sowohl  $A$  wie  $A_1$  für  $n \rightarrow \infty$  den Grenzwert Null. Hieraus folgt, daß sowohl  $A H_{n+k}(z_v + \frac{v}{n+k})$  als  $A_1 H_{n+k-1}(z_v + \frac{v}{n+k})$  Beträge bekommen, deren Verhältnisse in bezug auf  $|H_{n+k}(z_v)|$  verschwindend klein werden. Dasselbe gilt für die Entwicklung von

$$H_{n+k}(z_v + \frac{v}{n+k}) + \alpha_1 H_{n+k-1}(z_v + \frac{v}{n+k}),$$

falls man von dem Gliede

$$(20) \quad (\alpha_1 - v) H_{n+k-1}(z_v)$$

absieht. Es bedeutet hier, wie leicht zu verstehen ist,  $z_v$  eine Nullstelle von  $H_{n+k}(z)$ .

Für  $z = z_v + \frac{v}{n+k}$  haben wir also jetzt für (20) die Darstellung

$$(20'') \quad H_{n+k-1}(z_v)[\alpha_1 - v + E(v)].$$

Setzen wir hier  $|\alpha_1 - v| = \varrho$ , wo  $\varrho$  irgendeine gegebene GröÙe  $> 0$  bedeutet, so hat man nach den obigen Auseinandersetzungen für  $n \rightarrow \infty$   $E(v) \rightarrow 0$ . Dies bedeutet aber, daß das Theorem von Rouché hier Anwendung findet, daß also die rationale Funktion (20'') im Inneren des Kreises  $|\alpha_1 - v| = \varrho$  eine Nullstelle hat, falls  $n$  genügend groß ist. Hier kann man für  $\varrho$  eine abnehmende Folge von Zahlen mit dem Grenzwert Null einführen. Da  $u = \frac{v}{n+k}$ , entspricht dem obigen Kreise der Kreis  $|u - \frac{\alpha_1}{n+k}| = \frac{\varrho}{n+k}$ . Die Nullstellen  $z_v + u$  der  $n$ -ten Ableitungen der

Funktion  $e^{-\frac{v}{z}} f(z)$  sollen sich also in solcher Weise für  $n \rightarrow \infty$  den Nullstellen  $z_v$  von  $H_{n+k}(z)$  unbegrenzt nähern, so daß das Hauptglied der Abweichungen durch  $\frac{\alpha_1}{n+k}$  gegeben wird. Wir bemerken hierzu, daß, da die Summe der Wurzeln von  $H_{n+k}(z) = 0$  gleich Null ist, man offenbar  $\alpha_1$  als Summe der Nullstellen von (20) erhält.

9. Bei der Herleitung dieses Resultates wurde in keiner Weise die Realität von  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , d. h. von  $f(z)$  benutzt. *Hieraus folgt, daß der Satz, daß die Nullstellen der Ableitungen von  $e^{-\frac{z^2}{2}} f(z)$  für  $n \rightarrow \infty$  sich unbegrenzt den Nullstellen der Hermite'schen Polynome  $H_{n+k}(z)$  nähern, für jede reelle oder imaginäre ganze rationale Funktion  $f(z)$  von der Gradzahl  $k$  gültig bleibt.*

Durch die einfache Transformation  $z' = iz$  wird die jetzt betrachtete Klasse von Funktionen in die neue Funktionenklasse  $e^{\frac{z'^2}{2}} f(z)$  übergeführt. Die Polynome  $H_{n+k}(z)$ , welche hier den Hermite'schen Polynomen entsprechen, haben, von einer etwaigen Wurzel  $= 0$  abgesehen, rein imaginäre Nullstellen. Also haben in diesem Falle die Wurzeln der Ableitungen für  $n \rightarrow \infty$  rein imaginäre Grenzlagen. *Setzen wir insbesondere voraus, daß  $f(z)$  eine reelle ganze rationale Funktion von der Gradzahl  $k$  darstellt, so haben die Ableitungen, wenn  $n$  hinreichend groß ist, nur für  $n+k$  ungerade eine reelle Wurzel, und diese nähert sich für  $n \rightarrow \infty$  der Grenzlage Null.*

Es ist auch leicht einzusehen, wie für den allgemeineren Fall einer Funktion  $e^{az^2} f(z)$  die Nullstellen der Ableitungen für  $n \rightarrow \infty$  sich gewissen bestimmten Grenzlagen nähern. Hat man  $a = |a| e^{i\theta}$ , so gehören diese Grenzlagen zu den beiden Strahlen  $\varphi = -\frac{\theta}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ .

Man kann fragen, inwieweit ähnliche Sätze auch für Funktionen  $e^{-\frac{z^2}{2}} f(z)$  bzw.  $e^{\frac{z^2}{2}} f(z)$  gelten, wo  $f(z)$  eine ganze transzendente Funktion vom Geschlechte 0 oder 1 mit unendlich vielen Nullstellen bedeutet. Für die reellen Fälle wäre z. B. zu untersuchen, unter welchen Beschränkungen, wenn man einen beliebigen endlichen Bereich betrachtet, die darin liegenden Nullstellen nach einer genügenden Anzahl von Differentiationen sämtlich reell bzw. imaginär werden, letzteres doch mit der Ausnahme einer einzigen reellen Wurzel für jede zweite Ableitung.

10. Betrachten wir allgemeiner eine ganze Funktion  $e^{Q(z)} f(z)$ , wo  $Q(z)$  und  $f(z)$  Polynome von den bzw. Gradzahlen  $q$  und  $k$  bezeichnen. Man kann fragen, ob derartige asymptotische Eigenschaften bei den Ableitungen auch für  $q > 2$  stattfinden. Es ist leicht ersichtlich, wie man die Frage auf den Fall

$$Q(z) = \pm \frac{z^q}{q} + \alpha_2 z^{q-2} + \dots$$

zurückführen kann, wobei doch in  $\pm \frac{z^q}{q}$  das untere Zeichen nur für den reellen Fall bei gerader Ordnung  $q$  mitgenommen zu werden braucht. In Analogie mit den oben erhaltenen Resultaten bekommt man zunächst die

Problemstellung, inwieweit die Nullstellen der Ableitungen einer derartigen Funktion  $e^{Q(z)} f(z)$  für  $n \rightarrow \infty$  sich denjenigen der Funktion  $e^{Q(z)} z^k$  anschmiegen. Für den einfachen Fall  $e^{\pm \frac{z^q}{q}} z^k$  ist es leicht zu zeigen, wie sich die Nullstellen der Ableitungen auf den  $q$  Strahlen  $\varphi = (2l+1) \frac{\pi}{q}$  bzw.  $\varphi = \frac{2l\pi}{q}$  ( $l = 0, 1, \dots, q-1$ ) verteilen. Herr Pólya hat nun bewiesen, daß die Häufungspunkte der Nullstellen der allgemeinen Funktion  $e^{Q(z)} f(z)$  eben diese Strahlen erfüllen und also nur von dem höchsten Gliede  $\pm \frac{z^q}{q}$  in  $Q(z)$  abhängig sind ( $q \geq 2$ )<sup>3</sup>. Es dürfte nicht zweifelhaft sein, daß hier noch nähere asymptotische Beziehungen zwischen den Nullstellen einer allgemeinen Funktion  $e^{Q(z)} f(z)$  und denjenigen der speziellen Funktion  $e^{\pm \frac{z^q}{q}} z^k$  zu erwarten sind.

Es sei hierzu ergänzend erwähnt, daß, wie man aus unseren obigen Resultaten leicht herauslesen kann, als einziger Häufungspunkt für die Nullstellen der Ableitungen einer Funktion  $e^z f(z)$ , wo  $f(z)$  eine ganze rationale Funktion bezeichnet,  $z = \infty$  auftritt. Herr Ålander hat neuerdings den Satz gefunden, daß es ganze Funktionen *jeder beliebigen Ordnung* gibt, deren Ableitungen in der Nähe jedes Punktes der komplexen Ebene Null werden. Diesem vielleicht etwas überraschenden Satze wollen wir den folgenden Satz gegenüberstellen, der jedoch ausdrücklich bloß als Vermutung gegeben werden möge:

*Hat man eine ganze Funktion  $e^z f(z)$ , wo  $f(z)$  vom Geschlechte Null ist, so gibt es für die Häufungspunkte der Nullstellen der Ableitungen nur die zwei Möglichkeiten, daß sie entweder die ganze reelle Achse erfüllen oder sich auf den einzigen Punkt  $z = \infty$  reduzieren.*

Ähnliche Sätze lassen sich leicht für die Fälle, wo  $q \geq 2$  ist, formulieren. Da es sich doch hier nur um Vermutungen handelt, wollen wir hierauf nicht näher eingehen.

Upsala, 5. Juli 1930.

<sup>3</sup>) Man sehe Pólya, Über die Nullstellen sukzessiver Derivierten, Math. Zeitschr. 12 (1921), S. 36. Wie Herr Pólya mitteilt, hat eine Arbeit von Herrn Ålander ihm den Anlaß zu dieser Abhandlung gegeben.

# Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen<sup>1)</sup>.

Von

W. Seidel in München.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	182
Kapitel I. Der Fatousche Satz und einige Folgerungen .	185
Kapitel II. Konforme Abbildung spezieller Gebietaklassen.	
§ 1. Gebiete, die von einer rektifizierbaren Kurve begrenzt sind . . . . .	193
§ 2. Sterne . . . . .	203
§ 3. Konvexe Gebiete . . . . .	208
Kapitel III. Jordansche Kurven von beschränkter Krüm- mung und eine funktionentheoretische Anwendung.	
§ 1. Geometrisches über Jordansche Kurven von be- schränkter Krümmung . . . . .	213
§ 2. Funktionentheoretische Anwendung . . . . .	217
Kapitel IV. Verallgemeinerungen . . . . .	226
Kapitel V. Beispiele . . . . .	232

## Einleitung.

1. Bei dem Problem der konformen Abbildung des allgemeinen, einfach zusammenhängenden, schlichten Gebietes mit mindestens zwei Randpunkten auf eine Kreisfläche hat Osgood zuerst eine scharfe Trennung zwischen dem Problem der konformen Abbildung des *Inneren* eines Gebietes auf das *Innere* einer Kreisfläche und dem Problem des Anschlusses dieser Abbildung an den Rand eingeführt. Osgood<sup>2)</sup> war ebenfalls der erste, der

<sup>1)</sup> Inauguraldissertation der philosophischen Fakultät Sektion II der Ludwig-Maximilians-Universität München.

<sup>2)</sup> W. F. Osgood, Trans. of the Amer. Math. Soc. 1 (1900), S. 310—314.

das Problem des Inneren durch einen Existenzbeweis der zum Gebiete gehörigen Greenschen Funktion vollständig gelöst hat. Seitdem sind verschiedene Methoden zur Lösung dieses Problems angegeben worden. Von diesen sei besonders die durch die Arbeiten von C. Carathéodory<sup>2)</sup>, Koebe<sup>4)</sup> und Bieberbach<sup>5)</sup> entwickelte Methode des Schmiegungsverfahrens erwähnt, welche sich ausschließlich funktionentheoretischer Hilfsmittel bedient.

Das zweite Problem, das Problem der Abbildung des Randes, ist noch nicht so eingehend behandelt worden. Es werden hier einige der wichtigsten Ergebnisse in dieser Richtung kurz zusammengefaßt:

I. Aus dem Satze von Fatou<sup>6)</sup> über beschränkte Funktionen weiß man, daß, wenn  $f(z)$  den Einheitskreis  $|z| < 1$  auf einen ganz im Endlichen liegenden Bereich konform abbildet, der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta_0}} f(z),$$

außer höchstens in einer Menge von Punkten  $\theta_0$  vom Maße Null, vorhanden ist; hierbei soll der Punkt  $z$  sich dem Punkte  $e^{i\theta_0}$  auf Wegen nähern, die den Kreis  $|z| = 1$  nicht berühren.

II. Ist das Gebiet einfach zusammenhängend und von einer einzigen Jordanschen Kurve begrenzt, so ist die Abbildung im abgeschlossenen Gebiete stetig und bildet es eindeutig und stetig auf den vollen, durch seine Peripherie abgeschlossenen Einheitskreis ab<sup>7,8)</sup>.

III. An jeder Stelle, wo die als Jordansche Kurve angenommene Randkurve Tangenten besitzt, ist die Abbildung winkeltreu, und in den Ecken des Randes, d. h. wo zwei Randkurvenstücke, die beide mit Tangenten versehen sind, zusammenstoßen, ist die Abbildung winkelpropportional<sup>9)</sup>.

Hieraus aber folgt durchaus nicht, daß, wenn die Randkurve in einem Punkte eine Tangente besitzt, die Abbildung in diesem Punkte *konform* sein muß. Es kann nämlich vorkommen, wie sofort an einem Beispiel erläutert wird, daß in einem solchen Punkte die Abbildung zwar winkeltreu ist, aber daß das Vergrößerungsverhältnis unendlich wird. Die Funktion  $w = f(z) = (1+z) \log(1+z)$  ist im Kreise  $|z| < 1$  regulär. Wenn man noch die Bedingung  $f(0) = 0$  hinzufügt, so ist die Funktion somit im Kreise eindeutig bestimmt. In der Umgebung des Punktes  $z = -1$  ist die Funktion

<sup>2)</sup> C. Carathéodory, *Math. Annalen* 72 (1912), S. 107–144.

<sup>4)</sup> P. Koebe, *Journal f. Math.* 145 (1915), S. 177–223.

<sup>5)</sup> L. Bieberbach, *Konforme Abbildung*, S. 94–108.

<sup>6)</sup> P. Fatou, *Acta Math.* 30 (1906), S. 366–368.

<sup>7)</sup> W. F. Osgood und E. H. Taylor, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 14, Nr. 2. S. 277–298, April 1913.

<sup>8)</sup> C. Carathéodory, *Math. Annalen* 73 (1913), S. 305–320.

<sup>9)</sup> C. Carathéodory, *Schwarz-Festschrift*, Berlin 1914, S. 38–41.

schlicht und bildet diese Umgebung konform auf ein Gebiet der  $w$ -Ebene ab. Der Rand dieses Gebietes ist in der Umgebung des Punktes  $w = f(-1)$  eine konvexe Kurve, welche im Punkte  $w = f(-1)$  eine wohldefinierte Tangente besitzt. Nach dem Satz III ist also die Abbildung winkeltreu. Andererseits aber, wenn  $z$  aus dem Kreinneren gegen den Punkt  $z = -1$  strebt, so ist  $\lim_{z \rightarrow -1} |f'(z)| = \infty$ , das Vergrößerungsverhältnis also unendlich.

Neuerdings hat Carathéodory<sup>10)</sup> eine hinreichende Bedingung dafür gefunden, daß die Abbildung in einem Randpunkte konform sei. Der Satz lautet:



Fig. 1.

IV. In einem Punkte  $P$  der Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Gebietes  $G$  sei es möglich, zwei sich im Punkte  $P$  berührende Kreise  $C$  und  $D$  anzugeben, die die folgende Eigenschaft haben: Jeder Punkt des Inneren von  $C$  ist ein Punkt von  $G$  und kein Punkt des Inneren von  $D$  liegt in  $G$ . Bei jeder konformen Abbildung von  $G$  auf das Innere eines Kreises ist die Abbildung auch im Punkte  $P$  konform und das Vergrößerungsverhältnis in diesem Punkte ist endlich.

Die letzten drei Beispiele zeigen, wie bestimmte Eigenschaften des Randes uns ermöglichen, auf das Verhalten der Abbildungsfunktion oder ihrer ersten Ableitung am Rande zu schließen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist zu zeigen, wie noch speziellere Aussagen über den Rand die Existenz der Randwerte höherer Ableitungen der Abbildungsfunktion bestimmen, und diese Randfunktionen näher zu untersuchen. Probleme dieser Art sind bereits von Painlevé<sup>11)</sup>, Lichtenstein<sup>12)</sup> und Lavrentieff<sup>13)</sup> untersucht worden.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird der Beweis des Fatouschen Satzes gegeben, sowie einige Verschärfungen des Satzes, die später in der Theorie häufig benutzt werden. Im zweiten Kapitel wird die Ränderzuordnung bei der konformen Abbildung dreier Gebietsklassen untersucht; nämlich der Gebiete, welche durch rektifizierbare Kurven begrenzt sind, der Sterne und der konvexen Gebiete. Manche in diesem Teil gefundenen Ergebnisse sind nicht neu. M. und F. Riesz<sup>14)</sup> und Lusin und Priwaloff<sup>15)</sup> haben die Ränderzuordnung bei der ersten Gebietsklasse schon untersucht

<sup>10)</sup> C. Carathéodory, Berl. Sitzungaber. 1929, S. 15—16. Einige Ergebnisse der letzteren Arbeit finden sich bereits bei J. Wolff, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris 183 (1926), S. 500—502.

<sup>11)</sup> P. Painlevé, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris 112 (1891), S. 653—657.

<sup>12)</sup> L. Lichtenstein, Arch. d. Math. u. Phys. 25 (1917), S. 179.

<sup>13)</sup> Lavrentieff, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris 184 (1927), S. 1407.

<sup>14)</sup> M. und F. Riesz, Ber. des 4. skand. Mathematikerkongresses zu Stockholm 1916, S. 27—44.

und Lusin und Priwaloff haben in ihrer gemeinsamen Arbeit<sup>15)</sup> die fast überall am Rande stattfindende Konformität bei speziellen Sternabbildungen festgestellt. Es schien jedoch nicht ohne Wert zu sein, diese Resultate und noch andere einer systematischen Bearbeitung zu unterziehen. Das dritte Kapitel der vorliegenden Arbeit befaßt sich mit einem Hilfssatz aus der Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen und mit einer rein geometrischen Untersuchung über Jordansche Kurven von beschränkter Krümmung. Aus dieser Untersuchung ergibt sich dann eine hinreichende Bedingung für die Beschränktheit im Einheitskreise  $|z| < 1$  der ersten Ableitung der Abbildungsfunktion  $f(z)$ , und im vierten Kapitel ergeben sich ähnliche Resultate für höhere Ableitungen. Im fünften und letzten Kapitel werden verschiedene Beispiele angegeben, die den Zweck haben, die vorhergehende Theorie zu erläutern.

Es sei noch erwähnt, daß P. Montel in seinem Buch *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, S. 123, das hier behandelte Problem bereits gestellt hat.

Es sei mir gestattet, Herrn Professor Carathéodory, auf dessen Veranlassung die vorliegenden Untersuchungen ausgeführt wurden, an dieser Stelle meinen herzlichen Dank auszusprechen für die stete Anregung und reichliche Unterstützung, die er mir jederzeit in bereitwilligster Weise zuteil werden ließ. Gleichzeitig erlaube ich mir, den Herren Radó und Bochner meinen aufrichtigsten Dank zum Ausdruck zu bringen für das freundliche und wohlwollende Interesse, das sie der Arbeit entgegengebracht haben.

### Kapitel I.

#### Der Fatousche Satz und einige Folgerungen.

2. Der Satz von Fatou<sup>16)</sup> lautet folgendermaßen:

Satz 1. *Es sei  $f(z)$  eine im Kreise  $|z| < 1$  reguläre, beschränkte, analytische Funktion*

$$(2,1) \quad |f(z)| < M.$$

*Dann existiert der Grenzwert*

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = f(e^{i\theta})$$

*für fast alle Punkte der Kreisperipherie  $|z| = 1$ , wenn man sich auf Wegen nähert, die den Kreis nicht berühren<sup>17)</sup>.*

<sup>15)</sup> N. Lusin und J. Priwaloff, *Annales de l'École Normale Sup.* 42 (1925), S. 156 bis 159. Dort findet man auch weitere Literaturangaben.

<sup>16)</sup> P. Fatou, loc. cit. \*).

<sup>17)</sup> Der Ausdruck „Wege, die den Kreis nicht berühren“ ist so zu verstehen: Wir ziehen nur solche Annäherungswege an den Punkt  $z = e^{i\theta}$  in Betracht, die im Innern eines Winkels liegen, dessen Spitze mit dem Punkte  $z = e^{i\theta}$  zusammenfällt und dessen Schenkel im Innern von  $|z| < 1$  liegen.



Obwohl der Beweis dieses Satzes schon oft in der Literatur wiedergegeben worden ist<sup>19)</sup>, wird er auch hier skizziert, damit wir auf ihn später bequem Bezug nehmen können.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, daß

$$f(0) = 0$$

ist. Wir führen dann die Funktion

$$(2,2) \quad F(\varrho, \vartheta) = \int_0^{\vartheta} f(\varrho e^{i\vartheta}) d\vartheta = \int_{\varrho}^{\varrho e^{i\vartheta}} \frac{f(z)}{iz} dz$$

ein, wobei  $0 \leq \varrho < 1$  und  $\vartheta$  beliebig reell ist. Da die Funktion  $\frac{f(z)}{iz}$  im Kreise  $|z| < 1$  regulär ist, so ist  $F(\varrho, \vartheta)$  nach dem Cauchyschen Integralsatz im Kreise eindeutig. Ferner folgt aus (2, 1) und aus dem Schwarzschen Lemma, daß auch

$$\left| \frac{f(z)}{iz} \right| < M$$

ist. Es ist also

$$\begin{aligned} & F(\varrho + \Delta\varrho, \vartheta) - F(\varrho, \vartheta) \\ &= \int_{\varrho + \Delta\varrho}^{(\varrho + \Delta\varrho)e^{i\vartheta}} \frac{f(z)}{iz} dz - \int_{\varrho}^{\varrho e^{i\vartheta}} \frac{f(z)}{iz} dz = \int_{\varrho + \Delta\varrho}^{\varrho} \frac{f(z)}{iz} dz + \int_{\varrho e^{i\vartheta}}^{(\varrho + \Delta\varrho)e^{i\vartheta}} \frac{f(z)}{iz} dz \end{aligned}$$

und daher auch

$$(2,3) \quad |F(\varrho + \Delta\varrho, \vartheta) - F(\varrho, \vartheta)| \leq 2M |\Delta\varrho|.$$

Läßt man nun  $\vartheta$  variieren, so ist unmittelbar nach (2, 2).

$$(2,4) \quad |F(\varrho, \vartheta + \Delta\vartheta) - F(\varrho, \vartheta)| \leq M |\Delta\vartheta|.$$

Aus (2, 3) folgt nun ohne weiteres, daß der Grenzwert

$$(2,5) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 1} F(\varrho, \vartheta) = F(\vartheta)$$

für alle Werte von  $\vartheta$  existiert und daß die Konvergenz sogar *gleichmäßig* in  $\vartheta$  ist. Führt man den Grenzübergang (2, 5) in der Ungleichung (2, 4) aus, so bekommt man

$$|F(\vartheta + \Delta\vartheta) - F(\vartheta)| \leq M |\Delta\vartheta|$$

oder

$$\left| \frac{F(\vartheta + \Delta\vartheta) - F(\vartheta)}{\Delta\vartheta} \right| \leq M.$$

Die Funktion  $F(\vartheta)$  hat also *beschränkte Differenzenquotienten*. Nach einem bekannten Satz von Lebesgue ist dann  $F(\vartheta)$  fast überall differenzierbar.

<sup>19)</sup> Der hier angegebene Beweis stammt von C. Carathéodory, loc. cit. \*).

Es sei nun  $\vartheta = \vartheta_0$  eine beliebige Stelle, an der  $F(\vartheta)$  differenzierbar ist. Wir wollen dann beweisen, daß

$$(2,6) \quad \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\vartheta_0}) = F'(\vartheta_0)$$

ist. Zu diesem Zwecke stellen wir die Funktion  $f(z)$  im Kreise  $|z| \leq \varrho < 1$  durch das Poissonsche Integral dar,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0 + \pi} f(\varrho e^{it}) \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta_0 - t) + r^2} dt,$$

wobei  $z = re^{i\vartheta}$ ,  $0 \leq r < \varrho$ , gesetzt wird. Partielle Integration liefert dann

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0 + \pi} F(\varrho, t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta_0 - t) + r^2} \right) dt,$$

denn der ausintegrierte Teil verschwindet wegen der Eindeutigkeit von  $F(\varrho, t)$ . Da der Grenzübergang (2,5) gleichmäßig in  $\vartheta$  war, so können wir diesen Grenzübergang auch unter dem Integralzeichen in der letzten Gleichung ausführen. Wir bekommen somit

$$(2,7) \quad f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0 + \pi} F(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta_0 - t) + r^2} \right) dt.$$

Auf die Abschätzungen des Integrals in (2,7), die die Richtigkeit der Beziehung (2,6) erweisen, wird hier nicht näher eingegangen, da sie schon öfters in der Literatur ausgeführt worden sind<sup>19)</sup>.

Da aber  $F(\vartheta)$  an fast allen Stellen differenzierbar ist, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\vartheta}) = f(e^{i\vartheta})$$

für fast alle Werte von  $\vartheta$ .

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß derselbe Grenzwert für alle nicht tangentiellen Annäherungen auch existiert. Dies folgt aber unmittelbar aus einem Satze von Lindelöf<sup>20)</sup>.

3. Gewisse Folgerungen aus dem Fatouschen Satz werden jetzt bewiesen.

<sup>19)</sup> Z. B. bei C. Carathéodory, loc. cit. \*) oder L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Band II, S. 148—150.

<sup>20)</sup> Dieser Satz lautet folgendermaßen: Wenn  $f(z)$  in einem Winkelraum beschränkt ist und bei Annäherung an seine Ecke (z. B. längs einer Geraden) einem endlichen Grenzwert zustrebt, so strebt  $f(z)$  gleichmäßig gegen diesen Grenzwert in jedem Teilwinkelraum. Der Satz befindet sich bei E. Lindelöf, Acta Soc. a. Fennicae 46 (1915), Nr. 4.

**Satz 2.** *Es sei  $f(z)$  eine im Kreise  $|z| < 1$  reguläre, analytische Funktion mit einem positiven Realteil. Dann existiert*

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = f(e^{i\theta})$$

*und ist endlich außer höchstens in einer Punktmenge der Kreisperipherie  $|z| = 1$  vom Maß Null, wenn  $z$  sich an einen Peripheriepunkt  $e^{i\theta}$  längs Wegen nähert, die den Einheitskreis nicht berühren.*

Die Funktion  $w = f(z)$  ist im Kreise  $|z| < 1$  regulär und nimmt in ihm nur solche Werte an, die in der Halbebene  $\Re w > 0$  enthalten sind. Die Möbiussche Transformation

$$t = \frac{w-1}{w+1}$$

bildet die Halbebene  $\Re w \geq 0$  auf den Einheitskreis  $|t| \leq 1$  ab, wobei Randpunkte und nur Randpunkte der Halbebene in Peripheriepunkte des Kreises übergeführt werden. Also wird der Kreis  $|z| < 1$  durch die Transformation

$$(3,1) \quad t = \varphi(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$$

auf ein Gebiet der  $t$ -Ebene abgebildet, das im Inneren des Kreises  $|t| < 1$  liegt. Die Funktion  $\varphi(z)$  ist also im Kreise  $|z| < 1$  beschränkt:

$$|\varphi(z)| < 1$$

und es gilt daher der Satz von Fatou (Satz 1) für diese Funktion. Löst man die Gleichung (3,1) nach  $f(z)$  auf, so ist

$$f(z) = \frac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)}.$$

Nun aber kann die Randfunktion der beschränkten Funktion  $\varphi(z)$  nach einem Satz von M. und F. Riesz<sup>21)</sup> höchstens in einer Nullmenge von Peripheriepunkten den Wert 1 annehmen; denn sonst würde sie nach diesem Satz identisch gleich Eins sein. Also nähert sich  $f(z)$  für fast alle Peripheriepunkte bestimmten endlichen Werten, wenn man sich auf Wegen nähert, die den Einheitskreis nicht berühren.

4. Der nächste Satz sowie der Beweis rühren von A. Pleßner her<sup>22)</sup>.

**Satz 3.** *Es sei  $f(z)$  eine im Kreise  $|z| < 1$  reguläre, analytische Funktion, für welche die Ungleichung*

$$(4,1) \quad \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta < l, \quad (r < 1),$$

<sup>21)</sup> M. und F. Riesz, loc. cit. <sup>16)</sup>.

<sup>22)</sup> A. Pleßner, Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, Dissertation Gießen 1923, S. 16, Satz 5.

gilt. Dann existiert

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = f(e^{i\theta})$$

und ist endlich außer höchstens in einer Punktmenge der Kreisperipherie vom Maß Null, wenn  $z$  sich an einen Peripheriepunkt längs Wegen nähert, die den Einheitskreis nicht berühren. Die so bestimmten Randwerte  $f(e^{i\theta})$  bilden eine im Intervalle  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  summierbare Funktion.

Wir definieren die Funktion

$$(4,2) \quad \mu(r, \theta) = \int_0^\theta \Re \{f(re^{it})\} dt.$$

Zerlegt man das Intervall  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  durch beliebige  $n-1$  Punkte

$$0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \dots < \vartheta_{n-1} < \vartheta_n = 2\pi$$

in  $n$  Teilintervalle und beachtet man, daß

$$|\mu(r, \vartheta_{k+1}) - \mu(r, \vartheta_k)| \leq \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k+1}} |\Re \{f(re^{it})\}| dt$$

ist, so folgt die Ungleichheit

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\mu(r, \vartheta_{k+1}) - \mu(r, \vartheta_k)| \leq \int_0^{2\pi} |\Re \{f(re^{it})\}| dt.$$

Nach (4,1) ist also

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\mu(r, \vartheta_{k+1}) - \mu(r, \vartheta_k)| < l;$$

also die Funktion  $\mu(r, \vartheta)$  für alle  $r < 1$  von beschränkter Variation in  $\vartheta$ . Ferner folgt aus (4,1) und (4,2), daß

$$(4,3) \quad |\mu(r, \vartheta)| < l$$

gilt. Nach einem Auswahlssatz von Helly<sup>23)</sup> folgt nun, daß es eine gegen Eins konvergierende Folge von positiven Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  kleiner als Eins gibt, derart daß

$$(4,4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(r_n, \vartheta) = \mu(\vartheta)$$

für alle  $\vartheta$  außer höchstens abzählbar vielen existiert. Die Funktion  $\mu(\vartheta)$ , besagt der Satz weiter, ist dann von beschränkter Variation.

Wir stellen die Potentialfunktion  $\Re \{f(re^{i\theta})\}$  in  $|z| \leq \varrho < 1$  durch ein Poissonsches Integral dar:

$$\Re \{f(re^{i\theta})\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re \{f(\varrho e^{it})\} \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(\theta - t)} dt.$$

<sup>23)</sup> E. Helly, Sitzungsber. der Wiener Akademie 121 (1912), S. 265–297.

Berücksichtigt man (4, 2) und führt partielle Integration im letzten Integral aus, so bekommt man

$$\Re \{f(re^{i\vartheta})\} = \frac{\mu(\varrho, 2\pi) - \mu(\varrho, 0)}{2\pi} \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 - 2r\varrho \cos \vartheta + r^2} \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varrho, t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 + r^2 - 2r\varrho \cos(\vartheta - t)} \right) dt.$$

Indem wir nun  $\varrho$  die Werte  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  durchlaufen lassen, können wir wegen (4, 3) und (4, 4) nach einem klassischen Satz von Lebesgue den Grenzübergang  $\varrho \rightarrow 1$  unter dem Integralzeichen ausführen. Es ist somit

$$(4, 5) \quad \Re \{f(re^{i\vartheta})\} = \frac{\mu(2\pi) - \mu(0)}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \vartheta + r^2} \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta - t) + r^2} \right) dt.$$

Fügt man zu den Voraussetzungen unseres Satzes noch die Bedingung  $f(0) = 0$  hinzu, was offenbar die Allgemeinheit des Satzes nicht einschränkt, so sieht man aus (4, 2), daß  $\mu(r, \vartheta)$  eine eindeutige Funktion von  $\vartheta$  ist. Insbesondere also ist

$$\mu(r, 2\pi) = \mu(r, 0), \quad (r < 1),$$

also in der Grenze für  $r \rightarrow 1$

$$\mu(2\pi) = \mu(0).$$

Partielle Integration an dem Integral in (4, 5) liefert unter Berücksichtigung der letzten Gleichung die Relation

$$(4, 6) \quad \Re \{f(re^{i\vartheta})\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\vartheta - t)} d\mu(t),$$

wobei das Integral rechts ein Stieltjessches Integral ist. Wir haben aber schon gesehen, daß  $\mu(t)$  von beschränkter Variation ist, also in der Form

$$(4, 7) \quad \mu(t) = \mu_1(t) - \mu_2(t)$$

darstellbar ist, wobei  $\mu_1(t)$  und  $\mu_2(t)$  monoton wachsende Funktionen sind. Die Formel (4, 7), in (4, 6) eingetragen, liefert

$$\Re \{f(re^{i\vartheta})\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\vartheta - t)} d\mu_1(t) \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\vartheta - t)} d\mu_2(t).$$

Jedes der rechts stehenden Integrale definiert eine im Einheitskreise reguläre positive Potentialfunktion<sup>24)</sup>. Wir können also schreiben

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z),$$

wo  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$  reguläre, analytische Funktionen mit positiven Realteilen im Kreise  $|z| < 1$  sind. Wendet man also den Satz 2 auf diese zwei Funktionen an, so bekommt man den ersten Teil des Satzes 3.

Um die Summierbarkeit der Randfunktion  $f(e^{i\theta})$  zu beweisen, kehren wir zur Gleichung (4, 5) zurück. Indem wir nämlich auf den Beweis des Fatouschen Satzes zurückgreifen, sehen wir, daß an jeder Stelle  $t = \theta$ , wo  $\mu(t)$  differenzierbar ist, die Relation

$$\Re\{f(e^{i\theta})\} = \mu'(\theta)$$

bestehen muß. Die Menge jener Stellen ist vom Maß  $2\pi$ ; die Funktion  $\mu'(\theta)$  ist also auf einem maßgleichen Kern des Definitionsintervalls definiert. Ferner wissen wir aus der reellen Funktionentheorie, daß  $\mu'(\theta)$  nach Lebesgue integrierbar ist. Also gilt dasselbe auch von  $\Re\{f(e^{i\theta})\}$ . Die Überlegungen, die wir im Beweise für  $\Re\{f(z)\}$  gemacht haben, können aber genau so gut für  $\Im\{f(z)\}$  ausgeführt werden. Somit sehen wir, daß  $\Im\{f(e^{i\theta})\}$  und daher auch  $f(e^{i\theta})$  summierbar ist.

5. Satz 4. *Es sei  $f(z)$  eine im Kreise  $|z| < 1$  reguläre, analytische, schlichte Funktion. Dann existiert*

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = f(e^{i\theta})$$

*und ist endlich für fast alle Peripheriepunkte, wenn man sich auf Wegen nähert, die den Kreis nicht berühren.*

Durch die Funktion  $w = f(z)$  wird der Kreis  $|z| < 1$  auf ein schlichtes einfach zusammenhängendes Gebiet  $G$  der  $w$ -Ebene abgebildet. Dieses Gebiet kann nicht die volle Ebene sein. Denn sonst würde die Umkehrfunktion  $z = \psi(w)$  nach dem Liouvilleschen Satz eine Konstante sein. Der Rand des Gebietes kann auch nicht aus einem einzigen Punkt bestehen. Denn sonst würde  $\psi(w)$  in diesem Punkte eine hebbare Unstetigkeit haben und nach den Sätzen von Riemann und Liouville wieder eine Konstante sein. Der Rand des Gebietes muß somit aus mindestens zwei Punkten bestehen. Wir bezeichnen zwei der Randpunkte mit  $w = a$  und  $w = b$ . Wir werden nun das Gebiet auf ein beschränktes Gebiet durch elementare Abbildungen transformieren. Dabei werden wir diejenigen Transformationen benutzen, die Carathéodory für denselben Zweck angegeben hat<sup>25)</sup>.

<sup>24)</sup> Die erste Integraldarstellung von analytischen Funktionen mit einem positiven reellen Teil ist von G. Herglotz gegeben worden in den Berichten über die Verhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-phys. Kl. 63 (1911), S. 508.

<sup>25)</sup> C. Carathéodory, Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, S. 29–30.

Es sei  $w = c$  ein beliebiger innerer Punkt des Gebietes  $G$ . Wir verbinden die drei Punkte  $w = a$ ,  $w = b$ ,  $w = c$  durch einen Kreisbogen, so daß der Punkt  $w = c$  im Inneren des Kreisbogens liegt. Es seien  $w = a'$ ,  $w = b'$  die ersten Randpunkte, die man trifft, indem man von  $w = c$  ausgehend längs des Kreisbogens nach  $w = a$  bzw.  $w = b$  hinwandert. Die Transformation

$$(5,1) \quad w_1 = \frac{c - b' w - a'}{c - a' w - b'}$$

führt dann die Punkte  $a'$ ,  $b'$ ,  $c$  in die Punkte  $0$ ,  $\infty$ ,  $1$  über. Das Gebiet  $G$  geht dabei in ein schlichtes einfach zusammenhängendes Gebiet  $G_1$  der  $w_1$ -Ebene über, das die Punkte  $w_1 = 0$  und  $w_1 = \infty$  auf seiner Begrenzung und die positive reelle Achse in seinem Inneren enthält.

Wir betrachten nun die Transformation

$$(5,2) \quad w_2 = \sqrt[4]{w_1}.$$

Diese Funktion ist mehrdeutig. Betrachtet man aber im Gebiete  $G_1$  denjenigen Zweig dieser Funktion, für welchen die Funktion auf der positiven reellen Achse positive reelle Werte annimmt, so wird sie in  $G_1$  eindeutig sein, denn die Verzweigungspunkte  $w_1 = 0$  und  $w_1 = \infty$  der Funktion in (5,2) liegen am Rande von  $G_1$ . Dann geht durch die Transformation (5,2)  $G_1$  in ein schlichtes Gebiet  $G_2$  der  $w_2$ -Ebene über, das auf einer Seite der imaginären Achse liegen wird.

Durch die Transformation

$$(5,3) \quad w_3 = \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}$$

geht dann das Gebiet  $G_2$  in ein beschränktes schlichtes Gebiet  $G_3$  der  $w_3$ -Ebene über.

Setzt man wie vorhin  $w = f(z)$  und  $w_3 = \varphi(z)$  und berücksichtigt man die Relationen (5,1), (5,2), (5,3), so ergibt sich

$$(5,4) \quad \varphi(z) = \frac{\sqrt[4]{\frac{c - b' f(z) - a'}{c - a' f(z) - b'} - 1}}{\sqrt[4]{\frac{c - b' f(z) - a'}{c - a' f(z) - b'} + 1}},$$

wobei nun  $\varphi(z)$  beschränkt ist. Es existiert also

$$(5,5) \quad \lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} \varphi(z) = \varphi(e^{i\vartheta})$$

für fast alle Werte von  $\vartheta$ , wenn man sich auf Wegen nähert, die den Kreis  $|z| = 1$  nicht berühren.

Durch Auflösung der Gleichung (5,4) nach  $f(z)$  bekommt man

$$f(z) = \frac{b'(c - a')(1 + \varphi(z))^4 - a'(c - b')(1 - \varphi(z))^4}{(c - a')(1 + \varphi(z))^4 - (c - b')(1 - \varphi(z))^4}.$$



Nach dem von uns schon einmal erwähnten Satz von M. und F. Riesz<sup>26)</sup> kann die Gleichung

$$(c - a')(1 + \varphi(e^{i\theta}))^4 - (c - b')(1 - \varphi(e^{i\theta}))^4 = 0$$

für höchstens eine Nullmenge von  $\theta$ -Werten erfüllt sein. Der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = f(e^{i\theta})$$

existiert also und ist endlich für fast alle Werte von  $\theta$ , wenn man sich auf Wegen nähert, die den Kreis nicht berühren.

## Kapitel II.

### Konforme Abbildung spezieller Gebietsklassen.

#### § 1.

Gebiete, die von einer rektifizierbaren Kurve begrenzt sind.

6. Bevor wir zu den eigentlichen Fragen der konformen Abbildungen übergehen, werden wir gewisse Sätze über die totale Variation analytischer Funktionen beweisen. Diese Sätze werden dann auf weitere Untersuchungen angewendet.

Es sei  $f(z)$  eine auf dem Kreise  $|z| = r > 0$  überall definierte komplexe Funktion. Wir zerlegen diesen Kreis durch  $n + 1$  voneinander verschiedene Punkte

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_n,$$

wobei

$$(6,1) \quad |z_0| = |z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = r$$

und

$$(6,2) \quad 0 = \arg z_0 < \arg z_1 < \arg z_2 < \dots < \arg z_n$$

ist. Wir betrachten nun die Summe

$$(6,3) \quad S_r = |f(z_1) - f(z_0)| + |f(z_2) - f(z_1)| + \dots + |f(z_n) - f(z_{n-1})|.$$

Diese Summe  $S_r$  hängt natürlich von den Punkten  $z_0, z_1, \dots, z_n$  ab. Wenn für alle Zerlegungen des Kreises, bei denen die Bedingungen (6,1) und (6,2) erfüllt sind,  $S_r$  unterhalb einer festen Zahl  $K$  liegt, so heißt  $f(z)$  von beschränkter Variation auf dem Kreise  $|z| = r$ . Ferner heißt die Zahl

$$(6,4) \quad V_r \{f(z)\} = \text{obere Grenze } S_r$$

die totale Variation von  $f(z)$  auf dem Kreise  $|z| = r$ .

Mit diesen Festsetzungen können wir nun den folgenden Satz aussprechen<sup>27)</sup>:

<sup>26)</sup> loc. cit. Anmerkung <sup>14)</sup>, S. 184.

<sup>27)</sup> Der Beweis des Satzes stammt von P. Caillag, Math. és phys. lapok 26 (1917), S. 74–80.

Satz 5. Es sei  $f(z)$  im Kreise  $|z| < 1$  regulär analytisch, im abgeschlossenen Kreise  $|z| \leq 1$  stetig und auf der Kreisperipherie  $|z| = 1$  von beschränkter Variation. Dann besteht die Relation

$$V_r \{f(z)\} < V_1 \{f(z)\}, \quad 0 < r < 1.$$

Wir zerlegen den Kreis  $|z| = r$  durch  $n + 1$  Punkte  $z = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ , die den Bedingungen (6, 1) und (6, 2) genügen. Wenn wir dann die Summe (6, 3) bilden, so gilt (6, 4) als Definition der totalen Variation  $V_r \{f(z)\}$ . Die Summe (6, 3) kann aber auch so geschrieben werden:

$S_r = e^{i\lambda_0}(f(z_1) - f(z_0)) + e^{i\lambda_1}(f(z_2) - f(z_1)) + \dots + e^{i\lambda_n}(f(z_0) - f(z_n))$ , wobei die Zahlen  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  sämtlich reell sind. Wir bilden nun die Funktion

$$\varphi(z) = e^{i\lambda_0} \left( f\left(\frac{z_1}{r} \cdot z\right) - f\left(\frac{z_0}{r} \cdot z\right) \right) + e^{i\lambda_1} \left( f\left(\frac{z_2}{r} \cdot z\right) - f\left(\frac{z_1}{r} \cdot z\right) \right) + \dots + e^{i\lambda_n} \left( f\left(\frac{z_0}{r} \cdot z\right) - f\left(\frac{z_n}{r} \cdot z\right) \right).$$

Berücksichtigt man die Bedingung (6, 1), so sieht man, daß  $\varphi(z)$  im Kreise  $|z| < 1$  regulär und in  $|z| \leq 1$  stetig ist. Berechnet man den Wert, den  $\varphi(z)$  im Punkte  $z = r$  annimmt, so bekommt man

$$\varphi(r) = S_r.$$

Nun aber nimmt  $\varphi(z)$  ihren größten Wert in einem Punkte  $\zeta$  der Peripherie  $|z| = 1$  an. Es ist also

$$|\varphi(\zeta)| \geq S_r.$$

Nach der Definition von  $\varphi(z)$  ist also

$$|\varphi(\zeta)| = \left| e^{i\lambda_0} \left( f\left(\frac{z_1}{r} \zeta\right) - f\left(\frac{z_0}{r} \zeta\right) \right) + e^{i\lambda_1} \left( f\left(\frac{z_2}{r} \zeta\right) - f\left(\frac{z_1}{r} \zeta\right) \right) + \dots + e^{i\lambda_n} \left( f\left(\frac{z_0}{r} \zeta\right) - f\left(\frac{z_n}{r} \zeta\right) \right) \right| \geq S_r.$$

Daher ist auch

$$(6, 5) \quad |f(Z_1) - f(Z_0)| + |f(Z_2) - f(Z_1)| + \dots + |f(Z_0) - f(Z_n)| \geq S_r, \text{ indem man}$$

$$Z_k = \frac{z_k}{r} \zeta, \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

setzt. Die Summe, die in der letzten Ungleichung auftritt und die wir mit  $S_1$  bezeichnen werden, ist der Summe  $S_r$  analog, denn sie entspricht einer Zerlegung des Kreises, bei der die Bedingungen (6, 1) und (6, 2) erfüllt sind. Es ist also nach Definition der totalen Variation und nach (6, 5)  $V_1 \{f(z)\} \geq S_1 \geq S_r$ . Da dies für alle möglichen  $S_r$  gilt, ist auch

$$V_1 \{f(z)\} \geq V_r \{f(z)\}.$$

Um den Satz völlig zu beweisen, braucht man also nur noch zu zeigen, daß das Gleichheitszeichen in der letzten Ungleichheit nie stattfinden kann. Die Größe  $V_r\{f(z)\}$  kann nämlich durch das Integral

$$(6,6) \quad V_r\{f(z)\} = \int_0^{2\pi} |z f'(z)| d\vartheta, \quad z = r e^{i\vartheta},$$

ausgedrückt werden. Nach einem bekannten Satz von Hardy<sup>28)</sup> ist nun das Integral

$$J(r) = \int_0^{2\pi} |f'(r e^{i\vartheta})| d\vartheta, \quad 0 < r < 1,$$

eine monoton wachsende Funktion von  $r$ . Das heißt, für je zwei Werte  $r_1$  und  $r_2$ , welche der Relation  $0 < r_1 < r_2 < 1$  genügen, gilt die Beziehung

$$J(r_1) \leq J(r_2).$$

Nach (6,6) ist somit tatsächlich

$$(6,7) \quad V_{r_1}\{f(z)\} < V_{r_2}\{f(z)\}.$$

Sollte nun für ein  $R < 1$

$$V_R\{f(z)\} = V_1\{f(z)\}$$

sein, so müßte für jedes  $R'$ ,  $0 < R < R' < 1$ ,

$$V_R\{f(z)\} = V_{R'}\{f(z)\}$$

sein, was der Relation (6,7) widerspricht.

7. Wir kehren nun diesen Satz um und beweisen den

Satz 6. Es sei  $f(z)$  im Kreise  $|z| < 1$  regulär analytisch. Wenn

$$(7,1) \quad V_r\{f(z)\} < l$$

ist für alle  $r < 1$ , so ist  $f(z)$  im abgeschlossenen Kreise  $|z| \leq 1$  stetig und auf der Kreisperipherie  $|z| = 1$  von beschränkter Variation.

Aus der Gleichung (6,6) sieht man, daß die Bedingung

$$(7,2) \quad \int_0^{2\pi} |z f'(z)| d\vartheta < l$$

gleichbedeutend ist mit der in (7,1) ausgesprochenen. Auf Grund des Satzes 3 folgt aber dann, daß es einen Radius  $\arg z = \vartheta_0$  gibt, auf welchem

$$\lim_{r \rightarrow 1} r e^{i\vartheta_0} f'(r e^{i\vartheta_0}) = e^{i\vartheta_0} f'(e^{i\vartheta_0})$$

existiert und endlich ist. Somit ist also  $f'(r e^{i\vartheta_0})$  im Intervalle  $0 \leq r \leq 1$  beschränkt und stetig. Daraus sieht man sofort, daß  $f(r e^{i\vartheta_0})$  beschränkt

<sup>28)</sup> G. H. Hardy, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 14 (1915), S. 269—277.

und stetig ist:  $|f(re^{i\theta_0})| < M$  und daß der Grenzwert

$$(7,3) \quad \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta_0}) = f(e^{i\theta_0})$$

auch existiert und endlich ist.

Wir zeigen zunächst, daß, wenn die Relation (7,2) gilt,  $f(z)$  im Kreise  $|z| < 1$  beschränkt sein muß. Man bemerke, daß

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} i r e^{i\theta} f'(re^{i\theta}) d\theta = \int_{re^{i\theta_1}}^{re^{i\theta_2}} f'(z) dz = f(re^{i\theta_2}) - f(re^{i\theta_1})$$

ist. Nach (7,2) ist also

$$(7,4) \quad |f(re^{i\theta_2}) - f(re^{i\theta_1})| < l,$$

wenn  $\theta_1$  und  $\theta_2$  zwei beliebige Werte im Intervalle  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  sind. Es gilt daher die Beziehung

$$|f(z)| \leq |f(re^{i\theta_0})| + |f(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta_0})| < M + l.$$

Also ist  $f(z)$  im Kreise  $|z| < 1$  beschränkt

Ich definiere nun die Funktionen

$$\mu(r, \theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \Re \{i r e^{it} f'(re^{it})\} dt,$$

$$\nu(r, \theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \Im \{i r e^{it} f'(re^{it})\} dt.$$

Aus dieser Definition folgt, daß

$$(7,5) \quad \begin{aligned} &\mu(r, \theta) + i\nu(r, \theta) \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} i r e^{it} f'(re^{it}) dt = \int_{re^{i\theta_0}}^{re^{i\theta}} f'(z) dz = f(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta_0}) \end{aligned}$$

ist, wobei  $z = re^{it}$  gesetzt wird. Indem wir nun die Überlegung auf den S. 189 und 190 beim Beweise des Satzes 3 wiederholen, sehen wir, daß es eine Folge von positiven Zahlen  $r_1, r_2, \dots$  kleiner als 1 gibt, welche gegen Eins konvergieren und für welche

$$(7,6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(r_n, \theta) = \mu(\theta), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(r_n, \theta) = \nu(\theta)$$

außer höchstens für abzählbar unendlich viele Werte von  $\theta$  im Intervalle  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  vorhanden und endlich sind und daß ferner  $\mu(\theta)$  und  $\nu(\theta)$  von beschränkter Variation sind. Nach (7,3), (7,5), (7,6) ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) + \mu(\theta) + i\nu(\theta).$$

Diesen Grenzwert bezeichnen wir mit  $f(e^{i\theta})$  und bemerken, daß er von beschränkter Variation sein muß. Folglich sind die einzigen Unstetigkeiten, die  $f(e^{i\theta})$  haben könnte, sprunghafte Unstetigkeiten. Dies ist aber nach

einem Satz von Pringsheim<sup>29</sup>) unmöglich. Somit ist also  $f(e^{i\theta})$  im ganzen Intervall  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  stetig. Wir betrachten noch die Darstellung

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} dt.$$

Diese Funktion ist nach den klassischen Untersuchungen von Schwarz über das Poissonsche Integral im abgeschlossenen Kreise  $|z| \leq 1$  stetig und am Rande desselben von beschränkter Variation. Somit ist der Satz 6 bewiesen.

8. Zum Satze 6 wird noch ein ergänzender Zusatz hinzugefügt.

*Zusatz. Wenn  $f(z)$  im Kreise  $|z| < 1$  regulär analytisch ist und wenn für alle  $r < 1$*

$$V_r\{f(z)\} < l$$

*ist, so besitzt  $f(z)$  nach Satz 6 eine Randfunktion  $f(e^{i\theta})$  von beschränkter Variation. Bezeichnet man die totale Variation mit  $V_1\{f(z)\}$ , so besteht die Beziehung*

$$(8,1) \quad \lim_{r \rightarrow 1} V_r\{f(z)\} = V_1\{f(z)\}.$$

Wir betrachten beliebige  $n$  Punkte  $z_1, z_2, \dots, z_n$  auf  $|z| = 1$ , die der Bedingung

$$\arg z_1 < \arg z_2 < \dots < \arg z_n$$

unterworfen sind, und die Punkte  $rz_1, rz_2, \dots, rz_n$  auf  $|z| = r$ . Wir bilden die zwei Summen

$$S_1 = \sum_{k=1}^n |f(z_{k+1}) - f(z_k)|,$$

wobei  $z_{n+1} = z_1$  gesetzt wird, und

$$S_r = \sum_{k=1}^n |f(rz_{k+1}) - f(rz_k)|.$$

Nach dem Satze 6 wissen wir, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$$

für alle  $\theta$  existiert und endlich ist. Daraus sieht man sofort, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} S_r = S_1$$

ist. Wir wissen aber auch, daß

$$(8,2) \quad V_r\{f(z)\} \geq S_r$$

ist. Ferner lehrt der Satz 5, daß  $V_r\{f(z)\}$  mit  $r$  monoton wachsend ist und daß die Ungleichung

$$V_r\{f(z)\} < V_1\{f(z)\}, \quad r < 1,$$

<sup>29</sup>) A. Pringsheim, Münch. Sitzungsber. 30 (1900), S. 87.

immer stattfindet. Es existiert also der endliche Grenzwert

$$(8,3) \quad \lim_{r \rightarrow 1} V_r \{f(z)\} \leq V_1 \{f(z)\}.$$

Wir können also den Grenzübergang  $r \rightarrow 1$  in (8,2) vornehmen. Wir bekommen

$$\lim_{r \rightarrow 1} V_r \{f(z)\} \geq S_1.$$

Da dies für alle möglichen  $S_1$  gilt, so ist auch

$$\lim_{r \rightarrow 1} V_r \{f(z)\} \geq V_1 \{f(z)\}.$$

Ein Vergleich dieser Ungleichung mit (8,3) liefert

$$\lim_{r \rightarrow 1} V_r \{f(z)\} = V_1 \{f(z)\},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

9. Bisher sind alle Sätze ohne Heranziehung des Begriffes der Schlichtheit bewiesen worden. Indem wir nun von der Funktion  $f(z)$  voraussetzen, daß sie noch schlicht ist, können wir unsere Sätze auf die Theorie der konformen Abbildung anwenden. Wir führen jetzt die folgende Definition ein<sup>30)</sup>:

*Definition. Ein schlichtes, einfach zusammenhängendes Gebiet  $G$  heiße von beschränktem Umfang, wenn ihm eine feste positive Zahl  $l$  zugeordnet werden kann, derart daß man zu jedem positiven noch so kleinen  $\varepsilon$  einen geschlossenen Streckenzug<sup>31)</sup>  $\mathfrak{R}_\varepsilon$  mit den folgenden Eigenschaften legen kann:*

1. *Die Länge von  $\mathfrak{R}_\varepsilon$  ist nicht größer als  $l$ ,*
2. *Jeder Randpunkt von  $G$  hat eine Entfernung kleiner als  $\varepsilon$  vom Streckenzug  $\mathfrak{R}_\varepsilon$ ,*
3. *Jeder Punkt von  $\mathfrak{R}_\varepsilon$  hat eine Entfernung kleiner als  $\varepsilon$  vom Rande von  $G$ .*

Wir sehen sofort, daß, wenn man eine Zahl  $l$  einem Gebiete  $G$  im Sinne der Definition zuordnet, so kann auch jede Zahl  $L \geq l$  demselben Gebiete zugeordnet werden. Um zu einer das Gebiet charakterisierenden Zahl zu gelangen, wählen wir die untere Grenze  $l$  aller Zahlen  $L$ , die einem gegebenen Gebiet zugeordnet werden können. Dann werden wir das Gebiet ein Gebiet von beschränktem Umfang von der Länge  $l$  nennen.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß die angegebene Definition die Fälle nicht ausschließt, bei denen der Streckenzug  $\mathfrak{R}_\varepsilon$  mehrfach zu zählende Punkte<sup>32)</sup> besitzt oder mehrere Seiten hat, die einander schneiden. Wir

<sup>30)</sup> Diese Definition ist mir von Herrn Bochner freundlichst vorgeschlagen worden.

<sup>31)</sup> Ein Streckenzug ist eine aus endlich vielen geradlinigen Strecken zusammengesetzte Kurve.

<sup>32)</sup> Sogar mehrfach zu zählende Seiten sind in der Definition zugelassen.

sehen aber zugleich, daß der Streckenzug  $\mathfrak{R}$ , durch die obige Definition nicht eindeutig bestimmt ist. Wenn nämlich ein Streckenzug  $\mathfrak{R}$ , der Zahl  $\varepsilon$  zugeordnet ist, so erfüllen gewisse von  $\mathfrak{R}$ , genügend wenig abweichende Streckenzüge die Bedingungen 1, 2, 3 und können somit  $\mathfrak{R}$ , ersetzen.

10. Wir fassen nun einen vorerst ganz beliebigen Streckenzug  $\mathfrak{R}$ , ins Auge. Er zerlegt die Ebene in eine gewisse Anzahl von Gebieten, die von lauter geradlinigen Strecken berandet sind. Diese Gebiete werde ich schlecht-hin *polygonale Gebiete* nennen und sie durch  $P$ , bezeichnen. Jeder Punkt der Ebene liegt also entweder im Inneren oder auf dem Rande eines polygonalen Gebietes. Ich wähle nun einen ganz beliebigen inneren Punkt  $w_0$ , des Gebietes  $G$  und behaupte, daß, falls  $\varepsilon$  genügend klein gewählt worden ist, das eine von den polygonalen Gebieten  $P$ , die durch  $\mathfrak{R}$ , bestimmt werden, den Punkt  $w_0$  im Inneren enthalten wird. In der Tat wurde ja  $w_0$  als innerer Punkt des Gebietes  $G$  gewählt. Man kann also um  $w_0$  als Mittelpunkt einen Kreis vom Radius  $a$  legen, dessen Punkte innere Punkte des Gebietes  $G$  sind. Der Punkt  $w_0$  kann also nach der Eigenschaft 3 nicht auf einem Streckenzug  $\mathfrak{R}$ , liegen, für welchen  $\varepsilon < a$  ist.

Ich wähle nun eine monotone Folge  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$  positiver Zahlen kleiner als  $a$ , die gegen Null konvergieren. Zu jeder solcher Zahl  $\varepsilon_n$  konstruiere ich einen entsprechenden Streckenzug  $\mathfrak{R}_n$ . Von den durch den Streckenzug bestimmten polygonalen Gebieten wähle ich dasjenige  $Q_n$ , das  $w_0$  in seinem Inneren enthält. Somit bekommt man eine Folge von polygonalen Gebieten  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ . Wenn ich nun einen beliebigen von  $w_0$  verschiedenen inneren Punkt  $w_1$  von  $G$  betrachte, so müssen sämtliche Gebiete  $Q_n$  von einem bestimmten  $n$  ab den Punkt  $w_1$  im Inneren enthalten. Im entgegengesetzten Falle verbinde man nämlich die Punkte  $w_0$  und  $w_1$  durch einen beliebigen im Inneren von  $G$  verlaufenden Streckenzug  $\mathfrak{C}$ . Sämtliche Punkte von  $\mathfrak{C}$  müssen dann einen größeren Abstand vom Rande von  $G$  haben als eine gewisse positive Zahl  $b$ . Ferner, wenn  $w_0$  und  $w_1$  verschiedenen polygonalen Gebieten  $Q_n$  und  $Q'_n$  angehören, so muß der Streckenzug  $\mathfrak{R}_n$  den Streckenzug  $\mathfrak{C}$  in mindestens einem Punkte schneiden. Dies hat zur Folge, daß mindestens ein Punkt von  $\mathfrak{R}_n$  eine größere Entfernung als  $b$  vom Rande von  $G$  hat. Für jedes  $\varepsilon_n < b$  verstößt aber das letzte Resultat gegen die Bedingung 3. Für jedes  $\varepsilon_n < b$  liegen also sowohl  $w_0$  wie  $w_1$  in demselben polygonalen Gebiet  $Q_n$ .

Auf ähnliche Weise zeigt man, daß jeder äußere Punkt  $w_2$  von  $G$  auch äußerer Punkt von allen  $Q_n$  von einem bestimmten  $n$  ab ist. Somit sehen wir, daß die Gebietsfolge  $Q_n$  gegen das Gebiet  $G$  als Kern konvergiert.

11. Nun können aber die Ränder der Gebiete  $Q_n$  auch mehrfache Punkte enthalten. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, betrachten wir



die zugehörigen Streckenzüge  $R_n$  und kehren zu der am Anfang des Beweises gemachten Bemerkung zurück, daß man diese Streckenzüge durch andere ersetzen kann, die von den ursprünglichen genügend wenig abweichen. Auf Grund dieser Bemerkung wählen wir so eine neue Folge von Streckenzügen  $R'_n$ , daß die aus ihnen entstehenden Gebiete  $Q'_n$  keine mehrfachen Punkte auf den Rändern haben. Die neue Gebietsfolge  $Q'_n$  konvergiert aber dann ebenfalls gegen das Gebiet  $G$  als Kern und die Länge des Randes eines jeden  $Q'_n$  ist nicht größer als  $l + \eta$ , wobei  $\eta$  eine beliebig kleine, positive Konstante ist. Somit haben wir den

**Hilfssatz.** *Ein Gebiet von beschränktem Umfang von der Länge  $l$  kann als Kern einer Folge von Gebieten angesehen werden, die von rektifizierbaren Jordanschen Kurven berandet sind. Jede dieser Kurven hat eine Länge nicht größer als  $l + \eta$ , wobei  $\eta$  eine beliebig kleine, positive Konstante ist.*

12. Mit Hilfe dieses Satzes kann nun folgendes leicht bewiesen werden:

**Satz 7.** *Es sei  $G$  ein Gebiet von beschränktem Umfang von der Länge  $l$ . Dann haben sämtliche Niveaukurven<sup>33)</sup> eine Länge kleiner als  $l$ .*

Auf Grund des Hilfssatzes approximieren wir das Gebiet  $G$  durch eine Folge von Gebieten  $G_n$ , die von rektifizierbaren Jordanschen Kurven berandet sind, so daß die Länge der Ränder nie größer als  $l + \eta$  ist. Wenn  $f(z)$  eine im Kreise  $|z| < 1$  reguläre Funktion ist, welche den Kreis auf  $G$  konform abbildet und  $f_n(z)$  ebenfalls eine im Kreise  $|z| < 1$  reguläre Funktion ist, welche diesen Kreis konform auf  $G_n$  abbildet, so muß die Funktionsfolge  $f_n(z)$  nach einem Satz von Carathéodory<sup>34)</sup> in jedem inneren Teilgebiet von  $|z| < 1$  gleichmäßig gegen  $f(z)$  konvergieren.

Da jedes  $G_n$  von einer Jordanschen Kurve begrenzt ist, muß  $f_n(z)$  nach dem Satze II der Einleitung im abgeschlossenen Gebiete  $|z| \leq 1$  stetig sein. Da ferner der Rand eines jeden  $G_n$  rektifizierbar ist, so muß  $f_n(z)$  auf der Kreisperipherie  $|z| = 1$  von beschränkter Variation sein und ihre totale Variation muß gleich der Länge des Randes von  $G_n$  sein. Somit ist nach unserer früheren Bezeichnungsweise

$$V_1\{f_n(z)\} \leq l + \eta.$$

Indem wir nun zum Satze 5 zurückkehren, sehen wir, daß

$$V_r\{f_n(z)\} < V_1\{f_n(z)\}, \quad 0 < r < 1,$$

<sup>33)</sup> Der Ausdruck „Niveaukurve des Gebietes“ ist hier sowie im folgenden so zu verstehen: Man bilde das Gebiet konform auf einen Kreis  $|z| < 1$  ab. Die Bildkurven der konzentrischen Kreise  $|z| = r < 1$  bei dieser Abbildung heißen die Niveaukurven des Gebietes.

<sup>34)</sup> C. Carathéodory, loc. cit. <sup>2)</sup>, S. 126.

ist. Nun aber ist

$$V_r\{f_n(z)\} = \int_0^{2\pi} |zf'_n(z)| d\vartheta, \quad z = re^{i\vartheta}.$$

Diese Größen sind aber die Länge der dem Kreise  $|z|=r$  bei der Abbildung entsprechenden Niveaukurve. Indem wir die letzten drei Ungleichheiten vergleichen, bekommen wir

$$\int_0^{2\pi} |zf'_n(z)| d\vartheta < l + \eta, \quad 0 < r < 1, \quad z = re^{i\vartheta}.$$

Da aber die  $f_n(z)$  in jedem inneren Teilgebiet von  $|z| < 1$  gleichmäßig gegen  $f(z)$  konvergieren, gilt dasselbe auch von den ersten Ableitungen und wir können den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  unter dem Integralzeichen ausführen:

$$\int_0^{2\pi} |zf'(z)| d\vartheta \leq l + \eta.$$

Da aber  $\eta$  beliebig klein ist, gilt die Beziehung

$$\int_0^{2\pi} |zf'(z)| d\vartheta \leq l.$$

Daß das Gleichheitszeichen nicht bestehen kann, zeigt man ebenso wie am Schluß des Beweises des Satzes 5. Wir haben also

$$(12,1) \quad \int_0^{2\pi} |zf'(z)| d\vartheta < l,$$

womit der Satz 7 bewiesen ist.

13. Aus der Relation (12,1) folgt nun der

**Satz 8.** Wenn  $G$  dasselbe Gebiet wie im Satze 7 ist, so ist jede im Kreise  $|z| < 1$  reguläre Funktion  $f(z)$ , welche den Kreis auf  $G$  konform abbildet, in  $|z| \leq 1$  stetig und auf  $|z|=1$  von beschränkter Variation.

Berücksichtigt man die Relation

$$(13,1) \quad V_r\{f(z)\} = \int_0^{2\pi} |zf'(z)| d\vartheta, \quad z = re^{i\vartheta}, \quad 0 < r < 1,$$

so folgt der Satz 8 unmittelbar aus dem Satz 6.

14. Man sieht hieraus sofort, daß die Kreisperipherie  $|z|=1$  auf eine stetige, rektifizierbare Kurve<sup>33)</sup> abgebildet wird. Wir setzen die totale Variation  $V_1\{f(z)\}$  der Randfunktion von  $f(z)$  gleich  $\lambda$  und werden be-

<sup>33)</sup> Diese Kurve kann auch mehrfach zu zählende Punkte enthalten.

weisen, daß  $\lambda = l$  ist. Es sei zunächst  $\lambda < l$ . Dann ist nach (13, 1) und Satz 5

$$\int_0^{2\pi} |z f'(z)| d\vartheta < \lambda < l$$

für alle  $r < 1$ . Dies besagt aber, daß sämtliche Niveaukurven eine Länge kleiner als  $\lambda$  haben. Indem man diese Niveaukurven durch geeignete eingeschriebene Polygone approximiert, bekommt man die in der Definition der Gebiete von beschränktem Umfang verlangten Streckenzüge  $\mathfrak{R}_n$ , deren Länge aber immer unterhalb  $\lambda$  ist. Dies ist aber ein Widerspruch. Denn  $l$  war die untere Grenze aller Zahlen, die dem Gebiete zugeordnet werden konnten. Wir setzen nun  $\lambda > l$  und leiten ebenfalls einen Widerspruch daraus. Nach dem Zusatz zum Satz 6 besteht nämlich die Relation

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |r e^{i\vartheta} f'(r e^{i\vartheta})| d\vartheta = V_1\{f(z)\} = \lambda > l.$$

Es kann somit ein  $R < 1$  gefunden werden, so daß

$$\int_0^{2\pi} |R e^{i\vartheta} f'(R e^{i\vartheta})| d\vartheta > l$$

ist. Dies widerspricht aber der Relation (12, 1). Es muß also

$$\lambda = l$$

sein. Die Länge der rektifizierbaren Kurve, die bei der Abbildung der Kreisperipherie  $|z| = 1$  entspricht, ist also gleich  $l$ . Wir haben also den

**Zusatz 1.** *Ein Gebiet von beschränktem Umfang von der Länge  $l$  ist ein Gebiet, das von einer einzigen stetigen, rektifizierbaren Kurve von der Länge  $l$  umgrenzt ist.*

15. Diese Behauptung kann aber auch umgekehrt werden:

**Zusatz 2.** *Jedes von einer einzigen stetigen, rektifizierbaren Kurve von der Länge  $l$  umgrenzte Gebiet ist ein Gebiet von beschränktem Umfang von der Länge  $l$ .*

Daß das Gebiet ein Gebiet von beschränktem Umfang ist, leuchtet sofort ein, indem man die rektifizierbare Randkurve durch eingeschriebene Polygone approximiert. Diese Polygone sind aber auch die verlangten Streckenzüge der Definition für Gebiete von beschränktem Umfang. Das Gebiet von beschränktem Umfang muß also eine charakterisierende Konstante haben. Daß diese Konstante  $l$  ist, folgt aus dem Zusatz 1.

16. Die Umkehrung des Satzes 7 lautet:

**Satz 9.** *Es sei  $G$  ein schlichtes, einfach zusammenhängendes Gebiet. Wenn alle Niveaukurven des Gebietes eine Länge kleiner als  $l$  haben, so ist das Gebiet von beschränktem Umfang.*

Nach Satz 6 ist das Gebiet von einer stetigen, rektifizierbaren Kurve begrenzt. Nach Zusatz 2 ist das Gebiet also von beschränktem Umfang.

17. Zum Schluß fassen wir die vom Standpunkte der konformen Abbildung wichtigsten Ergebnisse des Paragraphen im folgenden Satze zusammen:

**Hauptsatz.** *Es sei  $f(z)$  eine schlichte, reguläre Funktion im Kreise  $|z| < 1$ . Die Bedingung*

$$(17,1) \quad \int_0^{2\pi} |zf'(z)| d\vartheta < l, \quad z = re^{i\vartheta},$$

*für alle  $r < 1$  ist notwendig und hinreichend dafür, daß  $f(z)$  den Kreis  $|z| < 1$  konform auf ein von einer stetigen, rektifizierbaren Kurve begrenztes Gebiet abbilde. Wenn die Länge der Kurve gleich  $l$  ist, so sind die Längen  $l_r$  sämtlicher Niveaukurven kleiner als  $l$ . Dann ist ferner  $f(z)$  im abgeschlossenen Kreis  $|z| \leq 1$  stetig und auf der Kreisperipherie  $|z| = 1$  von beschränkter Variation und es gilt die Relation*

$$V_1\{f(z)\} = l,$$

sowie

$$\lim_{r \rightarrow 1} l_r = l.$$

*Der Grenzwert*

$$(17,2) \quad \lim_{r \rightarrow 1} f'(re^{i\vartheta}) = f'(e^{i\vartheta})$$

*ist außer höchstens auf einer Punktmenge der Kreisperipherie vom Maß Null vorhanden und endlich, wenn  $z$  sich an einen Peripheriepunkt längs Wegen nähert, die den Einheitskreis nicht berühren. Die so bestimmten Randwerte  $f'(e^{i\vartheta})$  bilden eine im Intervalle  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  summierbare Funktion.*

Es bleibt nur noch übrig, die Behauptung (17,2) zu beweisen. Sie folgt aber unmittelbar aus dem Satz 3, angewendet auf die Ungleichung (17,1).

## § 2.

### Sterne.

18. Ein Gebiet heißt bekanntlich ein *Stern* in bezug auf den Nullpunkt, wenn es den Punkt Null im Inneren enthält und wenn die Strecke, die den Nullpunkt mit einem beliebigen inneren Punkt verbindet, aus lauter inneren Punkten des Gebietes besteht.

Es wird der folgende Satz bewiesen:

**Satz 9.** *Wenn  $G$  ein Stern in bezug auf den Nullpunkt ist, so sind sämtliche Niveaukurven auch Sterne in bezug auf den Nullpunkt<sup>20)</sup>.*

<sup>20)</sup> Daß wir hier den Nullpunkt bevorzugt haben, ist eine ganz unwesentliche Vereinfachung.

Der folgende recht einfache Beweis stammt von Herrn Radó<sup>37)</sup>.

Es sei  $w = f(z)$  eine im Kreise  $|z| < 1$  reguläre Funktion, die den Kreis auf  $G$  konform abbildet und die so normiert ist, daß  $f(0) = 0$  ist. Der Kreis  $|z| < r < 1$  geht in ein Teilgebiet  $G_r$  des Gebietes  $G$  über. Es soll also bewiesen werden, daß  $G_r$  ein Stern ist. Zu dem Zweck wähle man einen inneren Punkt  $w_1$  des Gebietes  $G_r$ , der vom Nullpunkt verschieden ist. Auf der Verbindungsstrecke des Punktes 0 und  $w_1$  wähle man einen beliebigen Punkt  $w$ . Es soll gezeigt werden, daß  $w$  im Inneren von  $G_r$  liegen muß. Wir können schreiben:

$$(18,1) \quad w = t w_1,$$

wobei  $t$  eine feste reelle Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet. Den Punkten 0 bzw.  $w_1$  in der  $w$ -Ebene entsprechen die Punkte 0 bzw.  $z_1$  in der  $z$ -Ebene. Dann ist sicher  $|z_1| > 0$ , denn sonst würden dem Punkte  $z = 0$  bei der Abbildung zwei voneinander verschiedene Punkte in der  $w$ -Ebene entsprechen. Die Funktion

$$(18,2) \quad \varphi(z) = t f(z)$$

ist eine im Kreise reguläre Funktion. Da der ursprüngliche Bereich  $G$  ein Stern ist, liegen alle Werte, die  $\varphi(z)$  im Kreise  $|z| < 1$  annimmt, innerhalb von  $G$ . Wir betrachten nun die zu  $f(z)$  inverse Funktion  $\psi(w)$  und bemerken, daß in  $G$   $|\psi(w)| < 1$  und  $\psi(0) = 0$  ist. Die Funktion  $\psi(\varphi(z))$  ist im Kreise  $|z| < 1$  definiert und regulär. Es ist ferner

$$|\psi(\varphi(z))| < 1$$

und wegen (18,2)

$$\psi(\varphi(0)) = 0.$$

Daher gilt nach dem Schwarzschen Lemma für alle  $|z| < r$  die Ungleichheit

$$|\psi(\varphi(z))| < r.$$

Es folgt daraus, daß im Kreise  $|z| < r$  die Funktion  $\varphi(z)$  nur solche Werte annimmt, die im Gebiete  $G_r$  liegen. Setzt man in (18,2)  $z = z_1$ , so bekommt man die Relation (18,1). Da aber  $|z_1| < r$  ist, so muß nach dem Vorhergesagten  $w$  im Inneren von  $G_r$  liegen. Hiermit ist der Beweis fertig.

19. Indem wir  $f(z)$  so normieren, daß  $f(0) = 0$  ist, werden wir eine Bedingung aufsuchen, die  $f(z)$  erfüllt, wenn es den Kreis  $|z| < 1$  auf einen Stern in bezug auf den Nullpunkt konform abbildet. Es wird sich herausstellen, daß diese Bedingung sowohl notwendig wie hinreichend ist.

<sup>37)</sup> T. Radó, Math. Annalen 102 (1930), S. 428—429. Der Beweis wird dort für konvexe Gebiete ausgeführt, ist aber dem hier angegebenen ganz analog.

Es sei  $|z| = r < 1$  ein zum Kreise  $|z| = 1$  konzentrischer Kreis. Er geht bei der Abbildung in eine geschlossene, doppelpunktfreie, analytische Kurve  $C_r$  über, die ein Gebiet  $G_r$  umgrenzt. Nach dem eben bewiesenen Satz ist  $G_r$  ein Stern. Aus dieser Tatsache wollen wir zuerst schließen, daß jede von  $w = 0$  ausgehende geradlinige Strecke die Kurve  $C_r$  in einem und nur einem Punkte trifft. Daß  $C_r$  in mindestens einem Punkte  $P$  getroffen wird, ist ja klar. Jetzt nehme ich an, daß sie auch in einem zweiten Punkte  $P'$  getroffen wird. Dann behaupte ich, gehört die ganze Strecke  $\overline{PP'}$  zum Rande des Gebietes  $G_r$ . Zunächst ist es klar, daß kein Punkt der Strecke ein innerer Punkt von  $G_r$  sein kann. Dies folgt sofort daraus, daß  $G_r$  ein Stern ist. Von den zwei Punkten  $P$  und  $P'$  sei  $P$  der vom Nullpunkt entferntere. Ich betrachte eine Folge  $w_1, w_2, \dots$  von inneren Punkten von  $G_r$ , welche gegen  $P$  konvergieren, und betrachte die Strecken  $\overline{0w_1}, \overline{0w_2}, \dots$ . Da  $G_r$  ein Stern ist, liegen alle Punkte dieser Strecken im Inneren von  $G_r$ . Man kann Punkte auf diesen Strecken immer finden, die gegen einen beliebigen Punkt von  $\overline{PP'}$  konvergieren. Also kann kein Punkt von  $\overline{PP'}$  ein äußerer Punkt von  $G_r$  sein. Somit gehört  $\overline{PP'}$  zum Rande von  $G_r$ , also auch zur Kurve  $C_r$ . Da aber eine geschlossene, doppelpunktfreie, analytische Kurve keine geradlinige Strecke enthalten kann, so zeigt sich, daß die Annahme, daß  $P'$  ein zweiter Schnittpunkt der Strecke  $\overline{0P}$  mit  $C_r$  ist, falsch ist. Also ist unsere Behauptung bewiesen.

Wenn sich  $z$  auf der Kreisperipherie zu bewegt, daß das Innere des Kreises links von der Durchlaufungsrichtung liegt, so wird sich der Bildpunkt  $w$  so auf  $C_r$  bewegen, daß  $G_r$  stets links von der Durchlaufungsrichtung von  $w$  liegen wird. Es soll nun gezeigt werden, daß dann  $\arg w$  monoton wächst. Wenn  $\arg w$  monoton abnehmen würde, so müßte  $G_r$  rechts von der Durchlaufungsrichtung von  $w$  liegen, was nicht der Fall ist. Würde nun  $\arg w$  nicht monoton zunehmen, so müßten zwei Punkte  $w_1$  und  $w_2$  auf  $C_r$  existieren, welche zwei Punkten  $z_1$  und  $z_2$  auf der Kreisperipherie entsprechen und für welche  $\arg w_1 = \arg w_2$  gilt. Da aber die geradlinige Strecke, welche von  $w = 0$  ausgeht und dieses Argument hat,  $C_r$  in nur einem Punkte trifft, so müßte  $w_1 = w_2$  sein, was offenbar unmöglich ist. Somit ist also gezeigt, daß

$$\arg f(re^{i\vartheta}) = \Im \log f(re^{i\vartheta})$$

eine monoton wachsende Funktion von  $\vartheta$  ist. Also ist

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \arg f(re^{i\vartheta}) = \Re \left( z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq 0$$

für  $z = re^{i\vartheta}$ . Da dies für ein beliebiges  $r < 1$  gezeigt worden ist, so gilt

die Relation für jedes  $r < 1$ . Wir bemerken, daß, da

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}$$

im Kreise  $|z| < 1$  regulär analytisch ist, das Gleichheitszeichen nicht vorkommen kann. Wir haben also als notwendige Bedingung für eine Sternabbildung gefunden, daß

$$(19, 1) \quad \Re \left( z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) > 0$$

in  $|z| < 1$  sei.

20. Umgekehrt wenn  $f(z)$  eine derartige reguläre, analytische Funktion in  $|z| < 1$  ist, daß  $z \frac{f'(z)}{f(z)}$  in  $|z| < 1$  regulär ist und dort einen positiven Realteil hat, und wenn ferner  $f'(0) \neq 0$  ist, so sieht man leicht, daß die Gebiete, welche den Kreisen  $|z| < r < 1$  entsprechen, lauter Sterne sind, und somit ist auch das Gebiet, das dem Kreise  $|z| < 1$  entspricht, ein Stern. Wir können also den Satz aussprechen:

Satz 10. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine im Kreise  $|z| < 1$  reguläre, analytische Funktion  $f(z)$  den Kreis konform auf einen Stern abbilde, ist, daß die Funktion

$$z \frac{f'(z)}{f(z)}$$

in diesem Kreis regulär sei und dort einen positiven Realteil besitze und daß  $f'(0)$  von Null verschieden sei.

21. Der Satz 10 gibt uns nun eine Methode zur Behandlung der Fragen der Ränderzuordnung bei sternigen Abbildungen. Der Satz 2 und der Satz 4 im Anschluß an den Satz 10 ermöglichen uns nämlich den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 11. Es sei  $f(z)$  eine im Kreise  $|z| < 1$  reguläre, schlichte, analytische Funktion. Wenn  $f(0) = 0$  ist und wenn  $f(z)$  den Kreis konform auf einen Stern abbildet, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} f'(z) = f'(e^{i\vartheta})$$

außer höchstens in einer Punktmenge der Kreisperipherie vom Maß Null, wenn  $z$  sich einem Peripheriepunkt längs Wegen nähert, die den Einheitskreis nicht berühren.

Aus dem Satz 4 entnehmen wir, daß

$$(21, 1) \quad \lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} f(z) = f(e^{i\vartheta})$$

für fast alle Werte von  $\vartheta$  existiert und endlich ist, wenn man sich gegen die Kreisperipherie auf die in dem Satz geschilderte Weise nähert. Aus



der Relation (19,1) und dem Satz 2 sieht man, daß auch

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} z \frac{f'(z)}{f(z)} = \varphi(\theta)$$

fast überall existiert mit derselben Art der Annäherung. Aus (21,1) folgt also, daß

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f'(z) = e^{-i\theta} \varphi(\theta) f(e^{i\theta})$$

fast überall existiert, womit der Satz 11 bewiesen ist. Man sieht sofort, daß die Bedingung  $f(0) = 0$  ganz unwesentlich für die Gültigkeit des Satzes ist. Denn falls

$$f(0) = a \neq 0$$

ist, so kann man die Funktion

$$F(z) = f(z) - a$$

eingeführen, für welche die Voraussetzungen des Satzes 11 erfüllt sind. Somit gilt der Satz für  $F(z)$  und daher auch für  $f(z)$ .

22. Zusatz. Wenn  $f(z)$  die Funktion des Satzes 11 ist, so wächst  $|f(z)|$  monoton auf jedem Radius des Einheitskreises  $|z| < 1$  und es existiert daher

$$\lim_{r \rightarrow 1} |f(re^{i\theta})|$$

für alle Werte von  $\theta$ . Unter diesen Grenzwerten kann auch der Wert  $\infty$  vorkommen.

Man rechnet leicht aus, daß

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \Im \log f(z) = \Re \left( z \frac{f'(z)}{f(z)} \right), \quad z = re^{i\theta},$$

ist. Ferner ist  $\log f(z)$  im Gebiet  $0 < |z| < 1$  regulär. In diesem Gebiet gelten also die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \Im \log f(z) = r \frac{\partial}{\partial r} \Re \log f(z).$$

Es ist also nach (19,1)

$$\frac{\partial}{\partial r} \Re \log f(z) = \frac{\partial}{\partial r} \log |f(z)| > 0, \quad 0 < |z| < 1.$$

Wir sehen somit, daß  $\log |f(z)|$  eine monoton wachsende Funktion von  $r$  im Intervalle  $0 < r < 1$  ist. Somit wächst auch  $|f(re^{i\theta})|$  monoton in  $r$  für  $0 < r < 1$ . Da aber diese Funktion im Gebiete  $0 \leq |z| < 1$  stetig ist, so ist sie auch monoton wachsend in  $r$  für  $0 \leq r < 1$ . Daher existiert

$$\lim_{r \rightarrow 1} |f(re^{i\theta})|$$

für alle Werte von  $\theta$ , die Grenzfunktion kann aber auch für gewisse  $\theta$  unendlich werden.

## § 3.

## Konvexe Gebiete.

23. Da die Untersuchungen über konvexe Gebiete ganz analog zu den Untersuchungen über Sterngebiete verlaufen werden und da konvexe Gebiete eine bekanntere Gebietsklasse bilden, wird die folgende Darstellung gedrängter sein.

Wir definieren ein konvexes Gebiet als ein Gebiet, das so beschaffen ist, daß die Verbindungsstrecke zweier innerer Punkte des Gebietes aus lauter inneren Punkten des Gebietes besteht. Ganz analog wie bei den Sterngebieten beweist man den folgenden Satz von Study<sup>25)</sup>:

Satz 12. Wenn  $G$  ein konvexes Gebiet ist, so sind sämtliche Niveaukurven konvexe Kurven.

24. Der nächste Satz, der auch von Study herrührt, lautet:

Satz 13. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die im Einheitskreise  $|z| < 1$  reguläre, analytische Funktion  $f(z)$  den Kreis konform auf ein konvexes Gebiet abbilde, ist, daß  $f'(0) \neq 0$  sei, daß  $1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}$  regulär im Kreise sei und dort die Ungleichung

$$(24,1) \quad \Re \left( 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > 0$$

erfülle.

Wir beweisen zuerst die notwendige Bedingung. Das Bildgebiet des Kreises  $|z| < r < 1$  ist nach dem Satz 9 ein konvexes Gebiet. Der Rand des Gebietes ist eine konvexe, geschlossene, doppelpunktfreie, analytische Kurve. Die Stützwinkelfunktion ist durch die Formel gegeben

$$\varphi(re^{i\theta}) = \frac{\pi}{2} + \vartheta + \Re \left[ \frac{1}{i} \log f'(z) \right].$$

Nach den allgemeinen Untersuchungen über konvexe Kurven weiß man, daß  $\varphi(re^{i\theta})$  eine monoton wachsende Funktion von  $\theta$  ist. Es gilt also die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 1 + \frac{r}{\partial \theta} \Re \left[ \frac{1}{i} \log f'(z) \right] = \Re \left[ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] > 0,$$

wobei  $z = re^{i\theta}$  gesetzt wird. Somit bekommt man die notwendige Bedingung.

<sup>25)</sup> E. Study, Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche, Leipzig, Teubner 1912. Ein sehr einfacher und eleganter Beweis des Satzes findet sich in der in Anm. <sup>27)</sup> erwähnten Arbeit von T. Radó.

Wenn umgekehrt  $f(z)$  regulär ist, wenn  $f'(0) \neq 0$  und  $1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}$  regulär ist und wenn die Beziehung

$$\Re \left( 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > 0$$

gilt, so entsprechen den Kreisen  $|z| = r < 1$  geschlossene, doppelpunktfreie, analytische Kurven, die außerdem noch konvex sind. Daraus entnimmt man, daß das Gebiet, welches dem Kreise  $|z| < 1$  entspricht, konvex ist.

25. Jetzt sind wir in der Lage, einen Satz über die Ränderzuordnung zu bekommen. Es gilt nämlich der

**Satz 14.** *Es sei  $f(z)$  eine Funktion, die den Einheitskreis  $|z| < 1$  auf ein konvexes Gebiet konform abbildet. Dann streben  $f'(z)$  und  $f''(z)$  gegen bestimmte endliche Randwerte für fast alle Punkte der Kreisperipherie, wenn man sich auf Wegen nähert, die den Kreis nicht berühren.*

Die Funktion  $f(z)$  genügt der Beziehung (24, 1). Da ein konvexes Gebiet insbesondere ein Stern ist, so folgt der Teil des Satzes, der sich auf  $f'(z)$  bezieht, ohne weiteres aus dem Satz 11. Um nun den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, benutzen wir den Satz 2. Wenn man

$$(25, 1) \quad F(z) = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

setzt, so folgt, daß

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} F(z) = F(e^{i\vartheta})$$

für fast alle  $\vartheta$  existiert und endlich ist, wobei man sich auf nicht-tangentiellen Wegen gegen  $e^{i\vartheta}$  nähert. Durch die Auflösung der Gleichung (25, 1) nach  $f''(z)$ :

$$f''(z) = \frac{f'(z)[F(z) - 1]}{z}$$

sieht man, daß

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} f''(z) = e^{-i\vartheta} \lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} f'(z) \left[ \lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} F(z) - 1 \right]$$

für fast alle  $\vartheta$  existiert, wobei die Annäherung in dem schon erwähnten Sinne zu verstehen ist.

26. Noch einige Bemerkungen zum Satz 14 werden hier hinzugefügt. Es wird sich ergeben, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} |f'(re^{i\vartheta})| = \psi(\vartheta)$$

für jeden Wert von  $\vartheta$  existiert, obwohl er auch unendlich werden kann. Es wird sich ferner zeigen, daß es eine positive Zahl  $a$  gibt, derart, daß

$$\psi(\vartheta) \geq a > 0$$

sein muß und daß, wenn das konvexe Gebiet beschränkt ist,  $\psi(\vartheta)$  summierbar ist.

Aus der Relation

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\vartheta + \Im \log f'(z)) = \Re \left( 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right),$$

worin  $z = r e^{i\vartheta}$  gesetzt wird, folgt unter Berücksichtigung von (24, 1), daß

$$(26, 1) \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\vartheta + \Im \log f'(z)) > 0$$

ist. Ferner ist die Funktion  $\log(z f'(z))$  im Bereiche  $0 < |z| < 1$  regulär, so daß man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen anwenden kann:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\vartheta + \Im \log f'(z)) = r \frac{\partial}{\partial r} \{ \log |z \cdot f'(z)| \}.$$

Aus (26, 1) folgt dann, daß im Bereiche  $0 < |z| < 1$

$$(26, 2) \quad \frac{\partial}{\partial r} \{ \log |z \cdot f'(z)| \} > 0$$

ist. Wir wählen einen festen Wert von  $\vartheta$ , den wir mit  $\vartheta_0$  bezeichnen werden, und betrachten die Funktion  $\log |z \cdot f'(z)|$  längs des entsprechenden Radius. Wegen (26, 2) wächst diese Funktion und daher auch  $|z f'(z)|$  monoton im Intervalle  $0 < r < 1$ . Es existiert also

$$\lim_{r \rightarrow 1} r \cdot |f'(r e^{i\vartheta_0})| = \lim_{r \rightarrow 1} |f'(r e^{i\vartheta_0})| = \psi(\vartheta_0).$$

Der Grenzwert kann natürlich für besondere Werte von  $\vartheta$  unendlich werden, wie es später an Beispielen gezeigt wird. Aus dem Satz 14 folgt aber, daß die Unendlichkeitsstellen der Funktion  $\psi(\vartheta)$  höchstens eine Punktmenge vom Maße Null bilden.

Jetzt kann man leicht zeigen, daß es eine reelle positive Zahl  $a$  gibt, derart daß

$$\psi(\vartheta) \geq a > 0$$

ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man eine abzählbare Folge von Punkten  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$  wählen, die gegen einen Punkt  $\vartheta^*$  im Intervalle  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  konvergieren, und eine gegen Null strebende Folge von positiven Zahlen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ , so daß

$$\psi(\vartheta_n) \leq \varepsilon_n$$

für alle  $n$  bestehen würde. Wir wissen auch, daß  $r \cdot |f'(r e^{i\vartheta_n})|$  eine monoton wachsende Funktion ist, die mit  $r \rightarrow 1$  gegen  $\psi(\vartheta_n)$  konvergiert. Es ist also

$$(26, 3) \quad 0 \leq r_1 |f'(r_1 e^{i\vartheta_n})| - r_2 |f'(r_2 e^{i\vartheta_n})| \leq \varepsilon_n, \quad 0 < r_1 < 1, \quad 0 \leq r_2 < 1, \quad r_2 < r_1.$$

Ich halte nun die Werte  $r_1$  und  $r_2$  fest und bemerke, daß  $r \cdot |f'(r e^{i\vartheta})|$  für ein festes  $r < 1$  eine stetige Funktion von  $\vartheta$  ist. Also existieren die

Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_1 |f'(r_1 e^{i\theta_n})| = r_1 |f'(r_1 e^{i\theta})|$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_2 |f'(r_2 e^{i\theta_n})| = r_2 |f'(r_2 e^{i\theta})|.$$

In (26,3) kann man dann den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  ausführen und man hat somit die Relation

$$0 \leq r_1 |f'(r_1 e^{i\theta})| - r_2 |f'(r_2 e^{i\theta})| \leq 0$$

oder

$$r_1 |f'(r_1 e^{i\theta})| = r_2 |f'(r_2 e^{i\theta})|.$$

Dabei können in dieser Gleichung beliebige zwei Zahlen  $r_1$  und  $r_2$  eingesetzt werden, die die Ungleichheiten in (26,3) erfüllen. Man kann also  $r_2 = 0$  setzen und wir erhalten

$$r_1 |f'(r_1 e^{i\theta})| = 0, \quad 0 < r_1 < 1,$$

und auch

$$|f'(r_1 e^{i\theta})| = 0, \quad 0 \leq r_1 < 1.$$

Das ist aber ein Widerspruch, denn in jedem Punkte des Einheitskreises gilt die Beziehung  $f'(z) \neq 0$ .

Wir haben somit gezeigt, daß es tatsächlich eine positive Zahl  $a$  geben muß, so daß

$$\psi(\theta) \geq a > 0$$

ist.

Zuletzt wird noch bewiesen, daß  $\psi(\theta)$  summierbar ist, wenn wir noch voraussetzen, daß das konvexe Gebiet beschränkt ist. Die Randkurve ist dann rektifizierbar. Bezeichnet man die Länge der Kurve mit  $L$ , so ist nach dem Zusatz 2, S. 202 und dem Satze 7

$$(26,4) \quad \int_0^{2\pi} r |f'(r e^{i\theta})| d\theta < L, \quad 0 < r < 1.$$

Nach dem Zusatz zum Satz 6 ist

$$(26,5) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} r |f'(r e^{i\theta})| d\theta = L.$$

Da die Funktionen  $r \cdot |f'(r e^{i\theta})|$  eine monoton wachsende Folge in  $r$  bilden, so ist nach einem Satz von Lebesgue

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} r \cdot |f'(r e^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta.$$

Aus (26,4) folgt, daß  $\psi(\theta)$  summierbar ist, und aus (26,5), daß

$$L = \int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta$$

ist. Ferner sei noch darauf hingewiesen, daß, wenn man mit  $s(\vartheta)$  die Bogenlänge des Randes bezeichnet,

$$s(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \psi(\vartheta) d\vartheta$$

ist. Wir fassen diese Ergebnisse in einem Satz zusammen:

*Zusatz. Wenn  $f(z)$  dieselbe Bedeutung hat, wie im Satze 14, so wächst  $|zf'(z)|$  monoton auf jedem Radius und konvergiert gegen einen endlichen oder einen unendlichen Wert. Die so definierte Randfunktion  $\psi(\vartheta)$  hat im Intervalle  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  höchstens eine Nullmenge von Unendlichkeitsstellen und es existiert eine positive Konstante  $a$ , derart daß*

$$\psi(\vartheta) \geq a$$

*ist. Wenn der Bereich beschränkt ist, so ist  $\psi(\vartheta)$  im Intervalle  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  summierbar.*

27. Im Satze 14 ist bewiesen worden, daß

$$(27, 1) \quad \lim_{r \rightarrow 1} f'(r e^{i\vartheta})$$

und

$$(27, 2) \quad \lim_{r \rightarrow 1} f''(r e^{i\vartheta})$$

für fast alle Werte von  $\vartheta$  existieren und endlich sind. Es wird hier die geometrische Bedeutung dieser Tatsache gegeben.

Man betrachte einen Radius des Einheitskreises  $|z| < 1$ , der einem festen Wert  $\vartheta_0$  von  $\vartheta$  entspricht. Dabei wird  $\vartheta_0$  so gewählt, daß für diesen Wert von  $\vartheta$  die beiden Grenzwerte (27, 1) und (27, 2) gleichzeitig existieren und endlich sind. Die Bildkurve des Radius  $\vartheta = \vartheta_0$  ist durch die Gleichung

$$(27, 3) \quad w(r, \vartheta_0) = f(r e^{i\vartheta_0})$$

gegeben. Diese Kurve ist im Intervalle  $0 \leq r < 1$  definiert, sie ist doppel-punktfrei und analytisch. Wir möchten jetzt einen Ausdruck für die Krümmung  $\frac{1}{\varrho}$  der Kurve (27, 3) bekommen. Nach der Definition ist

$$(27, 4) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{dr}{d\sigma},$$

wobei  $\tau$  den Winkel zwischen der positiv gerichteten Tangente und der positiven reellen Achse und  $\sigma$  die Bogenlänge bedeuten. Für diese zwei Größen, als Funktionen von  $r$  betrachtet, gelten die Ausdrücke

$$(27, 5) \quad \tau(r) = \vartheta_0 + \Im \log f'(r e^{i\vartheta_0})$$

und

$$(27, 6) \quad \sigma(r) = \int_0^r |f'(r e^{i\vartheta_0})| dr$$

für  $0 \leq r < 1$ .

Nach (27, 4), (27, 5), (27, 6) ist also

$$(27, 7) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{dr}{dr} \frac{d\vartheta}{dr} = \frac{1}{|f'(re^{i\vartheta_0})|} \Im \left( e^{i\vartheta_0} \frac{f''(re^{i\vartheta_0})}{f'(re^{i\vartheta_0})} \right).$$

Aus (27, 1) und (27, 2) und aus der Tatsache, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} |f'(re^{i\vartheta_0})| = \psi(\vartheta_0) \geq \alpha > 0$$

ist, sieht man unmittelbar, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{\varrho(r, \vartheta_0)}$$

existiert und endlich ist.

Nun betrachte man anstatt der Bildkurve eines Radius die Bildkurve eines zum Einheitskreise konzentrischen Kreises  $|z| = r_0 < 1$ . Diese Kurve hat die Gleichung

$$w(r_0, \vartheta) = f(r_0 e^{i\vartheta}),$$

wobei  $\vartheta$  jetzt variiert und  $r_0$  festgehalten wird. Die Krümmung  $\frac{1}{\varrho_1(r_0, \vartheta)}$  dieser Kurve wird durch die Formel<sup>29)</sup> gegeben:

$$\frac{1}{\varrho_1(r_0, \vartheta)} = \frac{1}{|r_0 e^{i\vartheta} f'(r_0 e^{i\vartheta})|} \Re \left( 1 + r_0 e^{i\vartheta} \frac{f''(r_0 e^{i\vartheta})}{f'(r_0 e^{i\vartheta})} \right).$$

Setzt man dann  $\vartheta = \vartheta_0$  in diese Gleichung ein, so sieht man, daß auch

$$\lim_{r_0 \rightarrow 1} \frac{1}{\varrho_1(r_0, \vartheta_0)}$$

existiert.

### Kapitel III.

#### Jordansche Kurven von beschränkter Krümmung und eine funktionentheoretische Anwendung.

##### § 1.

#### Geometrisches über Jordansche Kurven von beschränkter Krümmung.

28. Wir betrachten eine Jordansche Kurve, die in allen Punkten eine Tangente besitzt und von der Beschaffenheit ist, daß

$$(28, 1) \quad |\varphi(s+h) - \varphi(s)| < |h|$$

ist, wobei  $\varphi$  den Winkel zwischen der positiv gerichteten Tangente und der reellen  $x$ -Achse bezeichnet und  $s$  die Bogenlänge des Kurvenbogens bedeutet. Es besteht für solche Kurven der folgende Satz:

<sup>29)</sup> Die leichte Rechnung, die zu dieser Formel führt, findet man z. B. bei G. Pólya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, 3. Kap., Aufg. 106, S. 105.



Satz 15. Es sei  $C$  eine Jordansche Kurve von der Beschaffenheit (28,1). Es sei  $M$  ein beliebiger Punkt dieser Kurve und  $\widehat{P'M}$  und  $\widehat{MP''}$  zwei

Bögen der Kurve  $C$ , beide von der Länge  $\frac{\pi}{2}$ .

Dann existiert ein Kreis vom Radius  $\frac{1}{2}$ <sup>40)</sup>, der die Kurve  $C$  im Punkte  $M$  von innen berührt, so daß kein Punkt des Bogens  $\widehat{P'MP''}$  im Innern dieses Kreises liegt.

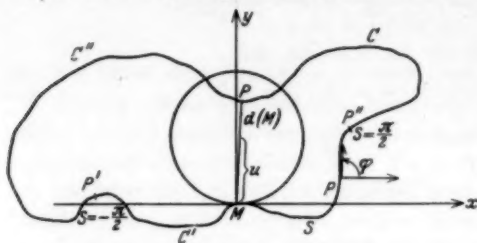


Fig. 2.

Wir wählen  $M$  als Anfang des Koordinatensystems und legen die  $x$ -Achse längs der positiv gerichteten Tangente zur Kurve  $C$  im Punkte  $M$  und die  $y$ -Achse längs der nach innen gerichteten Normale. Der Satz wird dann richtig sein, wenn man zeigen kann, daß eine Zahl  $u$  existiert, derart daß, wenn der Punkt  $(x, y)$  auf dem Bogen  $\widehat{P'MP''}$  liegt, ist

$$x^2 + (y - u)^2 \geq u^2$$

oder, was dasselbe ist

$$(28, 2) \quad x^2 + y^2 \geq 2uy.$$

Die Ungleichheit wird für den Bogen  $\widehat{MP''}$  bewiesen. Dieselbe Überlegung kann man dann für den Bogen  $\widehat{P'M}$  ausführen, indem man  $x' = -x$  setzt und das Koordinatensystem  $(x', y)$  betrachtet. Die Bogenlänge  $s$  und der Winkel  $\varphi$  werden beide von  $M$  aus gemessen. Die Ungleichheit (28,1) nimmt dann die einfachere Gestalt an

$$(28, 3) \quad |\varphi(s)| < s.$$

Längs des Bogens  $\widehat{MP''}$  liegt  $\varphi$  wegen (28,3) zwischen den Grenzen

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi(s) \leq +\frac{\pi}{2}.$$

Daher ist

$$(28, 4) \quad \cos \varphi = \cos |\varphi| > \cos s$$

und

$$(28, 5) \quad \sin \varphi \leq \sin |\varphi| < \sin s.$$

<sup>40)</sup> Es kann sogar gezeigt werden, daß der Kreis vom Radius  $\frac{1}{2}$  der größte Kreis ist, der die im Satze 15 angegebene Eigenschaft besitzen wird. Die Aufsuchung des größten Kreises ist aber für unsere Zwecke belanglos.

Es ist nun

$$x = \int_0^s \cos \varphi \, ds, \quad y = \int_0^s \sin \varphi \, ds.$$

Wegen (28, 4) und (28, 5) ist dann

$$x > \int_0^s \cos s \, ds = \sin s, \quad y < \int_0^s \sin s \, ds = 1 - \cos s.$$

Es ist daher

$$x^2 + y^2 \geq x^2 > 1 - \cos^2 s \geq 1 - \cos s > y.$$

Setzt man also  $u = \frac{1}{2}$  in der Relation (28, 2) ein, so ist die Ungleichung erfüllt und der Satz bewiesen.

29. Die zwei Punkte  $P'$  und  $P''$  zerlegen die Jordansche Kurve  $C$  in zwei Jordansche Kurvenbögen, von denen der eine den Punkt  $M$  im Innern enthält und der andere nicht. Den ersten bezeichnen wir mit  $C'$  und den zweiten mit  $C''$ . Wir betrachten einen beliebigen Punkt  $Q$  des Bogens  $C''$  und bemerken, daß die

$$(29, 1) \quad \text{untere Grenze } \overline{MQ} = d > 0 \\ q \in C''$$

sein muß. Denn sonst würde ja die Kurve einen Doppelpunkt besitzen. Wenn man also einen Kreis vom Radius  $d$  um den Punkt  $M$  legt, so kann kein Punkt des Bogens  $C''$  im Innern dieses Kreises liegen. Das gemeinsame Gebiet von diesem Kreis und dem ursprünglichen Kreis vom Radius  $u = \frac{1}{2}$  enthält überhaupt keine Punkte der Kurve  $C$  im Innern. Wir zeichnen nun einen Kreis in diesem Gebiet, welcher den Kreis mit dem Radius  $u = \frac{1}{2}$  im Punkte  $M$  berührt. Dieser Kreis wird dann keine Punkte von  $C$  im Innern enthalten und wird  $C$  im Punkte  $M$  berühren. Wir haben also bewiesen:

Satz 16. *Es sei  $C$  die im Satze 15 angegebene Kurve und  $M$  sei ein beliebiger Punkt dieser Kurve. Dann existiert mindestens ein Kreis, der die Kurve  $C$  im Punkte  $M$  berührt und keinen Punkt von  $C$  im Innern enthält.*

30. Wir vervollständigen nun die Betrachtungen der Sätze 15 und 16, indem wir den folgenden Satz zeigen:

Satz 17. *Es sei  $C$  die im Satze 15 angegebene Kurve. Dann existiert eine Zahl  $\epsilon > 0$ , derart daß, wenn  $M$  ein beliebiger Punkt dieser Kurve ist, ein Kreis vom Radius  $\epsilon$  zugleich die Kurve in  $M$  von innen berührt und keinen Punkt von  $C$  im Innern enthält. Dabei hängt die Zahl  $\epsilon$  nicht vom Punkte  $M$  ab.*

Von den Punkten  $P$  des Bogens  $C''$  in der Fig. 2, die der Relation

$$MP = d$$

genügen, wobei  $d$  in (29, 1) definiert ist, wähle ich denjenigen, für den  $MP$  den kleinsten Winkel mit der positiv gerichteten  $x$ -Achse macht, und bezeichne ihn wiederum mit  $P$ . Die Punkte  $P'$ ,  $P''$ ,  $P$ , die Größe  $d$  und die Bögen  $C'$  und  $C''$  hängen natürlich vom Punkte  $M$  ab. Daher werde ich die Bezeichnung  $P'(M)$ ,  $P''(M)$ ,  $P(M)$ ,  $d(M)$ ,  $C'(M)$ ,  $C''(M)$  gebrauchen. Ich möchte zeigen, daß für jeden Punkt  $M$  auf der Kurve  $C$  die Größe  $d(M)$  oberhalb einer positiven Konstante liegen wird. Dies kann man auf folgende Weise schreiben:

$$(30, 1) \quad \text{untere Grenze } d(M) = \delta > 0. \\ M \in C$$

Im entgegengesetzten Falle wähle ich eine Folge von positiven Zahlen  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ , ...,  $\epsilon_n$ , ..., die gegen Null konvergieren. Zu jeder Zahl  $\epsilon_n$  wird dann mindestens ein Punkt  $M_n$  auf  $C$  existieren, für welchen die Relation

$$(30, 2) \quad d(M_n) \leq \epsilon_n$$

besteht. Somit bekommen wir eine unendliche Folge von Punkten auf  $C$ ,  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ . Ich wähle eine gegen einen einzigen Punkt  $M^*$  konvergierende Teilfolge dieser Folge, die ich mit  $M_{n_1}, M_{n_2}, \dots, M_{n_k}, \dots$  bezeichne. Zur gleichen Zeit betrachte ich auch die Folge  $P(M_{n_1}), P(M_{n_2}), \dots, P(M_{n_k}), \dots$ . Diese Folge besteht entweder aus endlich vielen oder aus unendlich vielen Punkten. Im Falle von endlich vielen Punkten muß sich unter diesen Punkten ein Punkt  $P^*$  befinden, der so beschaffen ist, daß  $P^* < C''(M^*)$  oder  $P^* = P'(M^*)$  oder  $P^* = P''(M^*)$  ist und daß  $\overline{M^*P^*} = 0$  ist. Dies widerspricht also der Relation (29, 1). Wir dürfen daher annehmen, daß es unendlich viele verschiedene Punkte  $P(M_{n_1}), P(M_{n_2}), \dots, P(M_{n_k}), \dots$  gibt. Ich wähle einen beliebigen Häufungspunkt der Punktmenge und bezeichne ihn mit  $P^*$ . Wie im endlichen Fall läßt es sich leicht zeigen, daß die folgenden zwei Beziehungen erfüllt sind:

1.  $P^* < C''(M^*)$ , oder  $P^* = P'(M^*)$ , oder  $P^* = P''(M^*)$ ,
2.  $\overline{M^*P^*} = 0$ .

Das erste sieht man ein, indem man sich überlegt, daß nach der Definition der  $P(M)$

$$P(M_{n_k}) \nless C'(M_{n_k})$$

ist. Nun aber konvergieren bei wachsendem  $k$  die Bögen  $C'(M_{n_k})$  gegen  $C'(M^*)$  und somit kann kein Häufungspunkt der  $P(M_{n_k})$  im Innern von  $C'(M^*)$  liegen. Zum Beweise der zweiten Behauptung bemerkt man, daß nach (30, 2) die Beziehung

$$\overline{M^*P(M_{n_k})} \leq \overline{M^*M_{n_k}} + \overline{M_{n_k}P(M_{n_k})} \leq \epsilon_{n_k} + \overline{M^*M_{n_k}}$$

besteht. Man kann somit die Entfernung  $\overline{M^*P(M_n)}$  beliebig klein machen, indem man  $k$  groß genug wählt. Also ist die Entfernung des Punktes  $M^*$  von jedem der Häufungspunkte der Folge  $P(M_n)$ , daher auch von  $P^*$  gleich Null. Die Eigenschaften 1. und 2. können aber nicht zugleich für einen Punkt  $P^*$  einer Jordanschen Kurve zutreffen und daraus erweist sich die Relation (30, 1) als richtig.

Nun wählen wir einen ganz beliebigen Punkt  $M$  auf der Kurve  $C$ . Wir zeichnen einen Kreis  $K_1$  vom Radius  $\frac{1}{2}$ , der die Kurve  $C$  im Punkte  $M$  von innen berührt. Dieser Kreis enthält nach Satz 15 keinen Punkt von  $C'(M)$ . Wir zeichnen auch einen Kreis  $K_2$  mit dem Radius  $\delta$  ( $\delta$  ist in (30, 1) definiert) um den Punkt  $M$ . Dieser Kreis enthält nach der obigen Überlegung keinen Punkt von  $C''(M)$ . Das Gebiet  $K_1 \times K_2$  enthält also überhaupt keine Punkte von  $C$ , und in diesem Gebiete zeichnen wir einen Kreis, dessen Radius wir mit  $\epsilon$  bezeichnen, der  $C$  im Punkte  $M$  berührt. Es ist klar, daß  $\epsilon$  von  $M$  nicht abhängt, und daher ist der Satz bewiesen.

31. Durch eine unwesentliche Modifikation des vorhergehenden Beweisganges zeigt man die folgende Ergänzung zum Satz 17:

*Zusatz 1. Es sei  $C$  die im Satze 15 angegebene Kurve. Dann existiert eine Zahl  $\epsilon' > 0$  derart, daß, wenn  $M$  ein beliebiger Punkt dieser Kurve ist, ein Kreis vom Radius  $\epsilon'$  zugleich die Kurve in  $M$  von außen berühren und keinen Punkt von  $C$  im Innern enthalten kann. Dabei hängt die Zahl  $\epsilon'$  nicht vom Punkte  $M$  ab.*

32. Bemerkung. Die Sätze dieses Paragraphen haben wir unter Benutzung der Beziehung (28, 1) abgeleitet. Man sieht aber sofort, daß man (28, 1) durch die allgemeinere Relation

$$(32, 1) \quad |\varphi(s+h) - \varphi(s)| < \varrho|h|, \quad \varrho > 0,$$

ersetzen kann und ganz analoge Resultate daraus bekommt.

## § 2.

### Funktionentheoretische Anwendung.

33. Man sieht, daß, wenn man den Satz IV der Einleitung mit den vorhergehenden geometrischen Betrachtungen verbindet, gewisse funktionentheoretische Sätze zu vermuten sind. Diese Sätze werden nun ausgeführt. Ich beweise den

*Satz 18. Es sei  $C$  eine geschlossene Jordansche Kurve mit der Eigenschaft (32, 1). Es sei  $f(z)$  eine im Kreise  $|z| < 1$  reguläre, analytische Funktion, welche den Kreis auf das von  $C$  begrenzte Gebiet konform abbildet. Dann besitzt  $f(z)$  eine Winkelderivierte in jedem Peripheriepunkte des Kreises  $|z| = 1$  und die somit definierte Randfunktion ist beschränkt. Ferner liegt  $\lim_{z \rightarrow s} f'(z)$  oberhalb einer von  $\vartheta$  unabhängigen positiven Zahl.*

Man wähle einen beliebigen Punkt  $P$  der Kurve  $C$ . Aus den geometrischen Betrachtungen sieht man, daß es eine Zahl  $\alpha$  gibt derart, daß ein Kreis vom Radius  $\alpha$ , der die Kurve  $C$  im Punkte  $P$  von innen berührt, ganz im Innern des von  $C$  umgrenzten Gebietes liegt und daß ein Kreis vom Radius  $\alpha$ , der die Kurve  $C$  im Punkte  $P$  von außen berührt, keinen inneren Punkt des von  $C$  umgrenzten Gebietes enthalten kann. Ferner kann  $\alpha$  so gewählt werden,

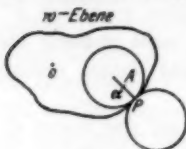


Fig. 3.

daß es vom Punkte  $P$  nicht abhängt. Man verbinde den Mittelpunkt des im Innern des Gebietes liegenden Kreises mit  $P$  und den Halbpunkt dieser Strecke bezeichne man mit  $A$ .



Fig. 4.

Dann ist  $AP = \frac{\alpha}{2}$ . Nun wird eine beliebige Abbildungsfunktion  $f_1(z)$  gewählt, für die

$$f_1(0) = \gamma, \quad f_1(1) = \delta$$

ist. Somit ist die Abbildungsfunktion eindeutig bestimmt.

Bei dieser Abbildung soll der Punkt  $w = A$  dem Punkte  $z = a$  und der Punkt  $w = P$  dem Punkte  $z = p$  entsprechen. Man betrachte weiter eine zweite Abbildungsfunktion  $f_2(z)$ , für welche

$$f_2(0) = A, \quad f_2(1) = P$$

gilt. Durch die Transformation

$$z^* = \frac{\bar{a} e^{i\tau} - 1}{e^{i\tau} - a} \frac{z - a}{\bar{a} z - 1},$$

wobei  $\tau = \arg p$  ist, wird der Kreis  $|z| = 1$  derart auf sich abgebildet, daß der Punkt  $a$  in den Anfangspunkt und der Punkt  $p$  in den Punkt 1 übergeführt wird. Die Funktion

$$\varphi(z) = f_2(z^*)$$

ist dann wiederum eine Abbildungsfunktion und zwar so eine, daß

$$\varphi(a) = f_2(0) = A$$

und

$$\varphi(p) = f_2(1) = P$$

ist. Bei dieser Abbildung entspricht also wieder der Punkt  $a$  dem Punkte  $A$  und der Punkt  $p$  dem Punkte  $P$ , wie es bei der durch  $f_1(z)$  geleisteten Abbildung gewesen ist. Daher muß

$$(33,1) \quad f_2 \left( \frac{\bar{a} e^{i\tau} - 1}{e^{i\tau} - a} \frac{z - a}{\bar{a} z - 1} \right) = \varphi(z) = f_1(z)$$

sein. Nun wird die  $w$ -Ebene durch eine starre Bewegung so transformiert, daß der Punkt  $P$  in den Punkt  $a$  verschoben wird und die Tangente zum

Rand im Punkte  $P$  in die Gerade  $\Re(t) = \alpha$  übergeführt wird. Somit geht der Punkt  $A$  in den Punkt  $t = \frac{3\alpha}{2}$  über.

Es sei  $t = f_3(z^*)$  die Transformation, bei der der Kreis in den neuen Bereich übergeht und  $f_3(0) = \frac{3\alpha}{2}$ ,  $f_3(1) = \alpha$  sind. Dann besteht die Relation

$$(33, 2) \quad f_3(z^*) = \beta f_2(z^*) + K,$$

wobei  $|\beta| = 1$  und  $K$  eine bestimmte komplexe Zahl ist. Nun wird der Kreis  $|t| < \alpha$  auf das Äußere des Einheitskreises  $|W| > 1$  abgebildet. Diese Abbildung wird durch

$$W = \frac{\alpha}{t}$$

geleistet. Der Kreis  $|t - 2\alpha| < \alpha$  geht bei dieser Transformation in den Kreis  $|W - \frac{2}{3}| < \frac{1}{3}$  über, welcher den Einheitskreis im Punkte  $W = 1$  berührt und dessen Mittelpunkt in  $W = \frac{2}{3}$  liegt.

Dabei entspricht  $t = \frac{3\alpha}{2}$  dem Punkte  $W = \frac{2}{3}$

und  $t = \alpha$  dem Punkte  $W = 1$ . Wenn nun  $W = F(z^*)$  die Abbildung des Kreises  $|z^*| < 1$  auf den Bereich in der  $W$ -Ebene leistet und wenn  $F(0) = \frac{2}{3}$  und  $F(1) = 1$  ist, so besteht die Relation

$$(33, 3) \quad F(z^*) = \frac{\alpha}{f_3(z^*)}.$$

Nach dem Satz IV der Einleitung existiert eine Winkelderivierte von  $F(z^*)$  im Punkte  $z^* = 1$  und es besteht die Relation

$$(33, 4) \quad \left| \lim_{z^* \rightarrow 1} F'(z^*) \right| \leq \frac{1}{3}.$$

Löst man die Gleichung (33, 3) nach  $f_3(z^*)$  auf, so ist

$$f_3(z^*) = \frac{\alpha}{F(z^*)}.$$

Differenziert man nach  $z^*$ , so ist

$$f_3'(z^*) = -\frac{\alpha}{[F(z^*)]^2} F'(z^*).$$

Nach (33, 4) und nach der Relation  $\lim_{z^* \rightarrow 1} F(z^*) = 1$  ist

$$\left| \lim_{z^* \rightarrow 1} f_3'(z^*) \right| = \alpha \left| \lim_{z^* \rightarrow 1} F'(z^*) \right| \leq \frac{\alpha}{3}.$$

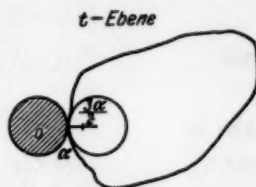


Fig. 5.

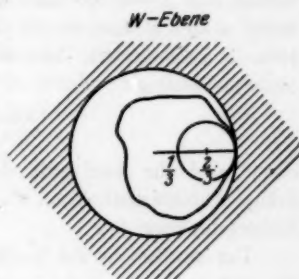


Fig. 6.

Nach (33, 2) haben wir  $|f'_3(z^*)| = |f'_2(z^*)|$  und daher

$$\left| \lim_{z^* \rightarrow 1} f'_3(z^*) \right| \leq \frac{\alpha}{8}.$$

Nun aber ist nach (33, 1)

$$f'_1(z) = f'_2(z^*) \frac{dz^*}{dz} = \frac{\bar{a} e^{i\tau} - 1}{e^{i\tau} - a} \frac{|a|^2 - 1}{(\bar{a} z - 1)^2} f'_3(z^*)$$

und

$$|f'_1(z)| = \frac{1 - |a|^2}{|\bar{a} z - 1|^2} |f'_3(z^*)|.$$

Also ist

$$(33, 5) \quad \left| \lim_{z \rightarrow p} f'_1(z) \right| \leq \frac{\alpha}{8} \frac{1 - |a|^2}{|\bar{a} p - 1|^2} \leq \frac{\alpha}{8} \frac{1}{(1 - |a|)^2}.$$

Diese Ungleichung gilt für den Randpunkt  $P$ . Läßt man nun  $P$  die ganze Randkurve durchlaufen, so bewegt sich der Punkt  $A$  auf einer Kurve, deren jeder Punkt die Entfernung  $\frac{\alpha}{2}$  vom Rande hat. Dementsprechend bewegt sich  $z = a$  auf einer Kurve, die im Inneren von  $|z| < d < 1$  liegt, wobei  $d$  eine Konstante ist, die nur von der Funktion  $f_1(z)$  abhängt. Für jeden Randpunkt gilt dann aus  $|a| < d < 1$  und aus der Relation (33, 5) die Abschätzung

$$\left| \lim_{z \rightarrow p} f'_1(z) \right| \leq \frac{\alpha}{8} \frac{1}{(1 - d)^2}.$$

Somit sind die Randwerte der Ableitung beschränkt. Da  $f_1(z)$  eine beliebige Abbildungsfunktion war, so gilt diese Tatsache auch für jede Abbildungsfunktion  $f(z)$ .

Um den Beweis des zweiten Teiles des Satzes zu erbringen, bemerken wir, daß nach dem Julia-Carathéodoryschen Satz<sup>41)</sup>

$$\lim_{z^* \rightarrow 1} F'(z^*) \geq \frac{1}{5}$$

ist. Daraus folgt, daß

$$\left| \lim_{z^* \rightarrow 1} f'_3(z^*) \right| = \left| \lim_{z^* \rightarrow 1} f'_2(z^*) \right| \geq \frac{\alpha}{5}$$

ist. Dann ist aber

$$\left| \lim_{z \rightarrow p} f'_1(z) \right| = \frac{1 - |a|^2}{|\bar{a} p - 1|^2} \left| \lim_{z^* \rightarrow 1} f'_3(z^*) \right| \geq \frac{\alpha}{5} \frac{1 - |a|^2}{|\bar{a} p - 1|^2} \geq \frac{\alpha}{5} \frac{1 - |a|}{1 + |a|}$$

und schließlich

$$\left| \lim_{z \rightarrow p} f'_1(z) \right| \geq \frac{\alpha}{5} \frac{1 - d}{1 + d},$$

wodurch die Behauptung bewiesen ist.

<sup>41)</sup> C. Carathéodory, loc. cit.<sup>10)</sup>, S. 5–9.



34. Wir verschärfen diesen Satz, indem wir den folgenden Satz zeigen:

Satz 19. Wenn  $f(z)$  dieselbe Funktion ist wie im Satze 18, so ist  $f'(z)$  im Kreise  $|z| < 1$  beschränkt.

Wir machen den Ansatz

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} dt.$$

Differenziert man beide Seiten nach  $\theta$ , so bekommt man

$$(34, 1) \quad \left\{ \begin{aligned} izf'(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} \right) dt, \quad (z=re^{i\theta}). \end{aligned} \right.$$

Die Funktion  $f(e^{it})$  ist nach dem Hauptsatz des Kapitels II, § 1, S. 203 von beschränkter Variation. Sie ist also fast überall in  $0 \leq t \leq 2\pi$  differenzierbar. Dem Beweise des Satzes von Fatou (bei uns Satz 1) entnehmen wir die Tatsache, daß, wenn  $f(e^{it})$  im Punkte  $t = \theta$  differenzierbar ist, die Relation

$$(34, 2) \quad \lim_{r \rightarrow 1} f'(re^{i\theta}) = \frac{d}{dt} f(e^{i\theta})$$

besteht. Aus (34, 2) folgt nun unmittelbar

$$\left| \lim_{r \rightarrow 1} f'(re^{i\theta}) \right| = \left| \frac{d}{dt} f(e^{i\theta}) \right|,$$

indem wir bemerken, daß die Gleichheit für fast alle Punkte des Definitionsintervalles gilt. Nun wissen wir aber aus dem Satz 18, daß die linke Seite eine beschränkte Funktion ist. Daher liegt  $\left| \frac{d}{dt} f(e^{i\theta}) \right|$  bis auf eine Nullmenge unterhalb einer festen positiven Zahl  $M$ . Dies hat zur Folge, daß  $f(e^{i\theta})$  eine Funktion von beschränkten Differenzenquotienten ist, d. h. es ist

$$(34, 3) \quad |f(e^{i(\theta+h)}) - f(e^{i\theta})| \leq M|h|,$$

wobei  $M$  dieselbe feste positive Zahl ist. Es soll nun gezeigt werden, daß dann auch

$$(34, 4) \quad |f(re^{i(\theta+h)}) - f(re^{i\theta})| \leq M|h|$$

ist. Setzt man  $\zeta = e^{i\theta}$  und  $z = re^{i\theta}$ , so nimmt die zu beweisende Beziehung (34, 4) die folgende Form an:

$$(34, 5) \quad |f(\zeta z) - f(z)| \leq M|h|.$$

Nun bemerken wir, daß die Funktion  $f(\zeta z) - f(z)$  ihren Maximalwert am Rande erreicht, denn sie ist ja am Rande stetig. Der Maximalwert aber ist nach der Ungleichung (34, 3) nicht größer als  $M|h|$ . Somit ist die Relation (34, 5) und daher auch (34, 4) bewiesen. Es folgt daraus unmittelbar, daß im Kreise  $|z| < 1$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{\theta}} \right| = |zf'(z)| \leq M$$

ist. Aus dem Schwarzschen Lemma sieht man, daß

$$|f'(z)| \leq M$$

ist. Der Satz ist also bewiesen.

35. Wir betrachten wieder das von der Kurve  $C$  beschränkte Gebiet. Die Länge einer Niveaukurve ist

$$l_r = \int_0^{2\pi} r |f'(re^{i\theta})| d\theta.$$

Nach dem Hauptsatz des Kapitels II, § 1, S. 203 ist

$$\lim_{r \rightarrow 1} l_r = l,$$

wobei  $l$  die Länge der Kurve  $C$  ist. Da  $f'(z)$  im Kreise  $|z| < 1$  beschränkt ist, können wir auch folgendes schreiben:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} r |f'(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 1} |f'(re^{i\theta})| d\theta.$$

Wenn man also den Ausdruck unter dem letzten Integralzeichen mit  $\psi(\theta)$  bezeichnet, so ist

$$l = \int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta.$$

Wenn man ferner die Bogenlänge auf  $C$  von demjenigen Punkte auf  $C$  mißt, der dem Punkte  $\theta = 0$  auf dem Kreise  $|z| = 1$  bei der Abbildung entspricht und wenn man diese Bogenlänge als Funktion  $s(\theta)$  von  $\theta$  auf- faßt, so kann man durch ähnliche Überlegungen zeigen, daß

$$s(\theta) = \int_0^\theta \psi(\vartheta) d\vartheta$$

ist, wobei  $\psi(\theta)$  eine beschränkte meßbare Funktion von  $\theta$  ist. Daher ist  $s(\theta)$  eine Funktion von beschränkten Differenzenquotienten.

*Zusatz. Die Bogenlänge  $s(\theta)$  auf der Kurve  $C$  als Funktion von  $\theta$  ist von beschränkten Differenzenquotienten.*

36. Im Satze 18 haben wir gesehen, daß die Randfunktion  $\psi(\theta)$  von  $|f'(z)|$  beschränkt ist. Wir werden noch mehr über  $\psi(\theta)$  aussagen können,

wenn wir den folgenden Hilfssatz bewiesen haben, welchen wir später in anderem Zusammenhang noch benutzen werden:

Hilfssatz. Es sei

$$(36,1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n \vartheta + b_n \sin n \vartheta]$$

die Fouriersche Reihe der totalstetigen, periodischen Funktion  $\varphi(\vartheta)$  mit der Periode  $2\pi$  und mit einer Ableitung von der Klasse  $L^p$  ( $p > 1$ )<sup>43</sup>. Dann ist die konjugierte trigonometrische Reihe

$$(36,2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [-b_n \cos n \vartheta + a_n \sin n \vartheta]$$

eine Fouriersche Reihe einer totalstetigen Funktion  $\psi(\vartheta)$ , welche eine Ableitung der Klasse  $L^p$  hat.

Die Koeffizienten in der Reihe (36,1) sind durch die Formeln:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\vartheta) \cos n \vartheta d\vartheta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\vartheta) \sin n \vartheta d\vartheta$$

gegeben. Da  $\varphi(\vartheta)$  totalstetig ist, kann man partielle Integration ausführen:

$$a_n = \left[ \frac{1}{n\pi} \varphi(\vartheta) \sin n \vartheta \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\vartheta) \sin n \vartheta d\vartheta,$$

$$b_n = \left[ -\frac{1}{n\pi} \varphi(\vartheta) \cos n \vartheta \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\vartheta) \cos n \vartheta d\vartheta.$$

Aus der Periodizität von  $\varphi(\vartheta)$  folgt

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\vartheta) \sin n \vartheta d\vartheta, \quad b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\vartheta) \cos n \vartheta d\vartheta.$$

Bezeichnet man nun mit  $a'$  und  $b'$  die Fourierschen Koeffizienten der Funktion  $\varphi'(\vartheta)$ :

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\vartheta) \cos n \vartheta d\vartheta,$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\vartheta) \sin n \vartheta d\vartheta,$$

so besteht also die Relation

$$a'_n = n b_n, \quad b'_n = -n a_n.$$

<sup>43</sup>) Eine summierbare Funktion heißt von der Klasse  $L^p$ , wenn die  $p$ -te Potenz des absoluten Betrages der Funktion nach Lebesgue integrierbar ist.

Somit kann die Fouriersche Reihe der Funktion  $\varphi'(\theta)$  geschrieben werden<sup>43)</sup>:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n b_n \cos n\theta - n a_n \sin n\theta].$$

Es wurde ferner vorausgesetzt, daß  $\varphi'(\theta)$  von der Klasse  $L^p$  ( $p > 1$ ) ist. Nach einem Satz von Riesz<sup>44)</sup> ist dann die zur letzten Reihe konjugierte trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n a_n \cos n\theta + n b_n \sin n\theta]$$

auch die Fouriersche Reihe einer Funktion  $\chi(\theta)$  von der Klasse  $L^p$ . Man integriere diese Reihe gliedweise zwischen 0 und  $\theta$ :

$$(36,3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta] - \sum_{n=1}^{\infty} [-b_n].$$

Nach einem Satz von Fatou<sup>45)</sup> stellt diese Reihe die Fouriersche Reihe einer totalstetigen Funktion  $\psi(\theta) - \psi(0)$  dar, die durch

$$\psi(\theta) - \psi(0) = \int_0^\theta \chi(t) dt$$

gegeben wird. Andererseits ist aber die Reihe (36,3), von einer additiven Konstante abgesehen, genau dieselbe wie (36,2). Aus der letzten Formel hat  $\psi(\theta)$  ferner eine Ableitung der Klasse  $L^p$ . Somit ist der Hilfssatz bewiesen.

37. Wir sind jetzt imstande, weiteres über die Randfunktion  $\varphi(\theta)$  von  $|f'(z)|$  auszusagen. Aus der Beziehung (32,1) folgt nämlich, daß  $\varphi(s)$  totalstetig ist und daß  $\frac{d\varphi}{ds}$  beschränkt ist. Aus dem Zusatz zum Satz 19 folgt, daß  $s(\theta)$  totalstetig und monoton wachsend ist und daß  $\frac{ds}{d\theta}$  beschränkt ist. Dann ist auch die Funktion  $\varphi(s(\theta)) = \varphi(\theta)$  totalstetig<sup>46)</sup> und  $\frac{d\varphi}{d\theta}$  einer beschränkten Funktion äquivalent. Es ist also sicher  $\left[\frac{d\varphi}{d\theta}\right]^p$  für alle  $p > 1$  nach Lebesgue integrierbar. Nun aber ist auch  $\varphi(\theta) - \theta - \frac{\pi}{2}$  eine totalstetige, periodische Funktion mit der Periode  $2\pi$  und mit beschränkter Ableitung. Es ist infolgedessen  $\left[\frac{d\varphi}{d\theta} - 1\right]^p$  für alle  $p > 1$  integrierbar. Diese Funktion  $\varphi(\theta) - \theta - \frac{\pi}{2}$  ist außerdem die Rand-

<sup>43)</sup> Diese Schlußweise findet man bei E. W. Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, Bd. II, S. 639–640.

<sup>44)</sup> M. Riesz, *Math. Zeitschr.* 27 (1928), S. 224–226.

<sup>45)</sup> P. Fatou, *loc. cit.* 2), S. 384.

<sup>46)</sup> C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen* (1927), S. 556.

funktion der im Kreise  $|z| < 1$  regulären Potentialfunktion  $\Im \log f'(z)$ . Die Randfunktion der konjugierten Potentialfunktion  $\Re \log f'(z) = \log |f'(z)|$  ist  $\log \frac{ds}{d\theta}$ . Der eben bewiesene Hilfssatz lehrt dann, daß  $\log \frac{ds}{d\theta}$  totalstetig ist und daß die Ableitung dieser Funktion allen Klassen  $L^p$  für  $p > 1$  gehört. Daher ist auch  $\varphi(\theta) = \frac{ds}{d\theta}$  totalstetig und  $\frac{d\varphi}{d\theta}$  gehört allen Klassen  $L^p$  für  $p > 1$  an. Man kann auch etwas über die Randwerte der Funktion  $f''(z)$  aussagen. Es ist nämlich

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r e^{i\theta} + z}{r e^{i\theta} - z} \frac{d}{d\theta} \varphi(r, \theta) d\theta$$

im Kreise  $|z| \leq r < 1$ , wobei  $\varphi(r, \theta)$  die Tangentenwinkelfunktion der Bildkurve  $|z| = r < 1$  ist. Partielle Integration liefert

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{r-z}{r+z} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(r, \theta) \frac{d}{d\theta} \left( \frac{r e^{i\theta} + z}{r e^{i\theta} - z} \right) d\theta.$$

Geht man hier zur Grenze  $r \rightarrow 1$  über, so erhält man eine im ganzen Einheitskreise  $|z| < 1$  gültige Darstellung

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1-z}{1+z} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \frac{d}{d\theta} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) d\theta.$$

Nach früheren Überlegungen ist  $\varphi(\theta)$  totalstetig und man kann also wieder partielle Integration ausführen:

$$(37, 1) \quad 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta.$$

Spaltet man das Integral in seinen reellen und imaginären Teil, so bekommt man

$$\Re \left[ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\theta) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\nu-\theta)+r^2} d\theta$$

und

$$\Im \left[ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\theta) \frac{2r \sin(\nu-\theta)}{1-2r \cos(\nu-\theta)+r^2} d\theta,$$

wobei  $z = r e^{i\nu}$  gesetzt wird. Da  $\varphi'(\theta)$  beschränkt ist, gehört es zu allen Klassen  $L^p$  für  $p > 1$ . Es ist also

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\nu}} \Re \left[ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = \varphi'(\theta)$$

für fast alle  $\vartheta$ , wobei  $z \rightarrow e^{i\vartheta}$  eine zum Kreise nicht tangentielle Annäherung bedeutet. Nach dem von uns schon erwähnten Satz von Riesz<sup>47)</sup> ist dann auch für fast alle  $\vartheta$

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} \Im \left[ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = \chi_1(\vartheta),$$

wobei  $\chi_1(\vartheta)$  allen Klassen  $L^p$  für  $p > 1$  gehört. Setzt man also

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \Phi_1(z),$$

so ist

$$f''(z) = \frac{f'(z)}{z} (\Phi_1(z) - 1),$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} f''(z) &= \lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} \left[ \frac{f'(z)}{z} (\Phi_1(z) - 1) \right] \\ &= e^{-i\vartheta} (\varphi'(\vartheta) + i\chi_1(\vartheta) - 1) \lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} f'(z) = \psi_1(\vartheta) \end{aligned}$$

existiert für fast alle Werte von  $\vartheta$ . Aus der Form des Grenzwertes sieht man ohne weiteres, daß  $|\psi_1(\vartheta)|$  der Klasse  $L^p$  für alle  $p > 1$  gehört. Wir fassen diese Ergebnisse in einem Satz zusammen:

**Satz 20.** Wenn  $f(z)$  dieselbe Funktion ist wie im Satze 18, so ist  $f'(z)$  im Kreise  $|z| \leq 1$  stetig und am Rande totalstetig. Die zweite Ableitung  $f''(z)$  hat Randwerte

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} f''(z) = \psi_1(\vartheta)$$

für fast alle  $\vartheta$  im Intervalle  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ , wenn man sich gegen den Rand auf Wegen nähert, die den Kreis nicht berühren. Diese Randfunktion  $\psi_1(\vartheta)$  hat die Eigenschaft, daß  $|\psi_1(\vartheta)|^p$  für alle  $p \geq 1$  summierbar ist.

#### Kapitel IV.

#### Verallgemeinerungen.

38. Es wird der folgende Satz bewiesen:

**Satz 21.** Es sei eine geschlossene Jordansche Kurve vorgelegt, welche in jedem Punkte eine eindeutig definierte Tangente besitzt. Der Winkel, den die Tangente mit der positiv gerichteten reellen Achse bildet, sei durch  $\varphi$  bezeichnet und die Bogenlänge durch  $s$ . Wenn  $\varphi'(s)$  totalstetig ist und  $\varphi''(s)$  von der Klasse  $L^p$  ( $p > 1$ ), so konvergiert die zweite Ableitung  $f''(z)$  der Abbildungsfunktion  $f(z)$  gegen Randwerte, die eine Funktion bilden, deren reeller und imaginärer Teil totalstetig sind, wenn man

<sup>47)</sup> loc. cit. Anm. <sup>44)</sup>, S. 224.

sich auf Wegen nähert, die den Kreis nicht berühren. Bei derselben Annäherung konvergiert die dritte Ableitung  $f'''(z)$  gegen bestimmte Randwerte für fast alle Randpunkte und die somit definierte Funktion ist von der Klasse  $L^p$ .

Im Abschnitt 37 haben wir gesehen, daß  $\frac{ds}{d\vartheta}$  totalstetig ist. Also ist auch  $\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{d\vartheta}$  totalstetig. Da weiterhin nach Abschnitt 37  $\log \frac{ds}{d\vartheta}$  totalstetig ist und die Ableitung  $\frac{d^2 s}{d\vartheta^2} \frac{ds}{d\vartheta}$  allen Klassen  $L^p$  für  $p > 1$  gehört, so muß  $\frac{d^2 s}{d\vartheta^2}$  auch allen Klassen  $L^p$  für  $p > 1$  gehören. Daher muß auch

$$\frac{d^2 \varphi}{d\vartheta^2} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{d^2 s}{d\vartheta^2} + \frac{d^2 \varphi}{ds^2} \left( \frac{ds}{d\vartheta} \right)^2$$

von der Klasse  $L^p$  sein, wobei  $p$  hier den festen Wert hat, den wir im Satze 21 gewählt haben. Man betrachte nun die Gleichung (37, 1) S. 225. Da  $\varphi'(\vartheta)$  stetig ist, muß die Relation

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} \Re \left[ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = \varphi'(\vartheta)$$

für alle  $\vartheta$  bestehen. Da  $\varphi'(\vartheta)$  totalstetig und  $\varphi''(\vartheta)$  von der Klasse  $L^p$  für ein  $p > 1$  ist, so existiert auch nach dem Hilfssatz auf S. 223 der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} \Im \left[ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = \psi_1(\vartheta)$$

für alle  $\vartheta$ , wobei jetzt  $\psi_1(\vartheta)$  totalstetig ist und mit einer Ableitung von der Klasse  $L^p$  versehen ist. Setzt man also

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \Phi_1(z),$$

so ist

$$f''(z) = \frac{f'(z)}{z} (\Phi_1(z) - 1)$$

und

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} f''(z) = e^{-i\vartheta} (\varphi'(\vartheta) + i\psi_1(\vartheta) - 1) \lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} f'(z),$$

woraus man gleich sieht, daß sowohl der reelle wie der imaginäre Teil des Grenzwertes totalstetige Funktionen von  $\vartheta$  sind.

Zum Beweise der zweiten Behauptung des Satzes differenziere man beide Seiten der Gleichung (37, 1) S. 225 nach  $z$ :

$$\frac{d}{dz} \left[ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\vartheta) \frac{d}{dz} \left( \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \right) d\vartheta.$$



Eine leichte Rechnung zeigt, daß

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \right) = -\frac{1}{iz} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \right)$$

ist. Setzt man dies im Integranden ein, so ist

$$\frac{d}{dz} \left[ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = -\frac{1}{2\pi iz} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \right) d\vartheta.$$

Partielle Integration kann hier ausgeführt werden, denn  $\varphi'(\vartheta)$  ist ja totalstetig:

$$(38, 1) \quad \frac{d}{dz} \left[ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = \frac{1}{2\pi iz} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi''(\vartheta) \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\vartheta.$$

Man spalte nun das Integral in seinen reellen und imaginären Teil:

$$(38, 2) \quad \Re \left[ iz \frac{d}{dz} \left( z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi''(\vartheta) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta-\nu)+r^2} d\vartheta$$

und

$$(38, 3) \quad \Im \left[ iz \frac{d}{dz} \left( z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi''(\vartheta) \frac{2r \sin(\nu-\vartheta)}{1-2r \cos(\vartheta-\nu)+r^2} d\vartheta,$$

indem man  $z = re^{i\nu}$  setzt. Es ist aber schon gezeigt worden, daß  $\varphi''(\vartheta)$  von der Klasse  $L^p$  ist. Dann weiß man aus (38, 2), daß

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} \Re \left[ iz \frac{d}{dz} \left( z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right] = \varphi''(\vartheta)$$

für fast alle  $\vartheta$  existiert, wenn man sich auf Wegen nähert, die den Einheitskreis nicht berühren. Nach dem Satz von Riesz<sup>40)</sup> konvergiert dann

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} \Im \left[ iz \frac{d}{dz} \left( z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right] = \psi_2(\vartheta)$$

für fast alle Werte von  $\vartheta$  und der Grenzwert bleibt derselbe, wenn man sich auf Wegen nähert, die den Einheitskreis nicht berühren. Die auf diese Weise definierte Funktion  $\psi_2(\vartheta)$  ist dann ebenfalls von der Klasse  $L^p$ . Also existiert auch fast überall der Limes

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} \left[ iz \frac{d}{dz} \left( z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right] = \varphi''(\vartheta) + i\psi_2(\vartheta).$$

<sup>40)</sup> loc. cit. Anm. <sup>40)</sup>, S. 224.

Mit der Bezeichnung

$$iz \frac{d}{dz} \left( z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) = \Phi_2(z)$$

ist nun

$$f'''(z) = \left[ \frac{\Phi_2(z)}{iz} + z \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 - \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] \frac{f'(z)}{z}.$$

Daraus und aus dem Satz 18 sieht man nun, daß

$$\lim_{z \rightarrow s(\vartheta)} f'''(z)$$

für fast alle Werte von  $\vartheta$  existiert und gegen eine Funktion der Klasse  $L^p$  konvergiert.

39. Der Satz 21 wird nun durch Induktion verallgemeinert. Der Beweis wird ganz analog sein, aber der Übersichtlichkeit wegen wird er in mehrere Teile zerlegt.

Hilfssatz 1. *Das vorgelegte Gebiet sei so beschaffen, daß die Funktionen  $\varphi(s)$ ,  $\varphi'(s)$ ,  $\varphi''(s)$ , ...,  $\varphi^{(n-2)}(s)$  totalstetig sind, während  $\varphi^{(n-1)}(s)$  von der Klasse  $L^p$  für  $p > 1$  ist. Dabei ist  $n \geq 3$ . Dann sind die Funktionen  $s(\vartheta)$ ,  $s'(\vartheta)$ , ...,  $s^{(n-2)}(\vartheta)$  totalstetig und  $s^{(n)}(\vartheta)$  von der Klasse  $L^p$ .*

Der Satz ist richtig für  $n = 3$ . Wir haben nämlich im Satze 21 gesehen, daß, wenn  $\varphi(s)$  und  $\varphi'(s)$  totalstetig sind und  $\varphi''(s)$  von der Klasse  $L^p$ ,  $\varphi(\vartheta)$  und  $\varphi'(\vartheta)$  totalstetig und  $\varphi''(\vartheta)$  von der Klasse  $L^p$  sind. Die zu diesen Funktionen konjugierten Funktionen sind  $\log \frac{ds}{d\vartheta}$ ,  $(\log \frac{ds}{d\vartheta})'$  und  $(\log \frac{ds}{d\vartheta})''$ . Die zwei ersten Funktionen sind also totalstetig und die dritte von der Klasse  $L^p$ . Daraus folgt durch Auflösung, daß  $s(\vartheta)$ ,  $s'(\vartheta)$ ,  $s''(\vartheta)$  totalstetig sind und  $s'''(\vartheta)$  von der Klasse  $L^p$ .

Für höhere Werte von  $n$  wird der Satz durch Induktion bewiesen. Wir nehmen also an, der Satz sei richtig für  $n - 1$ , und wollen dann beweisen, daß der Satz auch richtig für  $n$  sein wird. Der folgende Satz ist also richtig: Wenn  $\varphi(s)$ ,  $\varphi'(s)$ , ...,  $\varphi^{(n-3)}(s)$  totalstetig sind, während  $\varphi^{(n-2)}(s)$  von der Klasse  $L^p$  ist, so sind die Funktionen  $s(\vartheta)$ ,  $s'(\vartheta)$ , ...,  $s^{(n-2)}(\vartheta)$  totalstetig und  $s^{(n)}(\vartheta)$  von der Klasse  $L^p$ .

Differenziert man nun beide Seiten der Gleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{d\vartheta^2} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{d^2 s}{d\vartheta^2} + \frac{d^2 \varphi}{ds^2} \left( \frac{ds}{d\vartheta} \right)^2$$

$m - 2$ -mal nach  $\vartheta$ , so bekommt man einen Ausdruck für  $\frac{d^m \varphi}{d\vartheta^m}$ , der für  $m \leq n - 3$  aus lauter totalstetigen Gliedern besteht und für  $m = n - 2$  die Form hat

$$\frac{d^{n-2} \varphi(\vartheta)}{d\vartheta^{n-2}} = P + \frac{d^{n-2} \varphi(s)}{ds^{n-2}} \left( \frac{ds}{d\vartheta} \right)^{n-2},$$

wobei  $P$  ein Polynom mit lauter totalstetigen Gliedern ist. Das andere Glied ist von der Klasse  $L^p$  und daher ist auch  $\varphi^{(n-2)}(\theta)$  von der Klasse  $L^p$ .

Nun wird auch angenommen, daß  $\varphi^{(n-2)}(s)$  totalstetig ist und  $\varphi^{(n-1)}(s)$  von der Klasse  $L^p$ . Dann ist nach der letzten Gleichung  $\varphi^{(n-2)}(\theta)$  totalstetig und

$$\frac{d^{n-1}\varphi(\theta)}{d\theta^{n-1}} = \frac{d\varphi(s)}{ds} \frac{d^{n-1}s(\theta)}{d\theta^{n-1}} + P_1 + \frac{d^{n-1}\varphi(s)}{ds^{n-1}} \left( \frac{ds(\theta)}{d\theta} \right)^{n-1},$$

wobei  $P_1$  totalstetig ist, von der Klasse  $L^p$ . Wir wissen also, daß, wenn  $\varphi(s)$ ,  $\varphi'(s)$ , ...,  $\varphi^{(n-2)}(s)$  totalstetig sind und  $\varphi^{(n-1)}(s)$  von der Klasse  $L^p$ , die Funktionen  $\varphi(\theta)$ ,  $\varphi'(\theta)$ , ...,  $\varphi^{(n-2)}(\theta)$  totalstetig und  $\varphi^{(n-1)}(\theta)$  von der Klasse  $L^p$  sind. Die zu diesen Funktionen konjugierten Funktionen sind  $\log s'(\theta)$ ,  $\frac{s''(\theta)}{s'(\theta)}$ , ...,  $\frac{d^{n-2}}{d\theta^{n-2}} \left( \frac{s''(\theta)}{s'(\theta)} \right)$  und  $\frac{d^{n-2}}{d\theta^{n-2}} \left( \frac{s''(\theta)}{s'(\theta)} \right)$ . Diese Funktionen, außer der letzten, sind also totalstetig und die letzte ist von der Klasse  $L^p$ . Entwickelt man diese Ausdrücke, so ist

$$(39,1) \quad \frac{d^m}{d\theta^m} \left( \frac{s''(\theta)}{s'(\theta)} \right) = \frac{(s'(\theta))^{2m-1} s^{(m+2)}(\theta) + P(s'(\theta), s''(\theta), \dots, s^{(m+1)}(\theta))}{(s'(\theta))^{2m}},$$

( $m = 1, 2, \dots, n-2$ ),

wobei  $P$  ein Polynom der in der Klammer auftretenden Argumente ist. Für  $m = 1, 2, \dots, n-3$  ist  $P$  eine totalstetige Funktion von  $\theta$ , denn alle Glieder sind ja totalstetig. Insbesondere also, wenn  $m = n-3$  ist, so sieht man leicht durch Auflösung der Gleichung nach  $s^{(n-1)}(\theta)$ , daß diese letzte Funktion auch totalstetig ist, denn wir wissen schon aus Satz 18, daß  $s'(\theta) \geq a > 0$  ist. Setzt man in (39,1)  $m = n-2$ , so sieht man ebenso, daß  $s^{(n)}(\theta)$  von der Klasse  $L^p$  ist. Somit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

40. In diesem Beweise wurde noch eine andere Tatsache gezeigt, die wir auch besonders hervorheben werden:

**Hilfssatz 2.** *Das vorgelegte Gebiet sei so beschaffen, daß die Funktionen  $\varphi(s)$ ,  $\varphi'(s)$ , ...,  $\varphi^{(n-2)}(s)$  totalstetig sind, während  $\varphi^{(n-1)}(s)$  von der Klasse  $L^p$  ist, wobei  $p > 1$  und  $n \geq 3$  ist. Dann sind die Funktionen  $\varphi(\theta)$ ,  $\varphi'(\theta)$ , ...,  $\varphi^{(n-2)}(\theta)$  totalstetig und  $\varphi^{(n-1)}(\theta)$  ist von der Klasse  $L^p$ .*

41. Nun wird der folgende Satz bewiesen:

**Satz 22.** *Das abzubildende Gebiet habe die Eigenschaft, daß  $\varphi(s)$ ,  $\varphi'(s)$ , ...,  $\varphi^{(n-2)}(s)$  totalstetig sind und  $\varphi^{(n-1)}(s)$  von der Klasse  $L^p$ ,  $p > 1$ , ist. Dann konvergiert die  $(n-1)$ -te Ableitung  $f^{(n-1)}(z)$  der Abbildungsfunktion  $f(z)$  gegen bestimmte Randwerte für alle Randpunkte, wenn man sich auf Wegen nähert, die den Einheitskreis nicht berühren, und die somit definierte Randfunktion besitzt einen totalstetigen reellen Teil und einen totalstetigen imaginären Teil.*

Ich kehre zur Gleichung (38, 1) zurück:

$$iz \frac{d}{dz} \left[ z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi''(\vartheta) \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\vartheta.$$

Zur Abkürzung führe ich die folgende Bezeichnung ein:

$$iz \frac{d}{dz} \left[ z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = \Phi_2(z)$$

und die Rekursionsformel

$$iz \Phi_k'(z) = \Phi_{k+1}(z).$$

Wiederholt man nun  $(n-4)$ -mal das Verfahren, das zur Herleitung der Gleichung (38, 1) diente, so erhält man die Gleichung

$$(41, 1) \quad \Phi_{n-2}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^{(n-2)}(\vartheta) \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\vartheta.$$

Zerlegung des Integrals in reellen und imaginären Teil liefert die Gleichungen

$$\Re[\Phi_{n-2}(z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^{(n-2)}(\vartheta) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2} d\vartheta$$

und

$$\Im[\Phi_{n-2}(z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^{(n-2)}(\vartheta) \frac{2r\sin(\vartheta-\varphi)}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2} d\vartheta,$$

indem man  $z = re^{i\varphi}$  setzt. Nach Hilfssatz 2 ist die Funktion  $\varphi^{(n-2)}(\vartheta)$  totalstetig und mit einer Ableitung der Klasse  $L^p$  versehen. Also existiert

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi}} \Re[\Phi_{n-2}(z)] = \varphi^{(n-2)}(\varphi)$$

für alle  $\varphi$ , wenn man sich gegen die Kreisperipherie auf beliebigen Wegen nähert, die den Einheitskreis nicht berühren. Bei derselben Art der Annäherung existiert auch für alle  $\vartheta$  der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} \Im[\Phi_{n-2}(z)] = \psi_{n-2}(\vartheta)$$

und  $\psi_{n-2}(\vartheta)$  ist nach dem Hilfssatz auf S. 223 totalstetig und mit einer Ableitung der Klasse  $L^p$  versehen. Daraus folgt dann die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} \Phi_{n-2}(z) = \varphi^{(n-2)}(\vartheta) + i\psi_{n-2}(\vartheta)$$

für alle  $\vartheta$ , wobei die Annäherung von derselben Art wie oben sein muß. Nun kann man aber  $\Phi_{n-2}(z)$  auf folgende Weise schreiben:

$$\Phi_{n-2}(z) = \frac{(i)^{n-2} z^{n-2} (f'(z))^{n-2-1} f^{(n-1)}(z) + P[f'(z), f''(z), \dots, f^{(n-2)}(z)]}{(f'(z))^{n-2}},$$

wobei  $P(f', f'', \dots, f^{(n-1)})$  ein Polynom in den in der Klammer vorkommenden Funktionen ist. Löst man diese Gleichung nach  $f^{(n-1)}(z)$  auf, so ist

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{f'(z) \Phi_{n-1}(z)}{(i)^{n-2} z^{n-2}} - \frac{P(f', f'', \dots, f^{(n-2)})}{(i)^{n-2} z^{n-2} (f'(z))^{2^{n-2}-1}}.$$

Da  $|\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f'(z)| \geq a > 0$  ist, existiert

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f^{(n-1)}(z)$$

für alle  $\theta$  und der reelle und imaginäre Teil der Grenzfunktion sind totalstetig, womit der Satz bewiesen ist.

42. Führt man die ganze Überlegung für  $n$  aus, wie es hier für  $n-1$  gemacht worden ist, so findet man den folgenden Satz:

**Satz 23.** *Das abzubildende Gebiet habe die Eigenschaft, daß  $\varphi(s), \varphi'(s), \dots, \varphi^{(n-1)}(s)$  totalstetig sind und  $\varphi^{(n-1)}(s)$  von der Klasse  $L^p$ , ( $p > 1$ ), ist. Dann konvergiert die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}(z)$  der Abbildungsfunktion  $f(z)$  gegen bestimmte Randwerte für fast alle Randpunkte, wenn man sich auf Wegen nähert, die den Einheitskreis nicht berühren und der absolute Betrag der somit definierten Randfunktion ist von der Klasse  $L^p$ .*

## Kapitel V.

### Beispiele.

43. Man könnte geneigt sein, zu glauben, daß der Satz 14, S. 209, insofern verschärft werden könnte, daß die dort vorkommende Nullmenge durch eine weniger allgemeine Punktmenge zu ersetzen wäre. Daß diese Vermutung sowie ähnliche andere unwahrscheinlich ist, wird durch die folgenden Beispiele gezeigt.

**Beispiel 1.** *Eine im Einheitskreise  $|z| < 1$  reguläre, analytische Funktion  $w = f(z)$  wird konstruiert, welche den Kreis auf ein konvexes Gebiet der  $w$ -Ebene konform abbildet und welche die Eigenschaft besitzt, daß*

$$(43, 1) \quad \lim_{r \rightarrow 1} f'(r e^{i\theta}) = \infty$$

ist für eine im Intervalle  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  überall dicht liegende Menge von  $\theta$ -Werten.

Zu diesem Zwecke betrachte man eine im Intervalle  $-\pi \leq t \leq \pi$  monoton wachsende, beschränkte Funktion  $\lambda(t)$ , die nach oben halbstetig ist und deren Unstetigkeitsstellen in einer überall dichten Menge liegen<sup>49)</sup>.

<sup>49)</sup> Eine derartige Funktion findet man bei C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Kap. III, § 156.

Wir können ferner von dieser Funktion voraussetzen, daß  $\lambda(-\pi) = 0$  und  $\lambda(\pi) = 2\pi$  ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so setze man  $\lambda(-\pi) = a$  und  $\lambda(\pi) = b$ . Dann hat die Funktion  $\lambda^*(t) = \frac{2\pi}{b-a}(\lambda(t) - a)$  die oben genannten Eigenschaften und es ist  $\lambda^*(-\pi) = 0$  und  $\lambda^*(\pi) = 2\pi$ . Mit Hilfe dieser Funktion wird nun die folgende im Kreise  $|z| < 1$  reguläre analytische Funktion  $f(z)$  durch die folgende Differentialgleichung

$$(43, 2) \quad 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\lambda(t)$$

definiert, wobei das Integral rechts im Stieltjesschen Sinne zu verstehen ist. Aus dieser Relation wird nun die Formel für  $|f'(z)|$  abgeleitet, indem wir als Anfangsbedingung  $f'(0) = 1$  voraussetzen. Partielle Integration liefert

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1-z}{1+z} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) dt$$

oder

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1-z}{1+z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t) \frac{2e^{it}z}{(e^{it} - z)^2} dt.$$

Also ist

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{1+z} - \frac{1}{\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t) \frac{e^{it}}{(e^{it} - z)^2} dt.$$

Integriert man beide Seiten nach  $z$ , so folgt

$$\log f'(z) = \text{konst.} + \log \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{1}{\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt.$$

Ferner ist

$$\log f'(0) = \text{konst.} + \log 1 - \frac{1}{\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t) dt = 0.$$

Also

$$\log f'(z) = \log \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{z}{\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t) \frac{dt}{e^{it} - z}.$$

Setzt man die reellen Teile der beiden Seiten einander gleich, so ist

$$\log |f'(z)| = \log \frac{1}{|1+z|^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t) \Re \left( \frac{z}{i(e^{it} - z)} \right) dt.$$

Durch eine leichte Rechnung findet man, daß

$$\Re \left( \frac{z}{i(e^{i\theta} - z)} \right) = \frac{r \sin(\theta - t)}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2}$$

ist, wobei  $z = r e^{i\theta}$  gesetzt wird. Da ferner

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \sin(\theta - t)}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} dt = 0$$

ist, so kann man schreiben<sup>50)</sup>

$$(43, 3) \quad |f'(z)| = \frac{1}{|1+z|^2} e^{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\lambda(t) - \lambda(\theta)] \frac{r \sin(t - \theta)}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt}$$

Setzt man also  $f'(0) = 1$  und bemerkt, daß aus (43, 2)

$$\Re \left( 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > 0$$

ist, so sieht man, daß  $f(z)$  den Kreis  $|z| < 1$  auf ein konvexes Gebiet konform abbildet, denn die Voraussetzungen des Satzes 13 sind ja hier erfüllt.

Andererseits kann man aus der Gleichung (43, 3) die Eigenschaft (43, 1) feststellen. Wir nehmen an, daß  $t = \theta$  eine Unstetigkeitsstelle der Funktion  $\lambda(t)$  ist und zerlegen das Integral

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} [\lambda(t) - \lambda(\theta)] \frac{r \sin(t - \theta)}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\theta-\varepsilon} + \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta} + \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} + \int_{\theta+\varepsilon}^{\pi} [\lambda(t) - \lambda(\theta)] \frac{r \sin(t - \theta)}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \\ & 0 < \varepsilon < \pi. \end{aligned}$$

Die Integrale  $I_1$  und  $I_4$  sind für alle  $r < 1$  beschränkt. Wir führen den Beweis für  $I_1$  aus. Es ist

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\pi}^{\theta-\varepsilon} [\lambda(t) - \lambda(\theta)] \frac{r \sin(t - \theta)}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\theta-\varepsilon} |\lambda(t) - \lambda(\theta)| \frac{r |\sin(t - \theta)|}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt \\ & \leq 2\pi r \int_{-\pi}^{\theta-\varepsilon} \frac{1}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt \leq \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\theta-\varepsilon} \frac{dt}{\sin^2 \frac{t - \theta}{2}} = \pi \int_{\frac{\pi + \theta}{2}}^{\frac{-\varepsilon}{2}} \frac{dt}{\sin^2 t} = \pi \left( \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} + \tan \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

<sup>50)</sup> Ich verdanke diese Formel einer mündlichen Mitteilung von Herrn Professor Carathéodory.



Nimmt man also an, daß  $\vartheta$  von  $-\pi$  und  $+\pi$  verschieden ist, so ist  $I_1$  für  $r < 1$  beschränkt und ebenfalls  $I_1$ . Wegen der Bedingung  $0 < \varepsilon < \pi$  sind ferner die zwei Integrale  $I_2$  und  $I_3$  positiv. Kann man also zeigen, daß  $I_2$  mit  $r \rightarrow 1$  gegen Unendlich strebt, so wird auch

$$(43, 4) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} [\lambda(t) - \lambda(\vartheta)] \frac{r \sin(t - \vartheta)}{1 - 2r \cos(t - \vartheta) + r^2} dt = +\infty$$

sein. Dazu bemerken wir, daß wegen der Halbstetigkeit nach oben von  $\lambda(t)$ , wenn man die Bezeichnung

$$\lambda(\vartheta) - \lambda(\vartheta - 0) = A_\vartheta > 0$$

einführt,

$$\lambda(\vartheta) - \lambda(t) \geq A_\vartheta > 0$$

für  $\vartheta > t$  ist. Also ist

$$\begin{aligned} 0 < I_2 &\geq A_\vartheta \int_{\vartheta - \varepsilon}^{\vartheta} \frac{r \sin(\vartheta - t)}{1 - 2r \cos(t - \vartheta) + r^2} dt = -\frac{A_\vartheta}{2} [\log(1 - 2r \cos(t - \vartheta) + r^2)]_{\vartheta - \varepsilon}^{\vartheta} \\ &= -\frac{A_\vartheta}{2} \log \frac{(1 - r)^2}{1 - 2r \cos \varepsilon + r^2}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\lim_{r \rightarrow 1} I_2 = +\infty,$$

womit die Behauptung (43, 4) bewiesen ist. Da aber die Unendlichkeitsstellen von  $\lambda(t)$  im Intervalle  $-\pi < t < +\pi$  überall dicht liegen, so ist die Eigenschaft (43, 1) gezeigt.

44. Aus dem letzten Beispiel bekommen wir nun leicht ein Beispiel einer im Kreise  $|z| < 1$  regulären, analytischen Funktion  $w = \varphi(z)$ , welche den Kreis konform auf einen Stern in der  $w$ -Ebene abbildet und für welche

$$(44, 1) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \varphi(r e^{i\vartheta}) = \infty$$

gilt für eine im Intervalle  $-\pi \leq \vartheta \leq +\pi$  überall dicht liegende Menge.

Man braucht nur

$$\varphi(z) = z f'(z)$$

zu setzen. Dann ist

$$\varphi'(0) = f'(0) = 1$$

und

$$z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

Also nach den Überlegungen zum Beispiel 1

$$\Re \left( z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right) > 0,$$

woraus man sieht nach Satz 7, daß  $\varphi(z)$  den Kreis  $|z| < 1$  auf einen Stern konform abbildet. Die Eigenschaft (44, 1) folgt aber unmittelbar aus (43, 1).

45. Die Formel (43, 3) wird jetzt auf eine für spätere Zwecke bequemere Form umgestaltet. Dazu wird der Wert des Integrals

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) dt$$

ausgerechnet. Wendet man partielle Integration auf dieses Integral an, so hat man

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) dt = \frac{1-z}{1+z} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = -\frac{2z}{1+z}.$$

Also ist

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \frac{e^{it}}{(e^{it} - z)^2} dt = \frac{1}{1+z}.$$

Integriert man beide Seiten nach  $z$ , so ist

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt = \log(1+z) + \text{konst.}$$

und

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = \text{konst.}$$

Also ist

$$\log(1+z)^2 = \frac{iz}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \frac{dt}{e^{it} - z}$$

und

$$\log|1+z|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \Re \left( \frac{iz}{e^{it} - z} \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t - \theta) \frac{r \sin(t - \theta)}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt.$$

Schließlich haben wir

$$\frac{1}{|1+z|^2} = e^{-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t - \theta) \frac{r \sin(t - \theta)}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt}$$

Setzt man dies in der Formel (43, 3) ein, so nimmt sie die neue Gestalt an

$$(45, 1) \quad |f'(z)| = e^{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2(t - \theta) - t + \theta) \frac{r \sin(t - \theta)}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt}$$

oder

$$(45, 2) \quad |f'(z)| = e^{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\lambda(t) - t] \frac{r \sin(t - \vartheta)}{1 - 2r \cos(t - \vartheta) + r^2} dt}$$

46. Mit Hilfe dieser Formel wird nun ein Beispiel einer Funktion  $w = f_1(z)$  gegeben, welche im Kreise  $|z| < 1$  sich regulär analytisch verhält, den Kreis auf ein konvexes Gebiet der  $w$ -Ebene konform abbildet und welche die zwei Eigenschaften besitzt:

(46, 1)  $f_1'(z)$  ist im Kreise  $|z| < 1$  beschränkt,

(46, 2)  $\lim_{r \rightarrow 1} f_1''(z) = \infty$  für eine im Intervalle  $-\pi \leq \vartheta \leq +\pi$  überall dicht liegende Menge von  $\vartheta$ -Werten, wobei  $z = r e^{i\vartheta}$  gesetzt wird.

Dazu ziehe ich wieder die Funktion  $\lambda(t)$  heran. Ich behalte die Bedingung  $\lambda(-\pi) = 0$ , aber ersetze die Bedingung  $\lambda(\pi) = 2\pi$  durch die neue Bedingung

$$(46, 3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t) dt = 2\pi.$$

Das ist offenbar immer möglich durch Hinzufügung eines geeigneten konstanten Faktors. Nun definiere ich die Funktion

$$\lambda_1(t) = \int_{-\pi}^t \lambda(t) dt.$$

Die Funktion  $\lambda_1(t)$  ist monoton wachsend und von beschränkten Differenzenquotienten. Ihre fast überall existierende Ableitung ist der Funktion  $\lambda(t)$  äquivalent. Dann stelle ich wie im Beispiel 1 die Differentialgleichung auf

$$1 + z \frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\lambda_1(t)$$

oder

$$(46, 4) \quad 1 + z \frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt.$$

Aus dieser Definition folgt ganz analog wie bei der Herleitung von (45, 2) die Formel

$$|f_1'(z)| = e^{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\lambda_1(t) - t] \frac{r \sin(t - \vartheta)}{1 - 2r \cos(t - \vartheta) + r^2} dt},$$

wobei wieder  $f_1'(0) = 1$  gesetzt wird, oder

$$(46, 5) \quad |f_1'(z)| = e^{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \lambda_1(t) - t - \frac{\pi}{2} \right] \frac{r \sin(t - \vartheta)}{1 - 2r \cos(t - \vartheta) + r^2} dt}.$$

Nach (46, 4) ist

$$\Re \left( 1 + z \frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} \right) > 0.$$

Diese Ungleichheit und die Tatsache, daß  $f_1'(0) = 1$  ist, zeigen, daß  $f_1(z)$  den Kreis  $|z| < 1$  konform auf ein konvexes Gebiet abbildet.

Die Eigenschaft (46, 1) läßt sich aus der Gleichung (46, 5) zeigen. Wir wissen nämlich, daß  $\lambda_1(t) - t - \frac{\pi}{2}$  eine Funktion von beschränkten Differenzenquotienten ist. Ferner hat diese Funktion nach (46, 3) in den Endpunkten  $t = -\pi$  und  $t = +\pi$  denselben Wert  $\frac{\pi}{2}$ . Wenn man also die konjugierte Potentialfunktion

$$(46, 6) \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \lambda_1(t) - t - \frac{\pi}{2} \right] \frac{2r \sin(t - \theta)}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt$$

derjenigen Potentialfunktion betrachtet, welche  $\lambda_1(t) - t - \frac{\pi}{2}$  zur Randfunktion hat, so sieht man, daß diese konjugierte Potentialfunktion beschränkt sein muß, und somit nach (46, 5) auch  $f_1'(z)$ .

Die Eigenschaft (46, 2) zeigt man, indem man die imaginären Teile beider Seiten der Gleichung (46, 4) einander gleich setzt.

Es ist dann

$$\begin{aligned} \Im \left( 1 + z \frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} \right) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t) \frac{2r \sin(t - \theta)}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\lambda(t) - \lambda(\theta)] \frac{2r \sin(t - \theta)}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt. \end{aligned}$$

Nach den Betrachtungen des Beispiels 1 sieht man, daß für jede Unstetigkeitsstelle  $t = \theta$  der Funktion  $\lambda(t)$  im Intervalle  $-\pi \leq t \leq +\pi$

$$(46, 7) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \Im \left( 1 + r e^{i\theta} \frac{f_1''(r e^{i\theta})}{f_1'(r e^{i\theta})} \right) = \infty$$

ist. Es sei  $l$  die untere Grenze der Funktion (46, 6) im Kreise  $|z| < 1$ . Dann ist nach (46, 5)

$$(46, 8) \quad |f_1'(z)| \geq e^l > 0.$$

Ferner ist nach (46, 7)

$$\lim_{r \rightarrow 1} \left( 1 + r e^{i\theta} \frac{f_1''(r e^{i\theta})}{f_1'(r e^{i\theta})} \right) = \infty$$

und daher unter Berücksichtigung von (46, 8) auch

$$\lim_{r \rightarrow 1} f_1''(r e^{i\theta}) = \infty.$$

47. Durch ähnliche Betrachtungen kann man ein Beispiel einer im Kreise  $|z| < 1$  regulären, analytischen Funktion  $w = f_{n-1}(z)$  konstruieren, die so beschaffen ist, daß sie den Kreis konform auf ein konvexes Gebiet abbildet, daß ihre  $n - 1$  ersten Ableitungen im Kreise  $|z| < 1$  beschränkt sind und daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} f_{n-1}^{(n)}(z) = \infty$$

ist für eine im Intervalle  $-\pi \leq \vartheta \leq +\pi$  überall dichte Menge von  $\vartheta$ -Werten.

48. Im Beispiel 1 empfindet man einen Mangel dadurch, daß eine monotone Funktion nur abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen haben kann. Daher kann man nur die Behauptung machen, daß die Relation (43, 1) für abzählbar unendlich viele Stellen gilt. Man könnte also vermuten, daß die im Satze 14 vorkommenden Aussagen, daß die Punktmenge, in welcher die Konformität am Rande aufhört, vom Maße Null ist, dadurch verschärft werden könnte, daß diese Punktmenge abzählbar ist. Daß dies nicht immer der Fall ist, wird in den folgenden Beispielen gezeigt, wo die Relation (43, 1) auf Punktmengen von der Mächtigkeit des Kontinuums gilt.

Beispiel 2. *Es existiert eine im Kreise  $|z| < 1$  reguläre, analytische Funktion  $f(z)$ , die diesen Kreis konform auf einen Stern abbildet und die die Eigenschaft hat, daß*

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\vartheta}) = \infty$$

*für eine Punktmenge auf  $|z| = 1$  ist, die im Intervalle  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  perfekt und nirgends dicht ist und daher die Mächtigkeit des Kontinuums hat.*

Wir konstruieren das in der Fig. 7 angegebene Gebiet. Wir betrachten die  $w = Re^{i\vartheta}$ -Ebene und entfernen aus dieser Ebene das Stück  $R > 1$ ,  $0 < \vartheta < \frac{2}{3}\pi$ . Als zweiten Schritt betrachten wir die Entfernung aus diesem Gebiet der

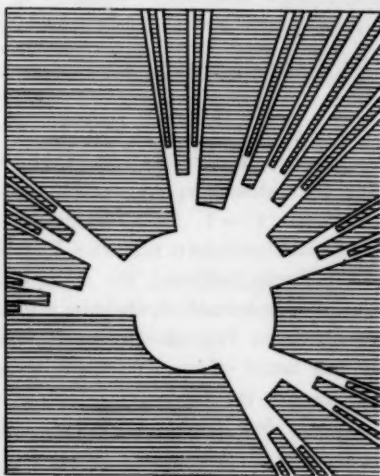


Fig. 7.

zwei Stücke  $R > \frac{3}{2}$ ,  $\frac{8}{9}\pi < \vartheta < \frac{10}{9}\pi$  und  $R > \frac{3}{2}$ ,  $\frac{14}{9}\pi < \vartheta < \frac{16}{9}\pi$ . Der dritte Schritt ist die Entfernung der vier Stücke  $R > 2$ ,  $\frac{20}{27}\pi < \vartheta < \frac{22}{27}\pi$ ;  $R > 2$ ,  $\frac{32}{27}\pi < \vartheta < \frac{34}{27}\pi$ ;  $R > 2$ ,  $\frac{38}{27}\pi < \vartheta < \frac{40}{27}\pi$ ;  $R > 2$ ,  $\frac{50}{27}\pi < \vartheta < \frac{52}{27}\pi$ .

Der  $n$ -te Schritt ist die Entfernung aus der übriggebliebenen Ebene der  $2^{n-1}$  Stücke  $R > \frac{n+1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3^n}\pi < \theta < \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3^n}\pi$ ; ... Das Grenzgebiet, wenn  $n$  gegen Unendlich strebt, ist ein Stern in bezug auf den Nullpunkt. Wir betrachten eine Abbildungsfunktion  $f(z)$  dieses Gebietes

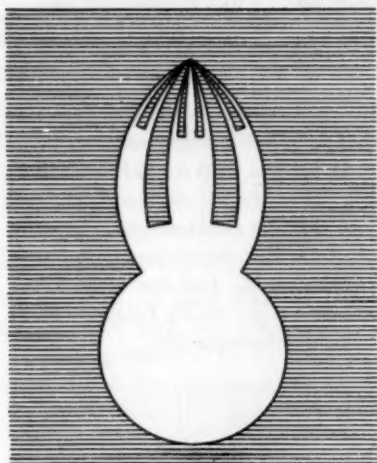


Fig. 8.

auf den Kreis  $|z| < 1$ , welche so normiert ist, daß  $f(0) = 0$  ist. Nun transformieren wir das Gebiet durch eine Möbiussche Transformation derart, daß der Punkt Unendlich in der  $w$ -Ebene in einen endlichen Punkt übergeht. Man kann durch eine geeignete Transformation erreichen, daß das transformierte Gebiet so aussieht, wie es in der Fig. 8 gezeichnet ist. Dem Punkte Unendlich entspreche nun ein endlicher Punkt  $\alpha$ . Die Funktion  $f(z)$  geht dann in eine Funktion  $\varphi(z)$  über, die eine Abbildungsfunktion des neuen Gebietes auf den Kreis  $|z| < 1$  ist. Wir wollen jetzt die Ränderzuordnung bei dieser Abbildung untersuchen und betrachten

die Strahlen, die sich aus dem Punkt  $\alpha$  ausbreiten. Die Berandung eines jeden solchen Strahles entspricht bei der Abbildung einem Kreisbogen auf der Kreis-peripherie  $|z| = 1$ . Dabei entspricht  $\alpha$  den beiden Endpunkten des Bogens. Zwei Strahlenrändern sind zwei Kreisbögen zugeordnet, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Wir sehen somit, daß, wenn man die Berandung des Gebietes betrachtet, diejenigen Punkte auf  $|z| = 1$ , welche allen von  $\alpha$  verschiedenen Punkten des Randes entsprechen, eine Punktmenge bilden, die aus lauter offenen Kreisbögen besteht, derart, daß je zwei solche Bögen voneinander einen positiven Abstand haben. Die Restmenge auf  $|z| = 1$  entspricht dem Punkte  $\alpha$ . Wir bezeichnen diese Menge mit  $M$  und fragen nach ihren Eigenschaften.  $M$  ist eine abgeschlossene Punktmenge. Wenn dies nicht der Fall wäre, so müßte ein Häufungspunkt von  $M$  im Innern eines Kreisbogens der von uns beschriebenen Art liegen, was offenbar unmöglich ist. Ferner kann  $M$  keinen isolierten Punkt enthalten, denn sonst müßte dieser Punkt ein Endpunkt zweier Kreisbögen aus der Punktmenge  $K - M$  sein, wobei  $K$  die Punktmenge  $|z| = 1$  ist. Daher würden diese zwei Kreisbögen einen Abstand Null voneinander haben. Dies ist aber un-

möglich. Da  $M$  zugleich abgeschlossen ist und keinen isolierten Punkt enthält, ist sie *perfekt*. Sie hat also die Mächtigkeit des Kontinuums. Ferner kann  $M$  keinen Kreisbogen enthalten, denn sonst würde ja  $\varphi(z)$  auf einem ganzen Kreisbogen den Wert  $\alpha$  annehmen und daher im ganzen Kreis identisch gleich  $\alpha$  sein. Daher enthält auch jeder Kreisbogen auf  $|z|=1$  sicher Punkte, die  $M$  nicht angehören. Also enthält auch jeder Kreisbogen auf  $|z|=1$  mindestens einen Teilbogen, der keinen Punkt von  $M$  im Innern hat. Somit ist  $M$  nirgends dicht auf der Kreis-peripherie.

Kehrt man nun zu unserem ursprünglichen Stern zurück, so sieht man also, daß für jeden Punkt  $e^{i\theta}$  von  $M$

$$(48, 1) \quad \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = \infty$$

ist, wobei die Annäherung aus dem Inneren des Kreises auf nichttangentiellen Wegen geschieht. Daß die Menge  $M$  das Maß Null hat, geht ohne weiteres aus unserem Satz 8 hervor.

49. Man kann jetzt aus der Überlegung auf den S. 235 und 236 das analoge Beispiel für konvexe Gebiete aussprechen. Wenn man nämlich dieselbe Funktion  $f(z)$  wie im Beispiel 2 betrachtet und eine neue Funktion  $F(z)$  durch die Gleichung

$$(49, 1) \quad f(z) = z F'(z)$$

einführt, so sieht man, daß  $F(z)$  den Kreis  $|z| < 1$  auf ein konvexes Gebiet konform abbildet. Aus (48, 1) und (49, 1) folgt dann unmittelbar, daß, wenn  $e^{i\theta}$  in  $M$  liegt,

$$(49, 2) \quad \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} F'(z) = \infty$$

ist für alle nicht tangentiellen Annäherungen aus dem Kreisinneren.

Wir betrachten ferner die Stützwinkelfunktion  $\tau(\theta)$  des eben definierten konvexen Gebietes. Da im Kreise  $|z| < 1$  die Beziehung

$$\Re \left( 1 + z \frac{F''(z)}{F'(z)} \right) > 0$$

besteht, so kann man die Funktion  $1 + z \frac{F''(z)}{F'(z)}$  auf folgende Weise darstellen<sup>51)</sup>:

$$1 + z \frac{F''(z)}{F'(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\tau(t) e^{it} + z}{dt e^{it} - z} dt.$$

<sup>51)</sup> C. Carathéodory, Berl. Sitzungsber. 1920, S. 560—562. Vgl. auch Anm. <sup>50)</sup>, S. 191.



Auf ganz dieselbe Weise wie im Beispiel 1 findet man

$$|F'(z)| = \frac{|F'(0)|}{|1+z|^2} e^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\tau(t) - \tau(\theta)] \frac{2r \sin(t-\theta)}{1-2r \cos(t-\theta) + r^2} dt}$$

Aus (49,2) folgt dann, daß

$$(49,3) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(t) \frac{2r \sin(t-\theta)}{1-2r \cos(t-\theta) + r^2} dt = \infty$$

für eine im Intervalle  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  perfekte, nirgends dichte Menge von  $\theta$ -Werten ist.

Aus der Relation (49,3) kann man nun ein Beispiel einer Funktion  $F_1(z)$  geben, die den Kreis  $|z| < 1$  auf ein konvexes Gebiet abbildet und die so beschaffen ist, daß  $F_1'(z)$  im Kreise  $|z| < 1$  beschränkt ist und

$$(49,4) \quad \lim_{r \rightarrow 1} F_1''(z) = \infty$$

für eine am Rande perfekte, nirgends dichte Menge gilt.

Ich betrachte die Funktion  $\tau(t)$  und multipliziere sie mit einer Konstanten, so daß

$$\tau(-\pi) = 0$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tau(t) dt = 2\pi$$

wird. Nun definiere ich die Funktion

$$\tau_1(t) = \int_{-\pi}^t \tau(t) dt.$$

Die Funktion  $\tau_1(t)$  ist monoton wachsend und von beschränkten Differenzenquotienten. Dann stelle ich, wie auf S. 237, die Differentialgleichung auf

$$1 + z \frac{F_1''(z)}{F_1'(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i't} + z}{e^{i't} - z} d\tau_1(t)$$

oder

$$1 + z \frac{F_1''(z)}{F_1'(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(t) \frac{e^{i't} + z}{e^{i't} - z} dt.$$

Daraus schließt man wie auf S. 238, daß  $F_1(z)$  den Kreis auf ein konvexes Gebiet abbildet und daß  $F_1'(z)$  in  $|z| < 1$  beschränkt ist. Die Eigenschaft (49,4) folgt aber dann aus (49,3).

Das letzte Beispiel kann sehr leicht für höhere Ableitungen verallgemeinert werden.

50. Man kann auch leicht ein Beispiel einer im Kreise  $|z| < 1$  schlichten, regulären Funktion  $f(z)$  angeben, die den Kreis konform auf einen Stern abbildet und die Eigenschaft hat, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\vartheta}) = \infty$$

für eine Punktmenge auf  $|z| = 1$  ist, die im Intervalle  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  überall dicht ist und die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

Um ein Beispiel einer solchen Funktion zu bekommen, brauchen wir nur das Verfahren zu verdichten, das zur Herstellung des Gebietes in der Fig. 7 diente. Weitere Beispiele für höhere Ableitungen kann man leicht nach den schon angegebenen Methoden finden.

(Eingegangen am 20. 3. 1930.)

## Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.

### Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern.

Von

Peter Thullen in Münster (Westf.)<sup>\*)</sup>.

Mit Hilfe der Carathéodoryschen Metrik<sup>1)</sup> hat Kritik<sup>2)</sup> für einen speziellen Reinhardtischen Kreiskörper, den Hyperkegel:

$$|z| + |w| < 1,$$

das überraschende Ergebnis gefunden, daß dieser Körper keine eindeutigen analytischen Transformationen in sich gestattet, die den Mittelpunkt in einen von ihm verschiedenen Punkt überführen. Ist nun das von Kritik<sup>2)</sup> Bewiesene nur eine Folge der am Rande des Kegels auftretenden Singularität oder ist es allgemein — von speziellen Fällen abgesehen — eine Eigenschaft der Reinhardtischen Körper? Dann wäre damit ganz im Gegensatz zur Theorie einer komplexen Veränderlichen, wo jeder innere Punkt des Kreises in jeden andern transformierbar ist und somit alle Punkte des Kreises gleichwertig sind, dem Mittelpunkt eines Reinhardtischen Körpers eine ganz eigenartige funktionentheoretisch ausgezeichnete Stellung zugeordnet, die zu wichtigen weiteren Konsequenzen führt. Es ist dann die Eigenschaft eines Punktes, Mittelpunkt eines solchen Körpers zu sein, invariant gegen alle eindeutigen analytischen Abbildungen (sowohl der Körper

<sup>\*)</sup> Seminar Prof. Behnke.

<sup>1)</sup> Carathéodory: a) Über das Schwarzsche Lemma bei analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Math. Annalen 97, S. 76—98. b) Über die Geometrie der analytischen Abbildungen, die durch analytische Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen vermittelt werden, Hamb. Abh. 6, S. 96—145.

<sup>2)</sup> Kritik<sup>2)</sup>, Über analytische Abbildungen einer Klasse von vierdimensionalen Bereichen, Math. Annalen 99, S. 321—341.

auf sich als auch untereinander). Hierdurch ist eine neue bei den Abbildungen dieser Körper auftretende Invariante charakterisiert, die merkwürdig ist, weil sie an jeweils genau einen eindeutig durch sie bestimmten Punkt jener Bereiche gebunden ist.

In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt werden, daß tatsächlich im allgemeinen Falle ein Reinhardt'scher Körper außer den trivialen Transformationen

$$\begin{aligned} z' &= z e^{i\theta} \\ w' &= w e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (\theta, \varphi \text{ reell})$$

und dazu bei symmetrischen Bereichen

$$\begin{aligned} z' &= R e^{i\theta} w \\ w' &= \frac{1}{R} e^{i\varphi} z \end{aligned} \quad (R > 0)$$

keine eindeutigen analytischen Abbildungen des Innern auf sich gestattet.

Nur die Körper

$$\begin{aligned} |z|^{\alpha} + |w|^{\beta} &< 1 \\ \text{bzw. } |z|^{\beta} + |w|^{\alpha} &< 1 \end{aligned} \quad (\alpha > 0)$$

und der Dizylinder:

$$|z| < 1, \quad |w| < 1^*)$$

lassen noch weitere Transformationen zu, und zwar für  $\alpha + 2$  — diese Körper seien „einseitig kugelhafte“ genannt — auch nur solche, die den Mittelpunkt in einen Punkt der Ebene  $z = 0$  bzw.  $w = 0$  überführen.

Die einzigen Reinhardt'schen Körper also, in denen bei einer analytischen Transformation auf sich der Mittelpunkt in einen beliebigen inneren Punkt transformiert werden kann, sind der Dizylinder und die Hyperkugel  $|z|^{\alpha} + |w|^{\beta} < 1$ .

In dem letzten Teile der Arbeit wird dann aus den gewonnenen Resultaten im Zusammenhang mit einem kürzlich von H. Cartan aufgestellten Satze eine weitere interessante Folgerung für die Abbildungstheorie gezogen werden<sup>\*\*)</sup>.

<sup>\*)</sup> Natürlich einschließlich ihrer durch Streckung entstehenden Bilder:

$$\begin{aligned} r_1 |z|^{\alpha} + r_2 |w|^{\beta} &< 1 \\ |z| &< a, \quad |w| < b \end{aligned} \quad (r_1, r_2 \text{ reell, } \geq 0),$$

<sup>\*\*) Zu gleicher Zeit hat Herr H. Cartan eine größere, demnächst erscheinende Arbeit fertiggestellt: „Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique“. Durch Austausch der Manuskripte habe ich erfahren, daß Herr Cartan mit allerdings ganz anderen Methoden § 2 und § 3 Satz 1 und 2 vorliegender Arbeit ebenfalls bewiesen hat.</sup>

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Abbildungen der Reinhardtschen Kreiskörper in sich.	
§ 1. Bezeichnungen und Abkürzungen . . . . .	246
§ 2. Die mittelpunktstreuen Abbildungen der Reinhardtschen Körper . . . . .	248
§ 3. Abbildungen, die einen Punkt der Ebene $z = 0$ in den Mittelpunkt $(0, 0)$ transformieren . . . . .	249
§ 4. Aufstellung aller Körper, in denen sich ein Punkt der Ebene $z = 0$ in $(0, 0)$ transformieren läßt . . . . .	251
§ 5. Beweis des Hauptsatzes, daß die in § 4 aufgestellten Körper, nämlich der Dizylinder $ z  < 1,  w  < 1$ und die Körper $ z ^2 +  w ^2 < 1$ die einzigen Körper sind, die nichtmittelpunktstreu Transformationen gestatten	254
II. Abbildungen der Reinhardtschen Körper untereinander . .	256
III. Folgerungen aus I. und II. sowie Bemerkungen zu einem Satz von H. Cartan . . . . .	257

## I. Abbildungen eines Reinhardtschen Kreiskörpers auf sich.

## § 1.

Definition. Unter einem *Reinhardtschen Kreiskörper* verstehen wir einen beschränkten, offenen, vierdimensionalen Bereich  $K$  mit einfach zusammenhängendem Rande, der durch die Transformationen

$$\begin{aligned} z' &= z e^{i\vartheta} \\ w' &= w e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (\vartheta, \varphi \text{ reell})$$

in sich transformiert wird. Der Mittelpunkt  $(0, 0)$  sei innerer Punkt<sup>4)</sup>. Der Rand eines solchen Körpers wird demnach von allen Ebenen  $w = \text{konst.}$  und  $z = \text{konst.}$  in Kreisen geschnitten.

Wir denken uns alle Reinhardtschen Körper so normiert, daß die beiden Symmetrieebenen  $z = 0$  und  $w = 0$  Kreise vom Radius 1 ausschneiden. Dies erreicht man durch einfache Streckungen:

$$\begin{aligned} z' &= r_1 z \\ w' &= r_2 w. \end{aligned}$$

<sup>4)</sup> Wir wählen stets den Nullpunkt als Mittelpunkt, was ja keine Einschränkung bedeutet.

Zu den obigen Körpern rechnet man meist auch die durch ganze lineare Transformationen aus ihnen entstehenden Bilder. Für alle diese Bereiche gilt natürlich gleichfalls das hier Bewiesene.

Wenn wir von einer Abbildung eines Bereiches auf sich sprechen, so verstehen wir darunter stets eine analytische Transformation:

$$z' = f_1(z, w)$$

$$w' = f_2(z, w)$$

( $f_1$  und  $f_2$  analytisch in  $z$  und  $w$ ), die das Innere des Bereiches eindeutig auf sich abbildet.

Um nun die Beweise wesentlich zu vereinfachen und übersichtlich gestalten zu können, wollen wir einige abkürzende Bezeichnungen einführen.

Einen Punkt, der bei einer Abbildung eines Reinhardtschen Körpers auf sich in den Mittelpunkt transformierbar ist, nenne ich einen „ausgezeichneten Punkt“.

Jede zweidimensionale analytische Fläche, die bei einer solchen Abbildung in die Ebene  $z = 0$  bzw.  $w = 0$  transformierbar ist, heiße eine „ausgezeichnete Fläche in bezug auf  $z = 0$ “ (bzw.  $w = 0$ ). Da die beiden Symmetrieebenen  $z = 0$  und  $w = 0$  für unsere Untersuchungen vollkommen gleichwertig sind, genügt es stets, eine Klasse der ausgezeichneten Flächen zu betrachten. Wenn wir daher von ausgezeichneten Flächen schlechthin reden, verstehen wir nur solche darunter, die auf  $z = 0$  abbildbar sind.

Bei einer Abbildung eines Körpers auf sich gehen ausgezeichnete Punkte stets nur in ausgezeichnete Punkte, ausgezeichnete Flächen wieder in solche über.

Wir bezeichnen mit  $T(\vartheta, \varphi)$  die Drehungsgruppe

$$\begin{aligned} z' &= z e^{i\vartheta} \\ w' &= w e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (\vartheta, \varphi \text{ reell}),$$

mit  $T^*(\vartheta, \varphi)$  die Gruppe

$$\begin{aligned} z' &= w e^{i\vartheta} \\ w' &= z e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (\vartheta, \varphi \text{ reell}),$$

mit  $T_s(\vartheta)$  die einparametrische Gruppe

$$\begin{aligned} z' &= z e^{i\vartheta} \\ w' &= w \end{aligned} \quad (\vartheta \text{ reell}),$$

mit  $T_w(\varphi)$

$$\begin{aligned} z' &= z \\ w' &= w e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (\varphi \text{ reell}).$$

Unter  $S$  bzw.  $S^*$  verstehen wir stets Transformationen:

$$\begin{aligned} S: \quad z' &= z e^{i\vartheta} f_{w_0}(w) \\ w' &= \frac{w - w_0}{\overline{w_0} w - 1} e^{i\varphi}, \end{aligned}$$

$$S_w^*: \quad \begin{aligned} z' &= \frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1} e^{i\vartheta} \\ w' &= z e^{i\vartheta} g_{w_0}(w), \end{aligned}$$

$$S_z^*: \quad \begin{aligned} z' &= w e^{i\vartheta} \psi_{z_0}(z) \\ w' &= \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1} e^{i\vartheta}. \end{aligned}$$

## § 2.

Schon Reinhardt hat gezeigt, daß — von der Hyperkugel abgesehen — die einzigen *mittelpunktstreuen* analytischen Abbildungen eines *konvexen* Reinhardtschen Körpers auf sich nur die Drehungen  $T(\vartheta, \varphi)$  sind, und dazu bei symmetrischen Bereichen noch  $T^*(\vartheta, \varphi)$ .<sup>\*)</sup>

Es sei nun  $K$  ein *nicht konvexer* Reinhardtscher Bereich,  $\tilde{K}$  der *kleinste ihn umfassende konvexe* konzentrische Kreisbereich.  $K$  kann außer  $T(\vartheta, \varphi)$  als mittelpunktstreu Transformationen in sich höchstens noch ganze lineare Transformationen zulassen<sup>\*)</sup>. Folglich geht durch eine solche Abbildung von  $K$  auf sich  $\tilde{K}$  wieder in einen konvexen,  $K$  umfassenden Kreisbereich  $\tilde{K}^*$  über, während  $\tilde{K}$  selbst Bild eines ebenfalls konvexen Kreisbereiches  $K^*$  wird. Da  $\tilde{K}$  der kleinste  $K$  umfassende konvexe Kreisbereich ist, gilt einerseits:  $\tilde{K} < \tilde{K}^*$ , somit  $K^* < \tilde{K}$ , anderseits:  $\tilde{K} < K^*$ . Daher ist  $\tilde{K} = K^* = \tilde{K}^*$ . Dies besagt, daß jede mittelpunktstreu Transformation von  $K$  in sich auch den konvexen Körper  $\tilde{K}$  auf sich abbildet (insbesondere ist also  $\tilde{K}$  ein Reinhardtscher Körper). Daraus folgt, daß auch ein nicht konvexer Reinhardtscher Körper als mittelpunktstreu Transformationen nur die Gruppe  $T(\vartheta, \varphi)$  bzw.  $T^*(\vartheta, \varphi)$  zuläßt.

Ebenso zeigt man, daß die einzigen möglichen mittelpunktstreuen Abbildungen zweier Reinhardtscher Körper aufeinander (von der Normierung zunächst abgesehen) nur die Streckungen sind:

$$\begin{aligned} z' &= r_1 z & \text{und} & & z' &= r_2 w \\ w' &= r_2 w & & & w' &= r_1 z, \end{aligned}$$

was ja Reinhardt für konvexe Körper schon bewiesen hatte<sup>\*)</sup>.

<sup>\*)</sup> K. Reinhardt, Über Abbildungen der analytischen Funktionen zweier Veränderlichen, Math. Annalen 83, S. 254—255, Theorem I und II.

<sup>\*)</sup> Vgl. H. Behnke, Die Abbildungen der Kreiskörper, Hamb. Abh. 7. Ein allgemeiner Kreiskörper ist ein vierdimensionaler Bereich, der durch alle Ebenen  $z = cw$  in konzentrischen Kreisscheiben geschnitten wird. Er läßt also die Transformationen zu:  $z' = z e^{i\vartheta}$ ,  $w' = w e^{i\vartheta}$  ( $\vartheta$  reell). Durch eine ganze lineare Transformation geht ein solcher Körper wieder in einen Kreiskörper über.



Also gilt jetzt allgemein:

**Satz.** Die einzigen möglichen mittelpunktstreuen Abbildungen eines beliebigen normierten Reinhardtschen Kreiskörpers (außer der Kugel) auf sich oder zweier Körper untereinander sind die Transformationen<sup>62)</sup>

$$\begin{aligned} z' &= z e^{i\phi} & \text{und} & & z' &= w e^{i\phi} \\ w' &= w e^{i\psi} & & & w' &= z e^{i\psi}. \end{aligned}$$

### § 3.

Zuerst werde der einfache, aber für das Folgende grundlegende Satz bewiesen:

**Satz 1.** Geht bei einer analytischen Abbildung eines Reinhardtschen Körpers  $K$  auf sich ein Punkt der Ebene  $z = 0$  in den Mittelpunkt  $(0, 0)$  über, so wird durch diese Transformation die Ebene  $z = 0$  entweder auf sich oder die Ebene  $w = 0$  abgebildet<sup>63)</sup>.

**Beweis.** Die volle einparametrische Drehungsgruppe  $T_s(\phi)$  läßt die ganze Ebene  $z = 0$  punktweise fest. Wird demnach bei einer analytischen Abbildung von  $K$  auf sich — sie sei mit  $A$  bezeichnet — ein Punkt  $P = (0, w_0)$  der Ebene  $z = 0$  in  $(0, 0)$  transformiert, so geht die Ebene  $z = 0$  in eine analytische Fläche durch  $(0, 0)$  über, die bei einer vollen einparametrischen Schar mittelpunktstreuer Transformationen von  $K$  in sich

$$A T_s(\phi) A^{-1} \text{ )}$$

punktweise festbleibt. Die einzigen Flächen dieser Art sind aber — abgesehen bei der Hyperkugel — die Ebenen  $z = 0$  und  $w = 0$  (nach § 2 sind nämlich  $T(\phi, \varphi)$  und  $T^*(\phi, \varphi)$  die einzigen mittelpunktstreuen Transformationen).

Zugleich können wir jetzt schließen:

**Satz 2.** Die Transformationen von  $K$  in sich, die einen Punkt  $P = (0, w_0)$  in  $(0, 0)$  überführen, sind Transformationen  $S$  bzw.  $S^*$  (falls nämlich  $z = 0$  auf  $w = 0$  abgebildet wird).

Nur  $T_s(\phi)$  bzw.  $T_w(\varphi)$  halten  $z = 0$  und  $w = 0$  punktweise fest. Daher gilt nach Satz 1:

$$A T_s(\phi) A^{-1} = T_s(\phi_1(\phi)) \quad \text{oder} \quad A T_s(\phi) A^{-1} = T_w(\varphi(\phi)).$$

Folglich ist  $A$  von der Form<sup>64)</sup>:

$$\begin{aligned} w' &= \varphi(w) & \text{bzw.} & & z' &= \varphi(w) \\ z' &= z f(w) & & & w' &= z f(w). \end{aligned}$$

<sup>62)</sup> Vgl. <sup>61)</sup>.

<sup>7)</sup> Unter  $A T_s(\phi) A^{-1}$  verstehen wir die Hintereinanderausführung der Transformationen in der Reihenfolge von rechts nach links.

<sup>64)</sup> Vgl. <sup>6)</sup>, S. 340–341.

Da die Ebenen  $z = 0$  und  $w = 0$   $K$  in Einheitskreisen schneiden, so folgt weiter

Hieraus ergibt sich nun sofort

**Satz 3.** Ist in einem Reinhardtischen Körper ein Punkt der Ebene  $z = 0$  ausgezeichnet<sup>9)</sup>, so sind es alle inneren Punkte auf  $z = 0$ . Geht bei der zugehörigen Transformation die Ebene  $z = 0$  in  $w = 0$  über, so sind alle Punkte der Ebene  $w = 0$  ausgezeichnet und  $K$  gestattet sowohl Transformationen  $S$  wie  $S_z^*$ .<sup>10)</sup>

**Beweis.** a) Es gehe  $z = 0$  in sich über. Mit  $P = (0, w_0)$  sind alle Punkte  $P = (0, w_0 e^{i\varphi})$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) ausgezeichnet. Die zu  $P$  gehörige Transformation  $S$  führt den Kreis  $w = w_0 e^{i\varphi}$ ,  $z = 0$  in einen zu  $(0, 0)$  exzentrischen Kreis derselben Ebene über, dessen sämtliche Punkte somit in  $(0, 0)$  transformierbar sind. Durch die Drehungen  $T_w(\varphi)$  erhält man hieraus eine volle Kreisscheibe, die den Kreis  $w = w_0 e^{i\varphi}$  umfaßt. Durch die wiederholte Anwendung der Transformationen  $S$  und  $T_w(\varphi)$  erhält man stets neue Kreisscheiben ausgezeichneter Punkte, die gegen keinen inneren Kreis  $|w| = \varrho < 1$  konvergieren können. Denn ist  $|w_0| = \varrho_0$ , so geht etwa durch die zu  $(0, \varrho_0)$  gehörige Transformation  $S_{\varrho_0}$

$$w' = \frac{w - \varrho_0}{\bar{\varrho}_0 w - 1}$$

$$z' = z f_{\varrho_0}(w)$$

$w = -\varrho$  in einen Punkt  $\varrho + s$  ( $s > 0$ ) über; denn

$$\frac{\varrho + \varrho_0}{\varrho_0 \varrho + 1} > \varrho \quad \text{falls } \varrho < 1.$$

b) Falls die Ebene  $z = 0$  auf  $w = 0$  abgebildet wird, schließt man ganz entsprechend, daß alle Punkte der Ebene  $z = 0$  und auch alle auf  $w = 0$  ausgezeichnet sind.  $K$  gestattet dann sowohl die Transformationen  $S_z^*$ :

$$z' = \frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1} e^{i\theta}$$

$$\text{für alle } |w_0| < 1,$$

$$w' = z e^{i\varphi} f_{w_0}(w)$$

wie  $S_z^*$ :

$$z' = w e^{i\theta} g_{z_0}(z)$$

$$\text{für alle } |z_0| < 1.$$

$$w' = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1} e^{i\varphi}$$

Aus  $S_z^* S_z^* = S$  folgt die Behauptung.

<sup>9)</sup> Es muß natürlich der Punkt von  $(0, 0)$  verschieden sein.

<sup>10)</sup> Es folgt weiterhin, daß in diesem Falle  $K$  symmetrisch ist.

Aus Satz 2 und 3 läßt sich jetzt leicht beweisen: (nach Definition)

Satz 4. Ist in einem Reinhardtschen Körper ein Punkt der Ebene  $z=0$  ausgezeichnet, aber außer  $(0,0)$  kein Punkt auf  $w=0$ , so sind nur die Punkte auf  $z=0$  ausgezeichnet.

Ist nämlich ein Punkt  $(0, w_0)$  ausgezeichnet, so existieren auf Grund von Satz 2 und 3 Transformationen des Körpers in sich:

$$\begin{aligned}w' &= \frac{w-c}{\bar{c}w-1} \\z' &= zf_+(w)\end{aligned}$$

(nach Definition), so trifft jede Ebene  $w = c$  den Rand nur in *einem* Kreise. Bezeichnet man also mit

$$(2) \quad |z| = R(|w|)$$

den Rand von  $K$ , so ist  $R(|w|)$  eine eindeutige stetige (reelle) Funktion von  $|w|$  (für alle Randpunkte  $P = (z, w)$  ist  $|w| \leq 1$ , da sonst durch eine der Transformationen (1) ein Randpunkt in einen unendlich fernen Punkt geworfen würde. Es ist also  $R(|w|)$  nur definiert für alle  $0 \leq |w| \leq 1$ ).

Durch die Transformationen (1) geht (2) über in:

$$|z'| = \frac{R\left(\left|\frac{w' - w_0}{\bar{w}_0 w' - 1}\right|\right)}{|f_{w_0}(w')|} \quad (\text{gilt für alle } |w'| < 1).$$

Da der Rand von  $K$  wieder in den Rand übergeht, gilt die Identität:

$$\frac{R\left(\left|\frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1}\right|\right)}{|f_{w_0}(w)|} \equiv R(|w|)$$

oder

$$\log |f_{w_0}(w)| = \log \frac{R\left(\left|\frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1}\right|\right)}{R(|w|)}.$$

$\log |f_{w_0}(w)|$  ist harmonisch in  $u$  und  $v$  ( $w = u + iv$ ). Daher gilt:

$$(3) \quad \Delta \left( \log R\left(\left|\frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1}\right|\right) \right) \equiv \Delta \log R(|w|).$$

Es ist

$$\Delta \log R(|w|) = \frac{\partial^2 \log R(|w|)}{\partial |w|^2} + \frac{1}{|w|} \frac{\partial \log R(|w|)}{\partial |w|} \equiv Q(|w|).^{12)}$$

Aus (3) folgt:

$$(4) \quad \left| \frac{1 - |w_0|^2}{(\bar{w}_0 w - 1)^2} \right|^2 Q\left(\left|\frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1}\right|\right) \equiv Q(|w|).$$

<sup>11)</sup> Da alle Punkte ( $|w| < 1$ ,  $|\bar{z}| < R(|w|)$ ) innere Punkte sind, ist die Transformation (1) für diese Punkte noch regulär und somit  $f(w)$  analytisch für alle  $|w| < 1$ .

<sup>12)</sup> Da  $R(|w|)$  unabhängig von  $\varphi = \arg w$  und  $|f(w)| = \frac{R\left(\left|\frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1}\right|\right)}{R(|w|)}$ , so muß  $\frac{\partial R\left(\left|\frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1}\right|\right)}{\partial \varphi}$  existieren für alle  $|w| < 1$ , d. h. insbesondere:  $R\left(\left|\frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1}\right|\right)$  besitzt in jedem Punkt  $\tilde{w}$  in Richtung der Tangente an den Kreis  $w = \tilde{w} e^{i\varphi}$  eine Ableitung. Durch geeignete Veränderung von  $w_0$  kann man diese Richtung in jede beliebige durch  $\tilde{w}$  überführen. Folglich ist  $R\left(\left|\frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1}\right|\right)$  und damit auch  $R(|w|)$  in jeder Richtung differenzierbar. Ganz entsprechend leitet man die Existenz der zweiten Ableitungen ab.

Nun die Lösungen dieser Funktionalgleichung!

a)  $Q(|w|) = 0$ , d. h.

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \log R(|w|)}{\partial |w|^2} + \frac{1}{|w|} \cdot \frac{\partial \log R(|w|)}{\partial |w|} = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung berechnet man leicht als

$$(6) \quad \log R(|w|) = c_0 \log(|w|) + c_1,$$

$$(7) \quad R(|w|) = |w|^{c_0} \cdot c_1.$$

Da der Nullpunkt innerer Punkt des Körpers ist, so ist die einzige normierte<sup>12)</sup> Lösung die Gleichung

$$|z| = R(|w|) = 1,$$

die nur von dem Rande des *Dizylinders* erfüllt wird.

b) Es seien  $Q_1(|w|)$  und  $Q_2(|w|)$  Lösungen von (4), die nicht identisch verschwinden. Dann gilt

$$\frac{Q_1\left(\left|\frac{w-w_0}{\bar{w}_0 w - 1}\right|\right)}{Q_2\left(\left|\frac{w-w_0}{\bar{w}_0 w - 1}\right|\right)} = \frac{Q_1(|w|)}{Q_2(|w|)} = Q^*(|w|) \quad \text{für alle } |w_0| < 1 \text{ und } |w| < 1,$$

woraus sich  $Q^*(|w|) = \text{konst.}$  ergibt.

Nun gestattet bekanntlich die Kugel  $|z| = R(|w|) = \sqrt{1 - |w|^2}$  gewisse Transformationen S:

$$z' = z e^{i\varphi} \frac{\sqrt{1 - |w_0|^2}}{\bar{w}_0 w - 1},$$

$$w' = \frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1} e^{i\varphi}.$$

Damit ist eine Lösung von (4) bekannt. Man findet

$$Q(|w|) = -\frac{4}{2(1 - |w|^2)^2}.$$

Also ist die allgemeine Lösung von (4)

$$(8) \quad Q(|w|) = -\frac{4}{\alpha} \cdot \frac{1}{(1 - |w|^2)^2} = \frac{\partial^2 \log R(|w|)}{\partial |w|^2} + \frac{1}{|w|} \frac{\partial \log R(|w|)}{\partial |w|}.$$

Ein partikuläres Integral hiervon ist

$$\log R(|w|) = \frac{1}{\alpha} \log(1 - |w|^2).$$

<sup>12)</sup> Normierung siehe § 1.

Die Gleichungen (6) sind die Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (5) und folglich die allgemeine Lösung von (8).

$$\log R(|w|) = \frac{1}{\alpha} \log(1 - |w|^2) + c_0 \log |w| + c_1, \quad (2)$$

$$R(|w|) = c_1 (1 - |w|^2)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |w|^{c_0}.$$

Die einzigen möglichen normierten Lösungen ( $R(0) = 1$ ) sind die Körper mit den Randgleichungen

$$(9) \quad |z| = R(|w|) = (1 - |w|^2)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (\alpha > 0),$$

also  $|z|^\alpha + |w|^\alpha = 1$

Soll der Körper zugleich nicht triviale Transformationen der Ebene  $w = 0$  in sich gestatten, so muß die Gleichung des Randes lauten:

$$|z|^2 + |w|^2 = 1.$$

Daraus folgt, daß neben dem Dizylinder die Hyperkugel der einzige Körper ist, der sowohl nicht triviale Transformationen der Ebene  $z = 0$  wie solche der Ebene  $w = 0$  in sich gestattet.

Ist  $\alpha \neq 2$ , so sind keine Punkte auf  $w = 0$  ausgezeichnet und somit nach Satz 4 überhaupt nur die Punkte auf  $z = 0$ . Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

#### § 5. Wir kommen nun zum Beweise des Hauptsatzes:

Satz 6. Unter allen Reinhardtschen Kreiskörpern sind der Dizylinder

$$|z| \leq 1, \quad |w| \leq 1$$

und die Körper

$$|z|^\alpha + |w|^\alpha \leq 1 \quad (\alpha > 0)$$

$$\text{bzw. } |z|^2 + |w|^2 \leq 1$$

die einzigen, die nicht mittelpunkstreue Transformationen in sich gestatten.

Welcher Art die möglichen Transformationen sind, sagt Satz 5 aus. Da nun, abgesehen von den vorgenannten Körpern, nach Satz 5 in keinem Reinhardtschen Körper ein Punkt der Ebene  $z = 0$  ausgezeichnet ist, genügt es offenbar zu beweisen:

Ist kein Punkt der Ebene  $z = 0$  eines Reinhardtschen Körpers ausgezeichnet, so sind höchstens die Punkte auf  $w = 0$  ausgezeichnet.

Zum Beweise benötigen wir drei Hilfssätze, die allgemeiner funktionentheoretischer Natur sind und insbesondere etwas aussagen über das Verhalten analytischer Funktionen in einem Dizylinder  $|z| < a$ ,  $|w| < b$ . Vor allem wichtig ist Hilfssatz 3.

**Hilfssatz 1<sup>14)</sup>.** Sind  $r_1$  und  $r_2$  assoziierte<sup>15)</sup> Konvergenzradien der Reihe

$$\mathfrak{P}(z, w) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} z^n w^m,$$

so ist die durch  $\mathfrak{P}(z, w)$  dargestellte analytische Funktion  $f(z, w)$  in mindestens einem Punkte  $(z, w)$  mit  $|z| = r_1$ ,  $|w| = r_2$  singular.

Daraus ergibt sich

**Hilfssatz 2.** Ist eine Funktion  $f(z, w)$  regulär in jedem Punkte eines abgeschlossenen stetigen dreidimensionalen Flächenstückes

$$(10) \quad \varphi(|z|, |w|) = 0,$$

das den Bedingungen genügt:

a)  $\varphi(|z|, |w|) = 0$  verläuft ganz in einem abgeschlossenen Dizylinder

$$(11) \quad D: \begin{cases} |z| \leq a \\ |w| \leq b, \end{cases}$$

b)  $\varphi(0, 0) = \varphi(a, b) = 0$ ,

so ist  $f(z, w)$  im ganzen Innern des Dizylinders  $D$  regulär.

Aus der Regularität auf (10) folgt nämlich die Regularität in sämtlichen inneren Punkten eines die Fläche einhüllenden Reinhardtischen Körpers. Die zu  $f(z, w)$  um  $(0, 0)$  gehörige Potenzreihe muß nach Hilfssatz 1 im ganzen Innern dieses Körpers absolut konvergieren. Aus der Konvergenz in einem Punkte  $(z_0, w_0)$  ergibt sich aber die absolute Konvergenz der Reihe und damit die Regularität von  $f(z, w)$  für alle  $(z, w)$  mit  $|z| < |z_0|$ ,  $|w| < |w_0|$ .

**Hilfssatz 3.** Es sei  $f(z, w)$  regulär im abgeschlossenen Dizylinder  $D$ :  $|z| \leq a$ ,  $|w| \leq b$ , und daher auf der Ebene  $z = 0$  und daher auf der Ebene  $w = 0$  regulär. Ist  $f(a e^{i\theta}, b e^{i\varphi}) \neq 0$  (für alle  $0 \leq \theta, \varphi < 2\pi$ ). Hat  $f(z, w)$  im Innern von  $D$  eine Nullstelle, so muß die analytische Fläche  $f(z, w) = 0$  alle den Bedingungen (11) genügenden Hyperflächenstücke schneiden.

<sup>14)</sup> Hilfssatz 1 ist der sogenannte Fundamentalsatz über assoziierte Konvergenzradien. (Siehe auch <sup>15)</sup>).

<sup>15)</sup> Bekanntlich sind die Gebiete der gleichmäßigen, absoluten Konvergenz einer Potenzreihe  $\mathfrak{P}(z, w) = \sum a_{n,m} z^n w^m$  Reinhardtische Kreiskörper. (Siehe die Arbeiten von Hartogs und Faber, Math. Annalen 62 und 61.) Ist  $r_1 = \varphi(r_2)$ , ( $r_1 = |z|$ ,  $r_2 = |w|$ ) der Rand eines solchen Konvergenzbereiches, so nennt man zwei zusammengehörige Werte der Randkurve  $r_2$  und  $r_1 = \varphi(r_2)$  assoziierte Konvergenzradien.  $\mathfrak{P}(z, w)$  konvergiert absolut für alle  $|z| < r_1$ ,  $|w| < r_2$ , divergiert absolut für alle  $|z| > r_1$ ,  $|w| > r_2$ .

<sup>16)</sup> Vgl. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie 2 (1924), S. 32, 1. Satz.



Das besagt,  $f(z, w) = 0$  hat mit allen diesen Flächenstücken ein ganzes eindimensionales Kurvenstück gemein.

Beweis. Angenommen,  $\varphi(|z|, |w|) = 0$  genüge den Bedingungen (11) und es sei  $f(z, w) \neq 0$  für alle  $(z, w)$  auf  $\varphi(|z|, |w|) = 0$ , dann ist

$$F(z, w) = \frac{1}{f(z, w)}$$

dort regulär und damit auch im ganzen (offenen) Dizylinder  $D$ , im Widerspruch zur Voraussetzung, daß  $f(z, w)$  im Innern von  $D$  eine Nullstelle und damit  $F(z, w)$  dort einen Pol hat.

Aus den vorangehenden Hilfssätzen ergibt sich nun leicht der Beweis des Hauptsatzes.

Angenommen  $P = (\alpha, \beta)$  mit  $\alpha, \beta \neq 0$  wäre ein ausgezeichnete Punkt.  $A$  sei eine Transformation des Reinhardtschen Körpers  $K$  in sich, die  $P$  in  $(0, 0)$  überführt; dann ist

$$A^{-1}T(\vartheta, \varphi)A$$

die zweiparametrische Schar von Transformationen von  $K$  in sich, die  $P$  als Fixpunkt haben. Die Bildpunkte von  $(0, 0)$  erfüllen dabei eine zweidimensionale Fläche  $R$ , die weder mit der Ebene  $z = 0$  noch  $w = 0$  einen Punkt außer  $(0, 0)$  gemeinsam hat (siehe Voraussetzung und Satz 4<sup>16a)</sup>). Durch die Drehungen  $T(\vartheta, \varphi)$  geht darauf  $R$  in eine aus lauter ausgezeichneten Punkten bestehende Punktmenge  $R_{\vartheta, \varphi}$  über, die in ihrem Innern mindestens ein den Bedingungen (11) genügendes Hyperflächenstück enthält. (Es kann  $R_{\vartheta, \varphi}$  auf ein solches Flächenstück zusammenschrumpfen.) Durch jeden Punkt dieses Flächenstückes geht eine ausgezeichnete Fläche. Nach Hilfssatz 3 müssen sämtliche ausgezeichneten Flächen, die nicht durch  $(0, 0)$  gehen, mit dem Hyperflächenstück ein ganzes Kurvenstück gemein haben. Dies widerspricht der Voraussetzung, daß auf der Ebene  $z = 0$  und daher auf jeder ausgezeichneten Fläche genau ein ausgezeichnete Punkt liegt (nämlich der Mittelpunkt  $(0, 0)$  bzw. sein Bildpunkt).

Hiermit ist Satz 6 bewiesen und damit sind die Untersuchungen über die Abbildungen eines Reinhardtschen Körpers in sich zum Abschluß gebracht.

## II. Abbildungen der Reinhardtschen Kreiskörper untereinander.

Hilfssatz 1. Zwei nicht identische, normierte Reinhardtsche Körper  $K$  und  $K^*$ , die weder Dizylinder, noch Kugel, noch einseitig kugelhafte sind, lassen sich höchstens durch die triviale Transformation

$$z' = we^{i\vartheta}$$

$$w' = ze^{i\varphi}$$

aufeinander abbilden.

<sup>16a)</sup> Man beachte, daß die Absolutbeträge der zu  $R$  gehörigen  $z$ - und  $w$ -Werte kontinuierlich zwischen zwei Grenzen ( $0 \leq |z| \leq d_1 > 0$ ;  $0 \leq |w| \leq d_2 > 0$ ) schwanken.

Daß  $K$  und  $K^*$  mittelpunktstreu sich nur so aufeinander abbilden lassen, ist in I, § 2 gezeigt.

Es sei nun  $A$  eine Transformation, die  $K$  so auf  $K^*$  abbildet, daß  $(0, 0)$  in einen von ihm verschiedenen Punkt  $P$  übergeht. Dann liefern die Transformationen

$$AT(\theta, \varphi)A^{-1}$$

Abbildungen von  $K^*$  auf sich, die notwendig den Mittelpunkt verschieben im Widerspruch zu Satz 6.

Entsprechend beweist man:

Hilfssatz 2. Bei der Abbildung zweier einseitig kugelhafter Körper aufeinander geht der Mittelpunkt  $(0, 0)$  in einen Punkt der Ebene  $z = 0$  (bzw.  $w = 0$ ) über.

Da bei diesen Körpern jeder innere Punkt der Ebene  $z = 0$  (bzw.  $w = 0$ ) in  $(0, 0)$  transformiert werden kann, gilt allgemein, wenn wir die Normierung aufgeben:

Satz 7. Zwei Reinhardtsche Kreiskörper lassen sich nur dann aufeinander abbilden, wenn sie auch schon durch die trivialen Transformationen:

$$\begin{array}{ll} z' = r_1 z & \text{oder} \quad z' = r_3 w \\ w' = r_2 w & w' = r_4 z \end{array}$$

auseinander hervorgehen.

### III. Folgerungen aus I. und II. sowie Bemerkungen zu einem Satz von H. Cartan.

Fassen wir die Ergebnisse von I. und II. zusammen:

1. Die einzigen möglichen, eindeutigen analytischen Abbildungen eines normierten Reinhardtschen Körpers auf sich, der weder Dizylinder, noch Kugel, noch einseitig kugelhaf ist, und je zweier solcher Körper aufeinander sind die Transformationen:

$$\begin{array}{ll} z' = ze^{i\theta} & \text{und} \quad z' = we^{i\phi} \\ w' = we^{i\varphi} & w' = ze^{i\psi} \end{array}$$

2. Die einzigen Abbildungen der einseitig kugelhafte Körper in sich und aufeinander sind:

$$(a) \quad \begin{cases} z' = ze^{i\theta} \left\{ \frac{1 - |w_0|^2}{(\bar{w}_0 w - 1)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ w' = \frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1} e^{i\varphi} \end{cases}$$

und

$$(b) \quad \begin{cases} z' = we^{i\theta} \\ w' = ze^{i\varphi} \end{cases}$$

und die Kombinationen aus (a) und (b). Es lassen sich von diesen nur die Körper

aufeinander abbilden.  $|z|^2 + |w|^2 < 1$  und  $|z|^2 + |w|^2 < 1$

3. Geben wir die Normierung der Körper auf, so kommen noch die Streckungen hinzu:

$$\begin{aligned} z' &= r_1 z & \text{und} & & z' &= r_2 w \\ w' &= r_1 w & & & w' &= r_2 z. \end{aligned}$$

Die Abbildungen der Hyperkugel und des Dizylinders hat ja schon Reinhardt angegeben<sup>17)</sup>.

Hiermit sind also sämtliche möglichen eindeutigen analytischen Abbildungen der Reinhardtschen Kreiskörper auf sich und untereinander bekannt.

Wir erkennen hier die schon anfangs charakterisierte eigenartige Bedeutung des Mittelpunktes eines Reinhardtschen Kreiskörpers. Die Eigenschaft, Mittelpunkt zu sein, ist eindeutig — von den Ausnahmekörpern abgesehen — einem einzigen Punkte des Bereiches zugeordnet und ist invariant gegenüber allen analytischen Transformationen. In den einseitig kugelhaften Körpern und ihren Bildern ist ganz entsprechend eine „Mittelfläche“ festgelegt, die gleichfalls invariant ist gegen sämtliche Abbildungen. Auch bemerken wir an diesen Bereichen eine merkwürdige Starrheit gegen die analytischen Abbildungen, da sie (außer den Ausnahmekörpern) nur die trivialen Transformationen zulassen, durch die sie definiert sind.

Nun hat H. Cartan kürzlich folgenden Satz aufgestellt:

„Gibt es in einem beschränkten Bereiche  $D$  einen Punkt  $P$ , der als Fixpunkt einer zweiparametrischen Schar von Transformationen des Körpers in sich auftritt, so ist  $D$  auf einen Reinhardtschen Kreiskörper abbildbar.“

Daraus ergibt sich die für die Abbildungstheorie im Raume zweier komplexer Veränderlichen wesentliche Tatsache:

Gibt es in einem Bereiche  $D$  eine zweiparametrische Schar von Transformationen in sich mit einem Fixpunkte  $P$ , so existieren keine weiteren Abbildungen von  $D$  auf sich, es sei denn, daß  $D$  auf einen Dizylinder oder einen der Körper  $|z|^2 + |w|^2 < 1$  abbildbar ist.

Den Satz von Cartan können wir jetzt auch so formulieren:

Existiert in einem beschränkten Gebiete  $D$  ein Punkt  $P$  als Fixpunkt einer zweiparametrischen Transformationsgruppe von  $D$  in sich, so sind nur drei Fälle möglich (die sich gegenseitig ausschließen):

<sup>17)</sup> Siehe <sup>2)</sup> Theorem III, S. 255.

1.  $P$  ist der einzig mögliche Fixpunkt.

2. Es gibt genau eine analytische Fläche (die „Mittelfläche“), die nur aus solchen Fixpunkten besteht. ( $D$  ist auf einen der Körper  $|z|^a + |w|^2 < 1$  abbildbar.)

3. Alle inneren Punkte von  $D$  treten als Fixpunkte auf. ( $D$  ist auf einen Dizylinder oder eine Hyperkugel abbildbar.)

Daraus ersieht man, wie wichtig die Kenntnis der Abbildungen eines beliebigen kreissymmetrischen Körpers (der Hartogsschen Körper<sup>18</sup>) und der allgemeinen Kreiskörper in sich sein wird. Wahrscheinlich werden auch bei diesen außer den ja bekannten mittelpunktstreuen Transformationen nur in ganz speziellen Fällen weitere auftreten.

<sup>18</sup> Über die Abbildung der Hartogsschen Bereiche siehe auch: H. Weiske, Münster, Über die analytischen Abbildungen von Kreiskörpern und Hartogsschen Bereichen, Math. Annalen 108.

(Eingegangen am 23. 6. 1930.)

## The algebra of many-valued quantities.

Von

Rosalind Cecily Young in Cambridge (England).

The following theory is one that I have recently adopted for the better treatment of theories involving limits<sup>1)</sup>, where it has grown increasingly inconvenient to have to consider separately the upper or lower or other individual values of a numerical limit which is not unique<sup>2)</sup>, for want

<sup>1)</sup> A preliminary treatment was embodied in my Dissertation for the Ph. D., Cambridge, "Foundations for the generalisation of the Theory of Stieltjes Integration etc. An  $n$ -dimensional treatment" (1929) and indicates the main features of the theory. Refinements introduced into the present exposition may be summarised as follows.

1. In the concept of *many-valuedness*, a symbol  $\alpha$  (now a *quantity*), instead of being identified with a *set* (of values), is now conceived as having *any one* of a given set of values *collectively considered*,—in contradistinction to the idea of a variable, which assumes *individually considered values* in a given range which is generally fixed.—The exact nature of the concept, as of any mathematical entity, is best understood from the uses to which the concept is put, and in this case these are quite different from manipulations of sets.

2. By the introduction of the quantity having no values,  $\delta$ , the new *nought* (without prejudice to the "zero" (0) of our ordinary numberscheme), several simplifications are rendered possible; and *inter alia*

3. the definition of a *link* of two quantities (having the values common to both) as precisely complementary to that of their *union* (which has all the values of either); and the purer conception of the process of *levelling* (suppressing all values numerically  $> K$ ).

4. The explicit definition of an *infinitesimal* also simplifies the exposition.

5. I absolutely exclude any reference to "infinite values", pending the precise definition and theory of such values, which will form the subject of a later paper. In accordance with this, the treatment of limits is that of *finite limits* throughout, i. e. concerns exclusively the finite values of limits, which may or may not constitute the *complete limits*. On this point, the present treatment is a good deal more precise than the original one.

<sup>2)</sup> The general idea of considering *all the limits*, and not merely upper and lower limits, seems to have been first utilized by W. H. Young in 1908: "Sulle due funzioni a più valori costituite dai limiti d'una funzione di variabile reale a destra ed a sinistra di ciascun punto", Rend. Acc. Lincei (5) 17, 582—87.

of accurate rules for their collective manipulation<sup>3)</sup>. Applications of the theory will be published elsewhere; the theory, however, seems to be of sufficient interest in itself. As an illustration of the efficiency of the new instrument, the rules given by Theorem V (p. 283), and more generally by Theorems VI and VII, should be compared, also for elegance and precision, with the current inequalities (which they of course include):

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} a_m + \lim_{m \rightarrow \infty} b_m &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} (a_m + b_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} a_m + \lim_{m \rightarrow \infty} b_m \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} (a_m + b_m) \\ &\leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} a_m + \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} b_m, \end{aligned}$$

and the corresponding ones for products.

### 1. Many-valuedness.

When a symbol  $a, b, x, f(x)$ , etc. represents *any one* of a given set of numbers, we say that it represents, or is, a (*finite*) quantity, and the given numbers are called its *values*.

In the particular case when there is only one number given, the quantity is said to be *one-valued* and is identified with the given number.

The necessary pendant of the notion of a quantity with more than one value is that of a quantity *without any values*; this then has to be classed with many-valued quantities in the same way as the null-set has to be classed with sets generally. We shall call it *nought*<sup>4)</sup> and denote it by

$$\delta.$$

A quantity with at least one value is therefore said to be *non-nought*.

A quantity with a bounded set of values only is said to be *strictly finite*. A quantity with positive values only is said to be *positive*, and if its values have a positive lower bound it is more specifically described as *strictly positive*. Similarly, a quantity with negative values only is said to be *negative*, and if its values have a negative upper bound, it is said to be *strictly negative*.

A quantity none of whose values is 0, is said to be *definite*. If it does not have values as near as we please to 0, it is said to be *strictly definite*.

If any of these properties belongs to a given one-valued quantity, it belongs to it of course strictly.

<sup>3)</sup> Such relations as appear in the paper of W. H. Young just quoted, e.g.

$$F_L(P) < n, \quad H_R(P) \leq n, \quad G_R(P) + k < F_L(P) < H_R(P) - k,$$

for his many-valued (right- and left-hand limiting) functions, tacitly assume some rudiments of an algebra of many-valued quantities, though the relations in this case being of so simple a nature, there was no inconvenience or ambiguity in introducing them.

<sup>4)</sup> The ordinary 0 is called *zero*.

## 2. Relations.

Two quantities  $a$  and  $b$  are said to be *equal*, and we write

$$a = b,$$

if the set of values of  $a$  and that of  $b$  are identical; i. e. if every value of  $a$  is a value of  $b$  and vice versa,

A quantity  $a$  is said to be *included in* another  $b$ , and  $b$  is said to *include*  $a$ , and we write

$$a < b \text{ or } b > a,$$

if every value of  $a$  is a value of  $b$  (but not necessarily the converse). In particular, for every quantity  $a$ ,

$$a < a.$$

For one-valued quantities, inclusion reduces of course to equality.

A quantity  $a$  is said to be *less than* another  $b$ , and  $b$  is said to be *greater than*  $a$ , and we write

$$a < b \text{ or } b > a,$$

if each value of  $a$  is less than one of  $b$  and each value of  $b$  is greater than one of  $a$ . (In particular neither  $a$  nor  $b$  may be  $\delta$ .)

The relation is said to be *strict* if it also holds between the upper bounds and between the lower bounds of the two sets of values; i. e. provided neither these upper bounds nor these lower bounds are equal.

A quantity  $a$  is said to be *superior to*  $b$ , and  $b$  is said to be *inferior to*  $a$ , and (for reasons which will at once appear) we write

$$a \leq b \text{ or } b \geq a,$$

whenever either some value of  $a$  is greater than each value of  $b$ , or some value of  $b$  is less than each value of  $a$ . (In particular, neither  $a$  nor  $b$  may be  $\delta$ .)

To express the fact that  $a$  is *not superior to*  $b$ , and  $b$  *not inferior to*  $a$ , we write therefore

$$a \leq b \text{ or } b \geq a.$$

This means then that either  $a$  or  $b$  is  $\delta$ , or each value of  $a$  is  $\leq$  some value of  $b$ , and each value of  $b$  is  $\geq$  some value of  $a$ .

Similarly,  $a$  is *not less than*  $b$ , and  $b$  *not greater than*  $a$ , and we therefore write

$$a \nless b \text{ or } b \ngtr a,$$

if either  $a$  or  $b$  is  $\delta$ , or some value of  $a$  is  $\geq$  all values of  $b$ , or some value of  $b$  is  $\leq$  all values of  $a$ .

For one-valued quantities, "less than" and "inferior to" are equivalent phrases.



If  $a$  is less than  $b$ , it is *a fortiori* not superior to  $b$ ; which is equivalent to saying that if  $a$  is superior to  $b$ , it is *a fortiori* not less than  $b$ ; symbolically:

$$a < b \text{ implies } a \leq b; \quad a \leq b \text{ implies } a \nless b.$$

Two *strictly finite* quantities cannot be both less than and greater than one another; i. e.

$$a < b \text{ implies } a \nless b.$$

But they may very well be both superior and inferior to one another; the necessary and sufficient condition for

$$a \leq b \text{ and } a \geq b$$

to hold simultaneously is indeed merely that either  $a$  has all its values less than one, and greater than another, value of  $b$ , or  $b$  has all its values less than one, and greater than another, value of  $a$ . In particular, we cannot then have  $a = b$ ; i. e. a many-valued quantity  $a$  cannot be superior or inferior to itself, so that we have always

$$a \leq a \text{ and } a \geq a.$$

A given quantity  $a$  may moreover be neither superior nor inferior to another given quantity  $b$ , i. e.

$$a \leq b \text{ and } a \geq b$$

may hold simultaneously without  $a$  and  $b$  being equal; a necessary and sufficient condition for this (if we omit the trivial case  $a = \delta$  or  $b = \delta$ ) is in fact that the set of values of  $a$  and the set of values of  $b$  should (without coinciding) have the same upper bound, included in both or in neither of the two sets, and the same lower bound, also included in both or in neither of the two sets.

If  $a$  is included in  $b$ , it cannot be *strictly* greater or less than  $b$ .

But it may still be either not superior or not inferior to  $b$ , or both; indeed a necessary and sufficient condition for

$$a < b \text{ and } a \leq b$$

to hold simultaneously is merely that the values of  $b$  are those of  $a$  together possibly with others not less than these; and that for

$$a < b \text{ and } a \geq b$$

to hold simultaneously is that the values of  $b$  are those of  $a$ , together possibly with others not greater than these.

Again, if  $a$  is included in  $b$ , it may also be either superior or inferior to  $b$ , or both; in fact, for

$$a < b \text{ and } a \nless b$$

to hold simultaneously, it is necessary and sufficient that, besides all the values of  $a$ , the quantity  $b$  should have at least one value less than all these; and for

$$a < b \quad \text{and} \quad a \geq b$$

to hold simultaneously, it is necessary and sufficient that, besides all the values of  $a$ , the quantity  $b$  should have at least one value greater than all these.

### 3. Associated quantities.

Associated with any non-nought quantity  $a$ , we define, as far as existent (finite)

a) the *upper value*

$$\bar{a}$$

or upper bound of all the values of  $a$ ;

the *lower value*

$$\underline{a}$$

or lower bound of all the values of  $a$ ;

the *breadth*

$$\beta_a = \bar{a} - \underline{a}$$

or span of the set of values of  $a$ ;

b) the *+ part*

$$a_+$$

or quantity equal to  $a$  when this is positive, and otherwise having as its values all the positive values of  $a$  and the value 0; (when  $a$  is one-valued  $a_+$  is thus the larger of  $a$  and 0);

the *- part*

$$a_-$$

equal to  $a$  when this is negative, and otherwise having all the negative values of  $a$  and the value 0; (if  $a$  is one-valued,  $a_-$  is thus the lesser of  $a$  and 0);

c) the *absolute magnitude*

$$|a|$$

or quantity having as its values the moduli of the values of  $a$ ;

d) the *opposite*

$$-a$$

whose values are numerically the same as those of  $a$ , but with the opposite signs;

e) the *inverse*

$$\frac{1}{a}$$

(defined only when  $a$  is *definite*) whose values are the inverse  $\frac{1}{a}$  of the values  $a$  of  $a$ ;

f) *limiting values*, or numerical limits of sequences of values of the quantity  $a$ ;

the (*finite*) *frame*

$$\boxed{a}$$

or quantity having as its values all the values and all the limiting values of  $a$ ; thus a one-valued quantity, and generally any quantity with only a finite number of values, is its own frame.

A quantity which is its own frame is said to be *closed (finitely)*. If it is also strictly finite, it is said more specifically to be *completely closed*. This means that it has a closed set of values.

A quantity which is its own opposite is said to be *symmetrical*. The only one-valued symmetrical quantity is 0.

A quantity which is its own inverse is said to be *reciprocal*. The only one-valued reciprocal quantity is 1.

The opposite of  $-a$  is clearly  $a$ ; so is the inverse of  $\frac{1}{a}$ .

Each of the other associated quantities of  $a$  is the associated quantity of same name of itself. E. g.

$$(\bar{a}) = \bar{a}; \quad (a_+)_+ = a_+; \quad |(|a|)| = |a|.$$

In particular, the frame of  $a$  is always closed (finitely).

As regards the associated quantities of different names of each associated quantity of  $a$ , we have the following relations, whose proof is immediate.

Upper and lower values.

$$(\bar{a})_+ = \overline{(a_+)}, \quad (\bar{a})_- = \overline{(a_-)}, \quad (\underline{a})_+ = \underline{(a_+)}, \quad (\underline{a})_- = \underline{(a_-)};$$

$$\overline{(-a)} = -(\underline{a}), \quad \underline{(-a)} = -(\bar{a}); \quad \boxed{\bar{a}} = \bar{a}, \quad \boxed{\underline{a}} = \underline{a};$$

$$|\bar{a}| = \text{larger of } \left\{ \begin{array}{l} |\bar{a}| \\ \text{and} \\ |\underline{a}| \end{array} \right\},$$

and hence also

$$\beta_{|a|} \leq \beta_a.$$

+ and - parts.

$$(-a)_+ = -(\underline{a_-}), \quad (-a)_- = -(\bar{a_+}); \quad \boxed{a}_+ = \boxed{a_+}, \quad \boxed{a}_- = \boxed{a_-}.$$

Absolute magnitude.

$$|-a| = |a|, \quad |\boxed{a}| = \boxed{|a|}.$$

Frame.

$$\boxed{-a} = -\boxed{a}.$$

Interpreting the relations between two quantities in terms of their associated quantities, we have

$$A. \quad a < b$$

is equivalent to

$$-a < -b,$$

and to

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

when both these inverses are defined.

It implies moreover

$$|a| < |b|, \quad a_+ < b_+, \quad a_- < b_-, \quad \boxed{a} < \boxed{b},$$

and

$$\bar{a} \leq \bar{b}, \quad \underline{a} \geq \underline{b}, \quad \beta_a \leq \beta_b.$$

B.

$$a < b$$

is equivalent to

$$-a > -b,$$

and to

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

when  $a, b$  are positive.

Moreover, if it holds *strictly*, it is equivalent to

$$\bar{a} < \bar{b}, \quad \underline{a} < \underline{b},$$

hence to

$$\boxed{a} < \boxed{b}.$$

C.

$$a \leq b$$

is equivalent to

$$-a \geq -b,$$

and to

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

when  $a, b$  are positive.

Also it implies

$$\bar{a} \leq \bar{b}, \quad \underline{a} \leq \underline{b}$$

and is equivalent to this pair of relations if  $b$  includes its upper and  $a$  its lower value.

It implies further

$$a_+ \leq b_+, \quad a_- \leq b_-,$$

and

$$\boxed{a} \leq \boxed{b}.$$

D. By taking complementaries of the above propositions, we obtain those relative to the other two types of relation.

We shall define all the associated quantities of *nought* as again *nought*. I. e.

$$\begin{aligned}\bar{\delta} = \delta = \beta_{\delta} = \delta; & \quad -\delta = \delta; & \quad \frac{1}{\delta} = \delta; \\ |\delta| = \delta; & \quad \boxed{\delta} = \delta; \\ \delta_+ = \delta; & \quad \delta_- = \delta.\end{aligned}$$

#### 4. Operations.

The *sum*

$$a + b$$

of two non-nought quantities  $a$  and  $b$  is defined as the non-nought quantity having all, and only, the values which are sums of a value of  $a$  and a value of  $b$ . The *sum*

$$a + b + c$$

of three non-nought quantities,  $a$ ,  $b$  and  $c$  is defined as the non-nought quantity having all, and only, the values which are sums of a value of  $a$ , one of  $b$  and one of  $c$ . And so for any number of quantities.

Similarly the *difference*

$$a - b$$

is defined as having all, and only, the values which are obtained by subtracting a value of  $b$  from a value of  $a$ , and is clearly the same as the sum of  $a$  and  $-b$ .

The *product*

$$a \cdot b$$

of two non-nought quantities  $a$  and  $b$  is similarly defined as having all, and only, the values which are products of a value of  $a$  by one of  $b$ . And correspondingly the product of any number of non-nought quantities is defined.

With the corresponding definition, the *ratio*

$$\frac{a}{b}$$

of  $a$  by  $b$ , defined only when  $b$  is definite, is seen to be the product of  $a$  and  $\frac{1}{b}$ .

The *associative* and *commutative laws* for addition, subtraction and multiplication in ordinary algebra obviously continue to hold, without any formal change; the *monotony laws*

$$"a < b \text{ implies } (a + c) < (b + c)"$$

and

$$"a < b \text{ implies } ac < bc \text{ when } c \text{ is positive"},$$

and the corresponding ones with  $\leq$  instead of  $<$ , are similarly unaltered. The new relation of inclusion furnishes us with a new type of law

$$"a < b \text{ implies } (a + c) < (b + c)"$$

and

$$"a < b \text{ implies } ac < bc",$$

called the *inclusion laws* for addition and multiplication.

Furthermore, we note that

if  $c$  is strictly finite,

$$c + d < c \text{ implies } d = 0;$$

if  $c$  is strictly finite and strictly positive or negative,

$$cd < c \text{ implies } d = 1.$$

For if

$$c + d < c,$$

and  $\gamma$  be any value of  $c$ ,  $\delta$  any value of  $d$ ,  $\gamma + \delta$  is also a value of  $c$ , and so are  $\gamma + 2\delta$ ,  $\gamma + 3\delta$ , and generally  $\gamma + N\delta$ , for every integer  $N$ : so that if  $c$  is strictly finite,  $\delta$  is necessarily 0.

Similarly if

$$cd < c,$$

and  $\gamma$  be any value of  $c$ ,  $\delta$  any value of  $d$ , then  $\gamma\delta$ ,  $\gamma\delta^2$  and generally  $\gamma\delta^N$ , are also values of  $c$ , for every integer  $N$ ; so that if  $c$  is strictly finite,  $|\delta|$  is necessarily  $\leq 1$ , and if  $c$  is strictly positive or strictly negative,  $|\delta|$  is necessarily  $\geq 1$ . Hence q. e. d.

It is essential also to note that although

$$a - a > 0$$

always,  $(a - a)$  is only  $= 0$  if  $a$  is one-valued. From this and the above, we conclude at once that

$$a + b < c \text{ implies } a < c - b,$$

but for strictly finite  $c$ , the converse requires  $b$  to be one-valued.

The remark that  $a - a = 0$  requires  $a$  to be one-valued is a particular case of the following:

*A sum of given quantities is one-valued (if and) only if each of the given quantities is one-valued.*

For if one of the quantities is not one-valued, and we choose any fixed value of each of the others, every value of the first quantity necessarily gives rise by addition with these to a different value of the sum.

Similarly,

*A product of given quantities is one-valued (if and) only if each of the given quantities is one-valued, unless indeed one of these quantities is the number 0, when the product is also 0.*

For if one of the quantities is not one-valued, and none of the others is the number 0, we can choose a non-nul value of each of these, which when multiplied together with different values of the first quantity, necessarily gives rise to different values of the product.

The distributive law for addition and multiplication takes the form

$$(a + b)c < ac + bc,$$

hence more generally

$$(a + b)(c + d) < ac + bc + ad + bd.$$

If  $c$  is one-valued, or if  $a$  or  $b$  is 0, the former relation of inclusion obviously reduces to an equality. In other cases it may or may not reduce to equality. Thus if  $c$  has the two values 0 and 1, those of  $(a + b)c$  are the values of  $(a + b)$  and the value 0, while those of  $(ac + bc)$  are those of  $a$ , of  $b$ , of  $(a + b)$ , and 0; but in this case we have certainly

$$(a + b)c = ac + bc$$

if both  $a$  and  $b$  include the value 0; since

$$a < a + b$$

if  $b$  includes the value 0, and

$$b < a + b$$

if  $a$  includes the value 0.

Note. As a particular corollary of this proposition, we note that for every  $a$ :

$$a_+ + a_- > a; \quad a_+ - a_- > |a|.$$

These relations are obvious, and reduce indeed to equalities, if  $a$  is positive or negative. In every other case, both  $a_+$  and  $a_-$  include the value 0, and hence are included in their sum; and both  $a_+$  and  $-a_-$  are included in theirs. Since every value of  $a$  is one of  $a_+$  or of  $a_-$ , and every value of  $|a|$  is one of  $a_+$  or of  $-a_-$ , the truth of the two relations follows.

For the associated quantities of sums and products we have the following rules:

Upper and lower values<sup>5)</sup>:

$$\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}, \quad \underline{a + b} = \underline{a} + \underline{b};$$

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}, \quad \underline{a \cdot b} = \underline{a} \cdot \underline{b} \quad \text{if } a, b \text{ are positive}$$

and generally

$$\left. \begin{array}{l} \overline{a \cdot b} = \text{largest} \\ \underline{a \cdot b} = \text{least} \end{array} \right\} \text{ of } \overline{a} \cdot \overline{b}, \overline{a} \cdot \underline{b}, \underline{a} \cdot \overline{b}, \underline{a} \cdot \underline{b}.$$

<sup>5)</sup> Subject to existence (finite).



As particular useful deductions, we note

$$\overline{a-a} = \beta_a, \quad \underline{a-a} = -\beta_a;$$

$$\beta_{a+b} = \beta_a + \beta_b;$$

$$\beta_{(ab)} \geq \beta_{(|a| \cdot |b|)} \geq |a| \cdot \beta_b.$$

Absolute magnitude.

$$|a+b| \leq |a| + |b|; \quad |a-b| \geq ||a| - |b||; \quad |ab| = |a| \cdot |b|.$$

There are formally precisely the same rules as for one-valued quantities and follow from these.

+ and - parts.

$$(a+b)_+ \leq a_+ + b_+;$$

$$(a+b)_- \geq a_- + b_-;$$

(equality occurs when  $a$  and  $b$  are both positive, or both negative).

The second relation obviously reduces to the first when we substitute  $-a$  for  $a$  and  $-b$  for  $b$  in it.

To prove the first, we note that a value of

$$(a+b)_+$$

is either 1. the sum of a positive value of  $a$  and a positive value of  $b$ , i. e. a value of  $(a_+ + b_+)$ ; or 2. it is the sum of a positive value of  $a$  and a non-positive one of  $b$ , i. e. is  $\leq$  a value of  $a_+$ ; or 3. the sum of a non-positive value of  $a$  and a positive one of  $b$ , i. e. is  $\leq$  a value of  $b_+$ ; or 4. it is 0 with  $(a_+ + b_+) > 0$ . In each of these cases it is a fortiori  $\leq$  a value of  $(a_+ + b_+)$ . Thus each value of the left-hand side is actually  $\leq$  some value of the right-hand side.

Conversely, a value of

$$a_+ + b_+$$

is either 1. the sum of a positive value of  $a$  and a positive value of  $b$ , hence a positive value of  $(a+b)_+$ ; or 2. it is a positive value of  $a$ , and  $b$  includes some value  $\leq 0$ , hence  $(a+b)$ , and so  $(a+b)_+$ , include some value  $\leq$  that positive value of  $a$ ; or 3. it is a positive value of  $b$ , and  $(a+b)_+$  includes similarly some value  $\leq$  it; or 4. it is 0, and both  $a$  and  $b$  include non-positive values, hence also  $(a+b)_+ > 0$ . In each of these cases, some value of  $(a+b)_+$  is  $\leq$  the assumed value of  $a_+ + b_+$ . And each value of the right-hand side is thus also some value of the left. Q. e. d.

Frame.

$$\boxed{a+b} = \boxed{a} + \boxed{b};$$

$$\boxed{ab} = \boxed{a} \cdot \boxed{b}.$$

The definitions are extended to  $\delta$  by writing

$$a + \delta = a - \delta = a; \quad a \cdot \delta = \frac{a}{\delta} = a;$$

and generally following the principle that in all calculations with sums, differences, products and ratios,  $\delta$  has no effect, and may be removed, introduced and transferred at will.

### 5. New operations.

We define the *union*

$$a \vee b$$

of two quantities  $a$  and  $b$  as the quantity having all, and only, the values of  $a$  and the values of  $b$ .

We define the *link*

$$a \oslash b$$

of two quantities  $a$  and  $b$  as the quantity having all, and only, the values common to both  $a$  and  $b$ . If such values do not exist, the link of  $a$  and  $b$  is nought.

The definitions are extended to nought by

$$(a \vee \delta) = a,$$

$$a \oslash \delta = \delta,$$

We have

$$(a \vee a) = (a \oslash a) = a;$$

$$(a \oslash b) < a < (a \vee b).$$

The definitions are immediately extended to more than two quantities  $a$  and  $b$ , so that we may speak of the *union* and the *link* of any number of many-valued quantities.

The new operations are obviously *commutative* and *associative* in the ordinary sense. Moreover their combination with one another is *distributive* in the ordinary sense, i. e.

$$(a \vee b) \oslash c = (a \oslash c) \vee (b \oslash c).$$

As regards their combination with former operations, we have

$$(a \vee b) + c = (a + c) \vee (b + c),$$

$$(a \vee b) \cdot c = (ac) \vee (bc);$$

$$(a \oslash b) + c < (a + c) \oslash (b + c),$$

$$(a \oslash b) \cdot c < (ac) \oslash (bc);$$

$$(a + b) \vee (c + d) < (a \vee c) + (b \vee d),$$

$$(ab) \vee (cd) < (a \vee c) \cdot (b \vee d);$$

$$(a + b) \oslash (c + d) > (a \oslash c) + (b \oslash d).$$

$$(ab) \oslash (cd) > (a \oslash c) \cdot (b \oslash d).$$

We have also obviously the *inclusion laws*<sup>a)</sup>: if  $a < b$ , then, for every  $c$ ,

$$(a \cup c) < (b \cup c), \quad (a \cap c) < (b \cap c).$$

As regards the associated quantities of links and unions, we have the rules:

Upper and lower values.

$$\overline{a \cup b} = \text{larger of } \left\{ \begin{array}{c} \bar{a} \\ \text{and} \\ \bar{b} \end{array} \right\} \geq \bar{a} \cup \bar{b},$$

$$\underline{a \cup b} = \text{lesser of } \left\{ \begin{array}{c} \underline{a} \\ \text{and} \\ \underline{b} \end{array} \right\} \leq \underline{a} \cup \underline{b};$$

$$\overline{a \cap b} \leq \bar{a} \cup \bar{b},$$

$$\underline{a \cap b} \geq \underline{a} \cup \underline{b}.$$

Absolute magnitude.

$$|a \cup b| = |a| \cup |b|,$$

$$|a \cap b| < |a| \cap |b|.$$

Opposite.

$$-(a \cup b) = (-a) \cup (-b), \quad -(a \cap b) = (-a) \cap (-b).$$

Inverse.

$$\frac{1}{a \cup b} = \frac{1}{a} \cup \frac{1}{b}; \quad \frac{1}{a \cap b} = \frac{1}{a} \cap \frac{1}{b}.$$

+ and - parts.

$$(a \cup b)_+ = a_+ \cup b_+; \quad (a \cup b)_- = a_- \cup b_-.$$

Frame.

$$\boxed{a \cup b} = \boxed{a} \cup \boxed{b}; \quad \boxed{a \cap b} < \boxed{a} \cap \boxed{b}.$$

## 6. Special many-valued quantities.

The *symmetrical sub-unit*

$$\theta$$

of many-valued quantities is the quantity having all, and only, the values between  $-1$  and  $1$  both inclusive.

We have clearly

$$\theta = -\theta \quad (\text{symmetry}),$$

$$\theta \cdot \theta = \theta$$

and

$$\theta + \theta = 2\theta.$$

<sup>a)</sup> As regards the *monotony law*, this only holds for a union, in the form: if  $a \leq b$ , then, for every  $c$ ,

$$(a \cup c) \leq (b \cup c).$$

If  $\delta$  is any number, the product

$$\delta\theta$$

has all, and only, the values between  $\pm\delta$  inclusive, thus representing in fact the closed interval of endpoints  $-\delta, \delta$  on the number-axis.

For any many-valued  $a$ , the sum

$$a + \delta\theta$$

has all, and only, the values each of which differs from some value of  $a$  by not more than  $|\delta|$ . It includes in particular all the values and all the limiting values of  $a$  (the latter provided  $\delta$  is not 0); i. e. *for every positive number  $\delta$ ,*

$$a + \delta\theta > \boxed{a}.$$

Moreover, we have

$$a + \delta\theta < \boxed{a} + \delta\theta.$$

An *infinitesimal*

$$\varepsilon$$

is any positive many-valued quantity whose lower value is 0. The letter

$$\varepsilon$$

will represent *any* value of such an infinitesimal, and is thus, in the usual language of analysis, an "*arbitrarily small number*". Thus also the expression

$$\varepsilon\theta$$

represents an "arbitrarily small" interval of centre 0, and

$$a + \varepsilon\theta$$

an "arbitrarily close neighbourhood" of the set of values of  $a$ .

Accordingly we see at once that

$$c < \boxed{a}$$

*if, and only if,*

$$c < a + \varepsilon\theta$$

(*for every value  $\varepsilon$  of an infinitesimal*).

For any given  $a$ , if  $K$  be a sufficiently large positive number, the link

$$a \mathbin{\mathcal{Q}} K\theta$$

of  $a$  and  $K\theta$  certainly has a value. We denote it also by

$$\boxed{a}_K.$$

The process itself, namely of forming the link of a given many-valued quantity and of the special  $K\theta$ , will be described as *levelling* the given quantity.

By the distributive law for links of sums,

$$\overline{a}_K + \overline{b}_K < \overline{(a+b)}_{2K}.$$

A kind of converse is provided by the following useful property:

*If a horizontal or vertical pair<sup>7)</sup> of the four relations*

$$\begin{aligned} a < K, & \quad b < K, \\ -a < K, & \quad -b < K, \end{aligned}$$

*is known to hold, then*

$$\overline{(a+b)}_K < \overline{a}_{2K} + \overline{b}_{2K}.$$

By interchanging  $a$  and  $-b$ , we can always reduce any of the supposed pairs to include

$$a < K.$$

As the required relation is then transformed into itself (by taking opposites), it suffices to consider this case. It then stands in conjunction with either

$$-a < K \quad \text{or} \quad b < K.$$

Now every value  $\beta$  of  $b$  which, with some value  $\alpha$  of  $a$ , gives a sum included in  $K\theta$ , so that in particular

$$\alpha + \beta \geq -K,$$

must satisfy

$$\beta \geq -2K,$$

since by hypothesis  $\alpha$  is  $< K$ .

If  $-a < K$ , we have similarly (or by writing  $-a$  for  $a$ ,  $-b$  for  $b$ )

$$\beta \leq 2K.$$

Hence both in this case and in the case  $b < K$ , we have necessarily

$$\beta < 2K\theta.$$

In the former case, as we have already

$$a < K\theta < 2K\theta,$$

this proves the required relation. In the latter case, in which the hypotheses are symmetrical in  $a$  and  $b$ , we see by interchanging  $a$  and  $b$  that

<sup>7)</sup> I. e. either  $a$  and  $b$  are both  $< K$  or are  $< -K$ , or one of them at least between  $\pm K$ .

also every value  $\alpha$  of  $a$  which, with some value  $\beta$  of  $b$ , gives a sum included in  $K\theta$ , must necessarily satisfy

$$\alpha < 2K\theta,$$

and the required relation is again established. This completes the proof.

By the distributive law for links of products,

$$\boxed{a} \cdot \boxed{b} < \boxed{a \cdot b}.$$

A kind of converse is again provided by the proposition:

*If a vertical or horizontal pair of the relations*

$$a < K\theta, \quad b < K\theta,$$

$$\frac{1}{a} < K\theta, \quad \frac{1}{b} < K\theta,$$

*is known to hold, then*

$$\boxed{a \cdot b} < \boxed{a} \cdot \boxed{b}.$$

The proof runs exactly parallel to the preceding one. Since interchanging  $a$  and  $\frac{1}{b}$ , and taking inverses, simply transforms the required relation into itself, we may suppose

$$\frac{1}{a} < K\theta$$

to be one of the assumed relations. In that case, every value  $\beta$  of  $b$  for which, with some value  $\alpha$  of  $a$ ,

$$\alpha \cdot \beta < K\theta$$

must satisfy

$$\beta < K^2\theta.$$

And either directly, if  $a < K\theta$  is the other assumed relation, or by interchanging  $a$  and  $b$  if  $\frac{1}{b} < K\theta$  is the other assumed relation, we must also have

$$\alpha < K^2\theta.$$

Hence q. e. d.

## 7. Limits.

Our mode of extending to "many-valued" quantities the operations of ordinary algebra applies, *mutatis mutandis*, to the process of *passage to the limit*.

### A. Successions.

A succession

$$a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$$

of quantities is said to have as its *finite limit*, denoted by

$$\left( \lim_{m \rightarrow \infty} \right) a_m,$$

the quantity  $a$  having all, and only, the values which are finite numerical (upper, lower or intermediary) limits, in the ordinary sense, of successions whose  $m^{\text{th}}$  term is a value of  $a_m$ . This definition is quite unambiguous and always yields a quantity  $a$ , which may, however, in particular cases, reduce to  $\delta$ .

If every succession whose  $m^{\text{th}}$  term is a value of  $a_m$  is bounded (i. e. no such succession has an infinite upper or lower limit in the ordinary sense), the finite limit of the succession

$$a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$$

is called its *complete limit*, and is denoted by

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m.$$

*A complete limit cannot be nought, and is always strictly finite.*

**Theorem I.** *A value  $a$  belongs to*

$$\left( \lim_{a \rightarrow \infty} \right) a_m$$

*if, and only if, it belongs to*

$$a_m + \theta \varepsilon$$

*for a sequence of indices*

$$m = m_i(\alpha, \varepsilon).$$

This follows at once from the definition of a numerical limit in the ordinary sense. It may also be taken as the definition of the finite limit, and then includes as a particular case that of a unique numerical limit in the ordinary sense.

**Theorem II.** *If  $a$  is the complete limit of a succession of quantities  $a_m$ , then*

$$a_m < a + \theta \varepsilon \quad \text{for all } m > N_\varepsilon.$$

For a value  $a_m$  of  $a_m$  not included in  $a + \theta \varepsilon$  is one differing by more than  $\varepsilon$  from every value of  $a$ . If such a value exists for a sequence of indices  $m_i$ , each numerical limit of the succession  $\{a_{m_i}\}$  differs from every value of  $a$  (by not less than  $\varepsilon$ ), whereas since  $a$  is the complete limit of  $a_m$ , it must exist (finite) and belong to  $a$  by definition.

From Theorem I, we may at once deduce that

*The finite limit of a succession of quantities is always closed finitely. A complete limit is therefore completely closed.*

Let  $a$  be the finite limit of a succession

$$a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$$



and let  $\alpha$  be any limiting value of  $a$ . The statement is that  $\alpha$  is a value of  $a$ .

By its definition as a limiting value of  $a$ , the number  $\alpha$  belongs to

$$\left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) \alpha_m$$

where the numbers  $\alpha_m$  are values of  $a$ . Hence by Theorem I,

$$\alpha < \alpha_k + \theta\epsilon/2$$

for a sequence of indices

$$k = k_i(\alpha, \epsilon).$$

Also, as values of  $\left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) \alpha_m$ , the numbers  $\alpha_k$ , again by Theorem I, belong to

$$\alpha_m + \theta\epsilon/2$$

each for a sequence of indices

$$m = m_j(\alpha_k, \epsilon).$$

Hence, for this sequence of indices  $m$ ,

$$\alpha_k + \theta\epsilon/2 < \alpha_m + \theta\epsilon.$$

It follows that

$$\alpha < \alpha_m + \theta\epsilon$$

for the double sequence of indices  $m = m_{ij}(\alpha, \epsilon) = m_j(\alpha_{k_i(\alpha, \epsilon)}, \epsilon)$ , and a fortiori the condition of Theorem I is fulfilled for  $\alpha$ . Hence q. e. d.

The following properties are immediate:

$$\text{If } a_1 = a_2 = \dots = a_m = \dots = a, \quad \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_m = \boxed{a}.$$

$$\text{If } a_m \leq b_m \quad \text{for each } m, \quad \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_m \leq \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) b_m.$$

$$\text{If } a_m > b_m \quad \text{for each } m, \quad \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_m > \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) b_m.$$

Also

$$\left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_{m+p} = \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_m.$$

As a particular case of the third property, obtained from it by taking  $b = \delta$  for all indices except  $m_1, m_2, \dots$ , we may state:

*For every sequence of indices  $m_i$ ,*

$$\left(\lim_{i \rightarrow \infty}\right) a_{m_i} < \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_m.$$

As a consequence of the fourth of the above properties, we may also speak of the finite limit of a succession whose first  $p$  terms are not all properly defined, writing

$$\left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_m = \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_{m+p}$$

then as the *definition* of the left-hand side. This is convenient e. g. when taking inverses (see below).

The upper and lower values of  $(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m$ , when defined (finite) will be denoted for simplicity by

$$\overline{(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m}, \quad \underline{(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m}$$

and called the *upper and lower finite limits* of  $a_m$  ( $m \rightarrow \infty$ ). If the limit is complete, both are of course defined, and we then denote them by

$$\overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} a_m, \quad \underline{\lim_{m \rightarrow \infty}} a_m,$$

and call them the *upper and lower limits*. We have obviously, in the latter case,

$$\overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} a_m = \overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} \bar{a}_m, \quad \underline{\lim_{m \rightarrow \infty}} a_m = \underline{\lim_{m \rightarrow \infty}} \underline{a}_m,$$

and in general *one or other of*

$$\overline{(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m} = \overline{(\lim_{m \rightarrow \infty}) \bar{a}_m}, \quad \underline{(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m} = \underline{(\lim_{m \rightarrow \infty}) \underline{a}_m}$$

holds provided only the right-hand side of it is defined. It is at once obvious that if (and only if) both right-hand sides are defined, the limit is complete.

Again, we have

$$|(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m| = (\lim_{m \rightarrow \infty}) |a_m|; \quad -(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m = (\lim_{m \rightarrow \infty}) (-a_m).$$

And

$$((\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m)_+ = (\lim_{m \rightarrow \infty}) (a_m)_+; \quad ((\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m)_- = (\lim_{m \rightarrow \infty}) (a_m)_-.$$

To see this, we have only to remark firstly that  $\alpha$  is a positive value of  $(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m$  if, and only if, it is a limit of a succession of positive values  $\alpha_{m_i}$  of  $a_{m_i}$ ; so that the positive values of

$$((\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m)_+ \quad \text{and} \quad (\lim_{m \rightarrow \infty}) (a_m)_+$$

are certainly the same; next as regards the value 0,

I) if a value of  $(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m$  as a limit of positive values  $\alpha_{m_i}$ , it again belongs to both;

II) if a value of  $(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m$  as a limit of negative values  $\alpha_{m_i}$ , it belongs to  $(a_{m_i})_+$  and hence to  $(\lim_{m \rightarrow \infty}) (a_m)_+$ , while it also belongs to  $((\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m)_-$ ;

III) if a value of  $((\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m)_-$  but not of  $(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m$ , then the latter has negative values, and hence so has  $a_m$  for a sequence of indices  $m_i$ , so that again  $(a_{m_i})_+$  includes 0, and so does  $(\lim_{m \rightarrow \infty}) (a_m)_+$ .

This completes the proof of the first equality; the second follows by writing  $-a$  for  $a$ , by the relation for opposites just before.

We have also, as an immediate deduction from Theorem I,

$$\left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_m = \boxed{\left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_m} = \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) \boxed{a_m},$$

since  $\boxed{a_m} < a_m + \theta\epsilon < \boxed{a_m} + \theta\epsilon$ .

Finally,

$$\frac{1}{\left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_m} = \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) \frac{1}{a_m}$$

provided only the left-hand side is defined.

### B. Double successions.

A double succession

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, \dots \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}, \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{km}, \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array}$$

of quantities is said to have as its *finite double limit*

$$\left(\lim_{(k,m) \rightarrow \infty}\right) a_{k,m},$$

the quantity  $a$  having all, and only, the values which are finite numerical (upper, lower, or intermediary) *double limits* in the ordinary sense, of double successions having as term of index  $(k,m)$  a value of  $a_{k,m}$ . When all such double successions are bounded, the finite double limit is also called the *complete double limit*, and denoted by

$$\lim_{(k,m) \rightarrow \infty} a_{k,m}.$$

If, in this definition, we take only one type of *repeated* (and not all the double) numerical limits, we obtain a quantity included in the finite double limit which we call a *finite repeated limit* of the double succession. The twin type of repeated numerical limits then give another finite repeated limit of the double succession. It is at once clear that the two repeated limits may be obtained as

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty}\right) \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_{k,m} \quad \text{and} \quad \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) \left(\lim_{k \rightarrow \infty}\right) a_{k,m}$$

respectively, and we denote them by

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty}\right) a_{k,m}, \quad \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty}\right) a_{k,m}$$

respectively; omitting the brackets when the limits are complete.

We have, as remarked,

$$\left( \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \right) a_{k,m} \supset \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \right) a_{k,m} < \left( \lim_{(k,m) \rightarrow \infty} \right) a_{k,m}.$$

We have the analogues of Theorems I and II:

Theorem III. *A value  $a$  belongs to*

$$\left( \lim_{(m,n) \rightarrow \infty} \right) a_{m,n}$$

*if, and only if, it belongs to*

$$a_{m,n} + \theta \varepsilon$$

*for a sequence of indices*

$$m = m_i(\alpha, \varepsilon), \quad n = n_i(\alpha, \varepsilon)$$

*(both tending of course to  $\infty$  with  $i$ ).*

Theorem IV. *If  $a$  is the complete double limit of a double succession of quantities  $a_{m,n}$ , then*

$$a_{m,n} < a + \theta \varepsilon \quad \text{for all } m > N_\varepsilon \text{ and all } n > N_\varepsilon.$$

All the other properties of the finite limit of a succession hold in the exactly parallel form for finite double limits of double successions, and we use the corresponding notation

$$\overline{\left( \lim_{(m,n) \rightarrow \infty} \right) a_{m,n}} \quad \text{and} \quad \underline{\left( \lim_{(m,n) \rightarrow \infty} \right) a_{m,n}}$$

to denote the upper and lower values of the finite double limit, or *upper and lower finite double limits*, when existent (finite), omitting the brackets when dealing with a *complete* limit.

### C. Nple successions.

In like manner, we define and discuss the *finite Nple limit* of an Nple succession of quantities

$$a_{(m)}$$

where  $(m)$  stands for  $N$  indices  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , each of which assumes all integral values. We denote the finite Nple limit by

$$\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)}$$

omitting the brackets when the limit is *complete*; call its upper and lower values, as far as defined, the *upper and lower finite Nple limits* and denote them by

$$\overline{\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)}}, \quad \underline{\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)}};$$

and have all the parallel properties holding indiscriminately. We have

also the various *repeated limits*, all included in the double one,

$$\left( \lim_{m'_1 \rightarrow \infty} \lim_{m'_2 \rightarrow \infty} \dots \lim_{m'_N \rightarrow \infty} \right) a_{(m)},$$

where  $m'_1, m'_2, \dots, m'_N$  is any permutation of the indices  $(m_1, m_2, \dots, m_N) = (m)$ .

And we have *partially repeated limits*

$$\left( \lim_{(m)_1 \rightarrow \infty} \lim_{(m)_2 \rightarrow \infty} \dots \lim_{(m)_k \rightarrow \infty} \right) a_{(m)},$$

where  $(m)_1, (m)_2, \dots, (m)_k$  represent mutually exclusive groups of the indices  $(m)$ , together comprising all the indices  $(m)$ .

### 8. Distributive laws for limits.

Denoting as agreed by

$$((m), (n))$$

the aggregate of all indices

$$m_1, m_2, \dots, m_M, n_1, n_2, \dots, n_N,$$

of

$$(m) = (m_1, m_2, \dots, m_M)$$

and

$$(n) = (n_1, n_2, \dots, n_N),$$

we have obviously (provided, in the first two relations, neither of the finite limits on the left hand side is  $\delta$ ; but without restriction in the last):

$$(X) \quad \begin{cases} \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} a_{(m)} + \lim_{(n) \rightarrow \infty} b_{(n)} \right) = \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) (a_{(m)} + b_{(n)}), \\ \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} a_{(m)} \cdot \lim_{(n) \rightarrow \infty} b_{(n)} \right) = \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) (a_{(m)} \cdot b_{(n)}), \\ \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} a_{(m)} \vee \lim_{(n) \rightarrow \infty} b_{(n)} \right) = \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) (a_{(m)} \vee b_{(n)}). \end{cases}$$

These relations follow at once from the fact that a finite limit is closed finitely, i. e. coincides with its frame, and the fact that the finite limit of a succession of terms all equal to  $a$  is  $\boxed{a}$ , (or the parallel facts for  $N$ ple successions).

As all the operations are commutative, the limits on the right-hand sides may also be replaced by those of the twin type

$$\left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right),$$

so that in these cases, i. e. for  $(M+N)$ ple successions whose term of index  $((m), (n))$  is always either the sum, or the product, or the union, of the term  $a_{(m)}$  of a  $M$ ple succession and the term  $b_{(n)}$  of a  $N$ ple succession, the two finite partially repeated limits

$$\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right), \quad \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right)$$

are equal.

The corresponding formula for links is

$$\begin{aligned} \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) (a_{(m)} \oslash b_{(n)}) &< \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)} \oslash \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) b_{(n)} \\ &< \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) (a_{(m)} \oslash b_{(n)}) \vee \left\{ \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) c_m \oslash \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) b_{(n)} \right\}, \end{aligned}$$

where  $c_{(m)}$  has all and only the values of  $a_{(m)}$  not belonging to  $\left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) b_{(n)}$ . It is because the latter link is not always  $\delta$  that we do not in general get equality.

In the case of unions and links, we can at once complete the result, by shewing that

$$\begin{aligned} \left( \lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} \right) (a_{(m)} \cup b_{(n)}) &= \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)} \cup \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) b_{(n)}, \\ \left( \lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} \right) (a_{(m)} \oslash b_{(n)}) &< \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)} \oslash \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) b_{(n)}. \end{aligned}$$

These relations are simply expressions of the fact that a succession of numbers taken from two given successions of numbers has for its numerical limits exclusively limits of these two successions; and if each number of the first succession belongs to *both* the given successions, each of its limits is a limit of both given successions. These facts are equivalent, indeed to the statement that the left-hand sides of the above equalities are included in the right. The converse, in the case of unions, we already know by (X).

We note that

$$\left( \lim_{m \rightarrow \infty} \right) \overline{a}_m = \overline{a}.$$

This is obtained by writing

$$a_m = a, \quad b_n = n\theta$$

in the general formula for links, and observing that

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \right) n\theta$$

has all possible values, so that its link with any quantity is again that quantity. Another particular case to note is

$$\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) \overline{a_{(m)}}_K = \lim_{(m) \rightarrow \infty} \overline{a_{(m)}}_K,$$

*except for possible values  $\pm K$  of the left-hand side, not necessarily belonging to the right.*

The case of sums and products is however more subtle. This is at once clear if we think of a succession of quantities  $a_m$  whose finite limit is  $\delta$  (as for instance when  $a_m = m$ ), and take  $b_m = -a_m$ . The sum  $a_m + b_m$  then includes the value 0 for every  $m = n$ , and hence its finite double limit includes the value 0, whereas  $\left( \lim_{m \rightarrow \infty} \right) a_m + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \right) b_n$  is  $\delta$ . Similarly, if, for the same  $a_m$ , we take  $b_m = \frac{1}{a_m}$ , the product  $a_m \cdot b_n$  includes

the value 1 for every  $m = n$ , and hence so does its finite double limit, whereas  $(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty}) b_n = \delta \cdot 0 = \delta$ .<sup>9)</sup>

We may however at once prove the

**Theorem V.** *For any Mple and any Nple succession, of terms  $a_{(m)}$  and  $b_{(n)}$  respectively, whose limits are complete,*

$$\lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} (a_{(m)} + b_{(n)}) = \lim_{(m) \rightarrow \infty} a_{(m)} + \lim_{(n) \rightarrow \infty} b_{(n)},$$

$$\lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} (a_{(m)} \cdot b_{(n)}) = \lim_{(m) \rightarrow \infty} a_{(m)} \cdot \lim_{(n) \rightarrow \infty} b_{(n)}.$$

This is a consequence of Theorem II for successions with complete finite limits, if we confine ourselves to the case  $M = N = 1$  (the proof being precisely parallel in the general case). In fact, by this theorem, we certainly have for all  $m > N$ , and all  $n > N$ ,

$$(x) \quad a_m < \lim_{m \rightarrow \infty} a_m + \theta\epsilon, \quad b_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \theta\epsilon;$$

hence by addition and passage to the limit,

$$\lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} (a_m + b_n) < \lim_{m \rightarrow \infty} a_m + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + 2\theta\epsilon,$$

since both limits on the right-hand side are closed; and for this same reason, the latter relation is equivalent (cp. p. 273) to

$$\lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} (a_m + b_n) < \lim_{m \rightarrow \infty} a_m + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

which is the addition form of the theorem.

Similarly, by multiplication and passage to the limit from (x)

$$\lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} (a_m \cdot b_n) < \lim_{m \rightarrow \infty} a_m \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + A\theta\epsilon,$$

where

$$A = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \theta\epsilon$$

<sup>9)</sup> Here the complication is not,—as in the corresponding two relations (X),—removed by merely stipulating that neither  $(\lim_{m \rightarrow \infty}) a_m$  nor  $(\lim_{n \rightarrow \infty}) b_n$  is  $\delta$ .

For instance, if, in the two examples of the text, we replace

$$\begin{array}{l} a_m \text{ by } (a_m \vee c) \\ b_n \text{ by } (b_n \vee d) \end{array}$$

for each  $m, n$  then by the relation (X) for unions, and the distributive laws for the union of sums or products, the finite limits on the one side are in both cases  $\boxed{c}$  and  $\boxed{d}$ , while those on the other include

$$0 \vee \boxed{c+d} \quad \text{and} \quad 1 \vee \boxed{c \cdot d}$$

respectively,—which by choice of  $c$  and  $d$  can easily be made to differ from  $\boxed{c+d}$  and  $\boxed{c \cdot d}$ .



is strictly finite, and so  $\Delta e$  is always an infinitesimal. This is thus again equivalent to

$$\lim_{(m, n) \rightarrow \infty} (a_m \cdot b_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

which is the product form of the theorem.

To generalise Theorem V as far as possible, we use the process of *levelling*, and its properties noted on pp. 274, 275.

Given any  $M$ ple and any  $N$ ple succession, of terms  $a_{(m)}$  and  $b_{(n)}$  respectively, those of terms

$$\overline{a_{(m)}}_K, \quad \overline{b_{(n)}}_K$$

respectively have *complete* limits, and hence, by the theorem,

$$(y) \quad \begin{cases} \lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} \{ \overline{a_{(m)}}_K + \overline{b_{(n)}}_K \} = \lim_{(m) \rightarrow \infty} \overline{a_{(m)}}_K + \lim_{(n) \rightarrow \infty} \overline{b_{(n)}}_K, \\ \lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} \{ \overline{a_{(m)}}_K \cdot \overline{b_{(n)}}_K \} = \lim_{(m) \rightarrow \infty} \overline{a_{(m)}}_K \cdot \lim_{(n) \rightarrow \infty} \overline{b_{(n)}}_K. \end{cases}$$

The right-hand sides, which are included in

$$\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} a_{(m)} \right)_K + \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} b_{(n)} \right)_K, \quad \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} a_{(m)} \right)_K \cdot \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} b_{(n)} \right)_K$$

respectively, are therefore included in

$$(z) \quad \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} a_{(m)} \right) + \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} b_{(n)} \right), \quad \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} a_{(m)} \right) \cdot \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} b_{(n)} \right)$$

respectively. And *under the conditions of p. 274 and p. 275 respectively* the two  $\{ \}$  brackets on the left in (y) include

$$\overline{(a_{(m)} + b_{(n)})}_{2K}, \quad \overline{(a_{(m)} \cdot b_{(n)})}_{K^2}$$

respectively, and so the two limits on the left in (y) include, except for possible values  $\pm 2K, \pm K^2$ ,

$$\left( \lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} (a_{(m)} + b_{(n)}) \right)_{2K}, \quad \left( \lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} (a_{(m)} \cdot b_{(n)}) \right)_{K^2}$$

respectively; by passage to the limit for  $K \rightarrow \infty$ , these become

$$\left( \lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} (a_{(m)} + b_{(n)}) \right), \quad \left( \lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} (a_{(m)} \cdot b_{(n)}) \right).$$

Now the assumed conditions, if they hold for some  $K$ , hold *a fortiori* for all larger  $K$ . Hence we deduce that the latter limits are included in, and hence, by (X), equal to, the corresponding expressions (z).

The assumed conditions are, respectively, that a horizontal or vertical pair of the four relations

$$\begin{aligned} a_{(m)} < K, & \quad b_{(n)} < K, \\ -a_{(m)} < K, & \quad -b_{(n)} < K, \end{aligned}$$

(for the addition form) or of the four relations

$$\begin{aligned} a_{(m)} < K\theta; & \quad b_{(n)} < K\theta, \\ \frac{1}{a_{(m)}} < K\theta, & \quad \frac{1}{b_{(n)}} < K\theta, \end{aligned}$$

(for the product form),—should be known to hold for each pair of indices  $(m), (n)$ . This reduces to assuming that one the same such pair of relations should hold *for all*  $(m), (n)$ ; for the assumptions require that if any one relation does *not* hold for all values of the index, the diagonally opposite relation *should* hold for all values of the index; e. g. in the first case

$$\begin{aligned} a_{(m)} \nless K \text{ for some } (m) & \text{ implies } -b_{(n)} < K \text{ for all } (n); \\ -a_{(m)} \nless K \text{ for some } (m) & \text{ implies } b_{(n)} < K \text{ for all } (n); \end{aligned}$$

so that the only possibilities are

$$\begin{aligned} & -K < a_{(m)} < K \text{ for all } (m); \\ \text{or} & \quad a_{(m)} < K, \quad b_{(n)} < K \text{ for all } (m), (n); \\ \text{or} & \quad -a_{(m)} < K, \quad -b_{(n)} < K \text{ for all } (m), (n); \\ \text{or} & \quad -K < b_{(n)} < K \text{ for all } (n). \end{aligned}$$

Similarly in the second case.

As we are dealing with limits, which are unchanged when we neglect a finite number of the terms, it suffices to assume the respective conditions fulfilled *for all sufficiently large*  $m$  and  $n$ . Thus finally we obtain the following statements.

**Theorem VI.** *If a horizontal or vertical pair of the four limits*

$$\begin{aligned} \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) \bar{a}_{(m)}, & \quad \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) \bar{b}_{(n)}, \\ \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) \underline{a}_{(m)}, & \quad \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) \underline{b}_{(n)}, \end{aligned}$$

*exist (finite), then*

$$\left( \lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} \right) (a_{(m)} + b_{(n)}) = \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)} + \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) b_{(n)}.$$

**Theorem VII.** *If a horizontal or vertical pair of the four limits*

$$\begin{aligned} \lim_{(m) \rightarrow \infty} a_{(m)}, & \quad \lim_{(n) \rightarrow \infty} b_{(n)}, \\ \lim_{(m) \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{(m)}}, & \quad \lim_{(n) \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{(n)}}, \end{aligned}$$

*exist complete, then*

$$\left( \lim_{((m), (n)) \rightarrow \infty} \right) (a_{(m)} \cdot b_{(n)}) = \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)} \cdot \left( \lim_{(n) \rightarrow \infty} \right) b_{(n)}.$$

This is the best possible statement we can get for the distributive laws for finite limits combined by addition or multiplication, the complete generalisation requiring in fact the theory of infinities.

## 9. General limiting processes.

With regard to the limits defined and discussed so far, it should be noted that the set of values of

$$\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)}$$

is *not* the unique limiting set, in the sense of the theory of sets, of the set of values of  $a_{(m)}$ , nor even of that of  $\boxed{a_{(m)}}$ <sup>9)</sup>. In general, of course, these sets will have no unique limiting set, but only upper and lower limiting sets. It is easy to see that these are contained in the set of values of

$$\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)},$$

but in general the latter will have further values not contained in the limiting sets.

There is, however one important case in which the set of values of  $\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)}$  may be identified with the limiting set of the set of values of  $a_{(m)}$  as  $(m) \rightarrow \infty$ . This appears from the following Theorem:

*If  $a_{(m)}$  is always closed finitely, and*

$$a_{(m)} > a_{(m')}$$

*for every  $(m') \gg (m)$ <sup>10)</sup>, then*

$$\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)}$$

*has all, and only, the values common to  $a_{(m)}$  for every  $(m)$ .*

Any value  $\alpha$  belonging to  $a_{(m)}$  for every  $(m)$  is of the form

$$\lim_{(m) \rightarrow \infty} \alpha_{(m)} \quad \text{with} \quad \alpha_{(m)} < a_{(m)}$$

(namely for  $\alpha_{(m)} = \alpha$ ), and belongs therefore certainly to

$$\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)}.$$

On the other hand, from

$$a_{(m)} > a_{(m')} \quad \text{for all} \quad (m') \gg (m)$$

we deduce

$$\boxed{a_{(m)}} > \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m')},$$

<sup>9)</sup> This is a familiar distinction in ordinary analysis, where  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i$  is not the same thing as  $\lim_{i \rightarrow \infty} (\alpha_i)$ , where  $(\alpha_i)$  represents the set having  $\alpha_i$  as its only object.

E. g. if  $\alpha_i = 1 + \frac{1}{i}$ , the first lim is 1, the second is the null-set and corresponds only to  $\delta$ .

<sup>10)</sup>  $(m') \gg (m)$  means each index  $m'_i$  is  $>$  the corresponding index  $m_i$ .

hence, as  $a_{(m)}$  is closed finitely,

$$a_{(m)} > \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)},$$

so that every value of the limit certainly belongs to  $a_{(m)}$  for all  $(m)$ .

This completes the proof.

Now for purposes of evaluation of limits, the general type of Nple succession may be reduced to the above special type (*closed contracting successions*) by virtue of the following property:

*Given any Nple succession of quantities  $a_{(m)}$ , and defining*

$$g_{(m)} = \bigcup_{(m') \geq (m)} (a_{(m')})^{11}$$

*to have all, and only, the values each of which belongs to  $a_{(m')}$  for some  $(m') \geq (m)$ , we have*

$$\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) g_{(m)} = \left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)}.$$

For simplicity suppose  $N = 1$ .

As

$$g_m > a_m,$$

we certainly have

$$\left( \lim_{m \rightarrow \infty} \right) g_m > \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \right) a_m.$$

For the converse, note that a value of the left-hand side is a limit of values  $\gamma_{m_i}$  of  $g_{m_i}$  for a sequence of indices  $m_i$ , i. e. of values  $a_{m'_i}$  of  $a_{m'_i}$  for a sequence of indices  $m'_i > m_i$ , i. e. a value of  $\left( \lim_{m \rightarrow \infty} \right) a_m$ .

This completes the proof, in the case  $N = 1$ , and with the slight complication in the indices, the same proof is valid in general.

The Nple succession of quantities

$$\boxed{g_{(m)}}$$

is clearly of the required special type, for each term is closed and the term of index  $(m)$  includes those of index  $(m')$  for all  $(m') \geq (m)$ . And its finite limit coincides with

$$\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) g_{(m)},$$

hence with

$$\left( \lim_{(m) \rightarrow \infty} \right) a_{(m)}.$$

<sup>11</sup> By analogy with the notation  $\Sigma a_m$  and  $\Pi a_m$ , we use  $U(a_m)$  to denote the union of a finite, and by extension (in the obvious sense) of an enumerably infinite, set of quantities  $a_m$ .

Thus

Theorem VIII. *The finite limit of any Nple succession of quantities  $a_{(m)}$  has all, and only, the values common to*

$$\boxed{g_{(m)}} = \boxed{\bigcup_{(m') \supseteq (m)} a_{(m')}}_m$$

for all  $(m)$ .

This characteristic property of the finite limit of an Nple succession is the one most convenient for purposes of generalisation.

Suppose for instance that we have to consider a quantity  $a(\xi)$  defined as a (*many-valued*) function of a numerical variable  $\xi$ . In order to define

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} a(\xi),$$

we first form the function

$$g_{\xi_0}(\xi)$$

having all, and only, the values each of which belongs to

$$a(\xi')$$

for some  $\xi'$  in

$$|\xi' - \xi_0| \leq |\xi - \xi_0|,$$

i. e. for some

$$\xi' < \xi + \theta(\xi - \xi_0);$$

we then take

$$\left(\lim_{\xi \rightarrow \xi_0}\right) a(\xi) = \left(\lim_{\xi \rightarrow \xi_0}\right) g_{\xi_0}(\xi)$$

to have all, and only, the values belonging to

$$\boxed{g_{\xi_0}(\xi)}$$

for all  $\xi$ .

Now as

$$g_{\xi_0}(\xi_0 + \delta) > g_{\xi_0}(\xi_0 + \delta') \quad \text{for all } \delta' \leq \delta,$$

we see at once, by Theorem VIII, that the above definition of

$$\left(\lim_{\xi \rightarrow \xi_0}\right) g_{\xi_0}(\xi)$$

coincides precisely with that furnished by Theorem VIII for

$$\left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) g_{\xi_0}\left(\xi_0 + \frac{1}{m}\right).$$

Let us extend the definition of the many-valued function  $a(\xi)$  of the numerical variable  $\xi$  by defining

for any quantity  $x$ ,

$$a(x)$$

to have all, and only, the values each of which belongs to  $a(\xi)$  for some value  $\xi$  of  $x$ .

Then our function

$$g_{\xi_0}(\xi)$$

is precisely

$$a(\xi_0 + \theta(\xi - \xi_0)),$$

where  $\theta$  is our symmetrical sub-unit.

In fine, we therefore obtain our definition of the *finite limit in a continuous passage to the limit with respect to a numerical variable  $\xi$*  in the form

$$\left(\lim_{\xi \rightarrow \xi_0}\right) a(\xi) = \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a\left(\xi_0 + \frac{\theta}{m}\right).^{12}$$

We notice that the many-valued function  $a(x)$  of the many-valued variable  $x$  defined as above from  $a(\xi)$ , has the special property that

$$a(x') < a(x)$$

whenever

$$x' < x.$$

Functions with this property will be described as *contractive*.

If, for any *contractive many-valued function of a many-valued variable  $x$* , we define, for each  $x_0$ , the auxiliary function

$$g_{x_0}(x)$$

as having (only) each value that belongs to

$$a(x')$$

for some

$$x' < x_0 + \theta(x - x_0);$$

we have (since  $a(x)$  is contractive),

$$g_{x_0}(x) = a(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

We then take

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0}\right) a(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0}\right) g_{x_0}(x)$$

to have all, and only, the values belonging to  $g_{x_0}(x)$  for every  $x$ , which are seen to be the values of

$$\left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) g_{x_0}\left(x_0 + \frac{1}{m}\right).$$

We thus obtain (as definition of the left-hand side): when  $a(x)$  is a *contractive function of  $x$*

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0}\right) a(x) = \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) a\left(x_0 + \frac{\theta}{m}\right).$$

<sup>12</sup> This limit includes  $a(\xi_0)$ . To obtain the more usual definition, replace  $\theta$  by the quantity  $\theta'$  having the same values except zero.

As a particular case, note that

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0}\right) x = \boxed{x_0}.$$

For unrestricted many-valued functions of  $x$ , or of other arguments (among which figure the variable point or set of points in  $n$  dimensions), in their full range or in restricted ranges, the same principle of course applies, although the formulae become more cumbersome, and new notations, hence to some extent new ideas, have to be devised for them.

In the case of a function

$$a(P)$$

of a variable point in  $n$  dimensions,

$$\left(\lim_{P \rightarrow P_0}\right) a(P)$$

reduces to an  $n$ -ple finite limit.

Another interesting case is that in which the argument is a "sub-division", either in the Riemann or in the Lebesgue sense, of a given range of points, and we are dealing with limiting processes such as occur in Riemann and Young-Lebesgue integration. It may be described typically by saying that the argument is some object  $\mathcal{P}$  with which is associated a specific quantity  $d$ , which we shall for definiteness call its *norm*, and the required limit is

$$\left(\lim_{d \rightarrow 0}\right) a(\mathcal{P}).$$

This is then defined by forming the contractive function of  $x$

$$g(x)$$

having (exclusively) every value belonging to  $a(\mathcal{P})$  for some  $\mathcal{P}$  of norm  $d < x\theta$ , and equating the required limit to

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0}\right) g(x) = \left(\lim_{m \rightarrow \infty}\right) g\left(\frac{\theta}{m}\right).$$

(Eingegangen am 23. 5. 1930.)



# Verknüpfung einiger Rechenproben von R. Mehmke für das systematische Eliminieren bei linearen Gleichungssystemen mit bekannten Sätzen der Determinantentheorie.

Von

A. Walther in Darmstadt.

1. Im 2. Hefte, S. 300–318 des vorangehenden 103. Bandes (1930) der Mathematischen Annalen hat R. Mehmke eine Arbeit „Praktische Lösung der Grundaufgaben über Determinanten, Matrizen und lineare Transformationen (Beiträge zur praktischen Analysis, II.)“ veröffentlicht. Er hebt in ihr gewisse für das praktische Rechnen wertvolle Proben hervor, die sich beim üblichen „gewöhnlichen“ Eliminieren und beim „beschleunigten“ Eliminieren von Unbekannten in linearen Gleichungssystemen ergeben und die nach seinen „Erkundigungen bei hervorragenden Sachkennern ... sonderbarerweise nicht bekannt zu sein scheinen“<sup>1)</sup>. Die Beweise erbringt er durch Heranziehung der Rechnung mit „Extensen“ (Punkt- und Vektorenrechnung). Ich möchte hier zeigen, daß die Proben mit geläufigen Sätzen der Determinantentheorie identisch sind, die natürlich ihrerseits wieder mit jenen Tatsachen aus der Punkt- und Vektorenrechnung zusammenhängen. Und zwar handelt es sich um das Theorem von Sylvester<sup>2)</sup>, nach dem die aus den  $(h+1)$ -reihigen Superdeterminanten  $(1 \leq h < n)$  von

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix}$$

<sup>1)</sup> Ein freilich nicht als Probe gewerteter Sonderfall findet sich z. B. bei P. B. Fischer, Determinanten, Sammlung Göschen 402, S. 6.

<sup>2)</sup> Vgl. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig (Veit & Co.) 1909, § 41, S. 83–88, § 44, S. 99–102, § 45, S. 102–103.

gebildete Determinante gleich

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix}^{n-h-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ist, vor allem um den Sonderfall  $h = n - 2$  des Theorems:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1} & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1} & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-2} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \dots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Dieser Sonderfall kann auch für sich allein als Aussage über den (im wesentlichen) linksstehenden zweireihigen Minor  $\begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{vmatrix}$  in der reziproken Determinante  $|A_r|$  aus den algebraischen Komplementen  $A_r$ , der  $a_{rs}$  aufgefaßt und bewiesen werden<sup>2)</sup>.

2. Das „gewöhnliche“ Eliminieren einer Unbekannten, etwa der ersten  $x_1$ , aus dem Gleichungssystem

$$\sum_{s=1}^n a_{rs} x_s = y_r \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

wird durch das Schema

$$\begin{array}{l} \sum_{s=1}^n a_{1s} x_s = y_1 \quad | \quad -a_{r1} \\ \sum_{s=1}^n a_{rs} x_s = y_r \quad | \quad a_{11} \end{array} \quad (r = 2, 3, \dots, n)$$

verdeutlicht: man multipliziert die erste Gleichung mit  $-a_{r1}$ , die  $r$ -te mit  $a_{11}$  und addiert; Ergebnis ist das Gleichungssystem

$$\sum_{s=2}^n b_{rs} x_s = \sum_{s=2}^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1s} \\ a_{r1} & a_{rs} \end{vmatrix} x_s = \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{r1} & y_r \end{vmatrix} = z_r \quad (r = 2, 3, \dots, n).$$

Entfernt man nach dem Schema

$$\begin{array}{l} \sum_{s=2}^n b_{2s} x_s = z_2 \quad | \quad -b_{r2} \\ \sum_{s=2}^n b_{rs} x_s = z_r \quad | \quad b_{22} \end{array} \quad (r = 3, 4, \dots, n)$$

<sup>2)</sup> G. Kowalewski, a. a. O. § 38, S. 79–80, Satz 28.

die zweite Unbekannte  $x_2$  und wendet den Determinantensatz von Sylvester an, so ergibt sich, weil die  $b_{rs}$  und die  $z_r$  zweireihige Superdeterminanten zu  $a_{11}$  sind, für  $r = 3, 4, \dots, n$  das Gleichungssystem

$$\sum_{s=3}^n \begin{vmatrix} b_{2s} & b_{2r} \\ b_{rs} & b_{rr} \end{vmatrix} x_s = \sum_{s=3}^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{2r} \end{vmatrix} x_s = \sum_{s=3}^n a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2r} \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{rr} \end{vmatrix} x_s$$

$$= \begin{vmatrix} b_{22} & z_2 \\ b_{r2} & z_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2r} \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \\ a_{r1} & a_{r2} & y_r \end{vmatrix}.$$

D. h. in dem nach Eliminieren der zweiten Unbekannten  $x_2$  entstehenden Gleichungssystem tritt der Koeffizient  $a_{11}$  der ersten eliminierten Unbekannten  $x_1$  in der früheren ersten Gleichung  $\sum_{s=1}^n a_{1s} x_s = y_1$  durchweg als gemeinsamer Faktor auf und kann fortgekürzt werden. Das ist Mehrkies Probe für „gewöhnliches“ Eliminieren. Übrigens schließt sich der in § 41 von Kowalewskis Determinantentheorie durchgeführte erste Beweis für den Satz von Sylvester vollständig an das Vorgehen beim Eliminieren an und gestattet geradezu, diesen Satz selbst als Nebenergebnis der Elimination herzuleiten.

Mehrkies schlägt vor, den gemeinsamen Faktor  $a_{11}$  wegzulassen und dann weiterzurechnen. Entfernen von  $x_2$  liefert, weil die erscheinenden zweireihigen Determinanten aus dreireihigen Superdeterminanten von  $b_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  wieder nach dem Satze von Sylvester vereinfacht werden können, das Gleichungssystem

$$\sum_{s=4}^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{23} & a_{2r} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3r} \end{vmatrix} x_s = \sum_{s=4}^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{23} & a_{2r} \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{rr} \end{vmatrix} x_s \quad (r = 4, 5, \dots, n).$$

Es spaltet sich also, wie zu erwarten, der Koeffizient  $b_{22}$  der vordersten Unbekannten  $x_2$  in der obersten Gleichung  $\sum_{s=2}^n b_{2s} x_s = z_2$  des zweitvorangehenden Gleichungssystems bzw. die zweireihige Determinante aus den Elementen links oben in der Matrix der  $a_{rs}$  überall als Faktor ab. Streicht man ihn, so stellt sich im nächsten Gleichungssystem als gemeinsamer Faktor  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  ein, d. h. die dreireihige Determinante aus den  $a_{rs}$  links oben oder der Spitzenkoeffizient des zweitvorangehenden, vom gemeinsamen

Faktor befreiten Gleichungssystems. Schließlich führt das Fortlassen gemeinsamer Faktoren und Eliminieren zu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-2} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \dots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-2} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \dots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & y_n \end{vmatrix}$$

d. h. zur Cramerschen Regel für die  $n$ -te Unbekannte.

3. Das „beschleunigte“ Eliminieren von zwei Unbekannten  $x_1$  und  $x_2$  zugleich geschieht nach dem Schema

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n a_{1s} x_s &= y_1 & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \sum_{s=1}^n a_{2s} x_s &= y_2 & \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \\ \sum_{s=1}^n a_{rs} x_s &= y_r & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (r=3, 4, \dots, n); \end{aligned}$$

das Ergebnis lautet nach dem Laplaceschen Entwicklungssatze

$$\sum_{s=3}^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2s} \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{rs} \end{vmatrix} x_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \\ a_{r1} & a_{r2} & y_r \end{vmatrix} \quad (r=3, 4, \dots, n)$$

und stimmt überein mit dem nach Kürzen des Faktors  $a_{11}$  verbleibenden Ergebnis zweier Schritte beim „gewöhnlichen“ Eliminieren. Die für neues „beschleunigtes“ Eliminieren von  $x_3$  und  $x_4$  notwendigen Multiplikatoren sind zweireihige Determinanten aus dreireihigen Superdeterminanten zu  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ; sie enthalten also nach Sylvester  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  als gemeinsamen Faktor. Hierin liegt die Mehrkesche Probe für „beschleunigtes“ Eliminieren. Das Eliminationsergebnis ist am leichtesten auszurechnen, wenn man den gemeinsamen Faktor zunächst beibehält, weil dann nur dreireihige Determinanten aus dreireihigen Superdeterminanten von  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  umgeformt zu werden brauchen. Sie zerlegen sich in das Produkt von  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^3$  mit fünfrehigen Determinanten. Benutzt man also beim Eliminieren die um  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  gekürzten Multiplikatoren, so bleibt im entstehenden Gleichungssystem  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  als gemeinsamer Faktor übrig — eine neue, von Mehrke zwar in Beispielen benutzte, aber mit Worten anscheinend nicht besonders erwähnte Probe; bis auf diesen Faktor sind die Koeffizienten und rechten Seiten fünfrehige Determinanten in

den  $a_{r,}$  und  $y_{r,}$ . Das nächste Mal kommt  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$  als gemeinsamer

Faktor bei den Multiplikatoren sowie beim Eliminationsergebnisse mit gekürzten Multiplikatoren usw.

4. Schließlich noch eine Bemerkung über das Auswerten von Determinanten, daß nämlich statt des von Mehmke empfohlenen „gewöhnlichen“ oder „beschleunigten“ Eliminierens manchmal die in Deutschland leider fast unbekannte (sachlich im wesentlichen auf gewöhnliches Eliminieren hinauslaufende) Anordnung nach Chiò <sup>4)</sup> vorzuziehen sein dürfte.

<sup>4)</sup> Vgl. E. T. Whittaker und G. Robinson, *The Calculus of Observations*, 2. Aufl. London (Blackie and Son) 1926, Kap. 5, S. 71—77.

(Eingegangen am 11. 8. 1930.)

## Zum Nachweis der Proben beim Eliminieren.

Von

R. Mehrke in Stuttgart.

Wie ich nach dem Erscheinen meiner Veröffentlichung „Beiträge zur praktischen Analysis, II“ in Band 103 dieser Annalen erkannt habe, sind zum Beweis des Bestehens der fraglichen Proben<sup>1)</sup> keine äußeren und inneren Produkte, noch viel weniger Determinanten erforderlich, es reichen vielmehr höchst elementare Hilfsmittel aus. Jene Proben sind nämlich eine unmittelbare Folge einer Grundeigenschaft linear-abhängiger extenser, d. h. aus mehreren Einheiten abgeleiteter (nicht „skalarer“) Größen, welche Eigenschaft z. B. im Fall eines Systems von drei linearen Gleichungen auf die selbstverständliche Tatsache hinauskommt, daß in unserm gewöhnlichen Raum ein Punkt durch seine drei kartesischen Koordinaten eindeutig bestimmt ist.

Lauten die gegebenen Gleichungen

$$\begin{aligned}\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \dots &= \alpha_0 \\ \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_3 + \dots &= \beta_0 \\ \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3 + \dots &= \gamma_0 \\ \dots &\dots\end{aligned}$$

<sup>1)</sup> In einer bei uns ganz unbeachtet gebliebenen Arbeit hat B. J. Clasen ähnliche Proben schon 1888 angegeben: Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants, Extrait des Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 12<sup>e</sup> année, 1887—1888, Paris 1889, Gauthier-Villars. Auf diese Arbeit an obiger Stelle hinzuweisen konnte ich deshalb unterlassen, weil ich dort gar nicht vom Auflösen linearer Gleichungen gesprochen habe und beim Auswerten von Determinanten das von mir vorgeschlagene Verfahren schneller und bequemer zum Ziel führt als das von Clasen. Mit Clasen's Verfahren, das durch zweckmäßigere Anordnung und Hinzunahme der beschleunigten Elimination sich noch verbessern läßt, beschäftigte ich mich in einer Abhandlung „Über die zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen durch Elimination aufzulösen,“ die in der Zeitschr. f. angew. Mathematik u. Mechanik erscheinen wird.

so darf man darin die veränderlichen Zahlgrößen  $\xi_1, \xi_2, \dots$  und die konstanten Zahlgrößen  $\alpha_0, \beta_0, \dots$  der rechten Seiten durch die linear-unabhängigen Einheiten  $e_1, e_2, \dots$  beziehlich daraus hergeleiteten Extensen  $a, b, \dots$  ersetzen:

$$\begin{aligned} (1) & \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \dots = a \\ (2) & \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \dots = b \\ (3) & \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \dots = c \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ohne daß beim Vorgang des Eliminierens etwas geändert wird. Beim planmäßigen „gewöhnlichen“ Eliminieren von  $e_1$  aus (1) und (2), aus (1) und (3) usw. hat man die neuen Gleichungen zu bilden

$$\begin{aligned} (12) & = -\beta_1(1) + \alpha_1(2) \\ (13) & = -\gamma_1(1) + \alpha_1(3) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

welche die zweite Gleichungskette ergeben. Wendet man auf diese dasselbe Verfahren an, so erhält man eine dritte Gleichungskette, usw. Die erste Gleichung der dritten Kette, die sich also durch Elimination von  $e_1$  aus (12) und (13) ergibt, stellt eine lineare Beziehung zwischen den Extensen  $e_2, e_3, \dots, a, b, c$  vor, in welcher  $c$  augenscheinlich den Faktor  $\alpha_1(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$  erhält. Wären aber  $e_1$  und  $e_2$  gleichzeitig aus (1), (2) und (3) eliminiert worden, und zwar durch Multiplikation beziehlich mit  $(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)$ ,  $(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)$  und  $(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$  und nachherige Addition, so hätte  $c$  nur den Faktor  $(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$  erhalten. Falls nicht etwa die Gleichungen (1), (2) und (3) abhängig voneinander sind, werden die Extensen  $e_2, e_3, \dots, a, b$  linear unabhängig sein, also wird aus ihnen die Extense  $c$  sich nur auf eine einzige Weise linear ableiten lassen<sup>\*)</sup>. Da nun, wie sich gezeigt hat, beim schrittweisen gewöhnlichen Eliminieren  $c$  einen  $\alpha_1$ -mal so großen Faktor erhält, als beim gleichzeitigen Eliminieren von  $e_1$  und  $e_2$ , so muß dasselbe für die andern Glieder, nämlich die mit  $e_2, e_3, \dots, a, b$  stattfinden, d. h. in der ersten Gleichung der dritten Kette müssen sämtliche Glieder durch  $\alpha_1$  teilbar sein, und dasselbe wird offenbar für die folgenden Gleichungen dieser Kette zutreffen, was eben zu beweisen war.

<sup>\*)</sup> Der betreffende, für die Theorie der Elimination grundlegende Satz findet sich dem Inhalt nach wohl zuerst bei Grassmann, Lineale Ausdehnungslehre von 1844, § 20 = Werke I 1, S. 62 (statt Extense, als Vektor aufgefaßt, wird dort Strecke gesagt).

(Eingegangen am 19. 8. 1930.)



## Über endlich gleiche Polyeder. II.<sup>1)</sup>

Von

K. Th. Vahlen in Wien.

Daß zwischen den Flächenwinkeln  $\pi_i$  von zwei in dieselben Teilpolyeder  $T_k$  zerlegten Polyedern  $P$  und  $P'$  eine lineare homogene ganzzahlige Kongruenz (mod  $\pi$ ) besteht, hatten Bricard (1896) und Sforza (1897) für den Fall von Normalzerlegungen, Dehn (1901) für den allgemeinen Fall gezeigt. Mein Versuch (1902), letzteren Fall auf den ersteren zurückzuführen, ist nach einem Briefe Dehns an Hilbert unzureichend. Dagegen hat kurz darauf Kagan (1903) die weitläufige Herleitung Dehns durch eine durchsichtigere ersetzt. Aber auch diese läßt noch eine bemerkenswerte Vereinfachung zu.

Die Teilpolyeder  $T_k$  bilden auf der Oberfläche von  $P(P')$  ein Polygonnetz, dessen sämtliche Kanten als Kanten von  $P(P')$  aufgefaßt und mit  $p_i(p'_i)$  bezeichnet seien. Der an der Kante  $p_i(p'_i)$  liegende Flächenwinkel von  $P(P')$ , der also auch gleich  $\pi$  sein kann, werde mit  $\pi_i(\pi'_i)$  bezeichnet. Dieselbe Bedeutung haben  $t_i, \tau_i$  für die Teilpolyeder  $T_k$ .

Stellen wir einen solchen Flächenwinkel durch einen rechteckigen Zylinderausschnitt der Länge  $t_i(p_i, p'_i)$  und des Bogens  $\tau_i(\pi_i, \pi')$  dar, so zerfällt jedes solche gebogene Rechteck  $p_i\pi_i, p'_i\pi'_i$  in Teilrechtecke  $t\tau$ ; ebenso zerfallen die zu Kanten  $t_k$  im Innern von  $P(P')$  gehörenden Zylinderzonen des Umfangs  $2\pi$  in derartige Teilrechtecke. Abgesehen von solchen Zylinderzonen des Umfangs  $2\pi$  ist also die Summe aller Rechtecke  $t\tau$  einerseits als Summe aller  $p_i\pi_i$ , andererseits als Summe aller  $p'_i\pi'_i$  dargestellt, und die Relation wäre bewiesen, wenn alle Kanten  $t, p, p'$  rationale Verhältnisse hätten oder, nach Dehn, durch solche unter Erhaltung aller Rechteck-Zerlegungen ersetzt werden könnten.

Das erreichen wir einfacher als Dehn und Kagan, indem wir jedes Rechteck, z. B.  $p_i\pi_i(p'_i\pi'_i)$ , durch Senkrechte in Spalten von übereinander-

<sup>1)</sup> Siehe Math. Annalen 56 (1902).

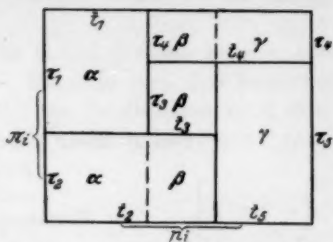
liegenden Teilrechtecken gleicher Länge zerlegen, wodurch jede Kante  $t$  auf zwei Arten in „Zerlegungsstrecken“ zerfällt, und indem wir jeder Spalte und damit allen in ihr liegenden Rechtecken eine ganze Zahl  $\alpha, \beta, \dots$  bzw.  $\alpha', \beta', \dots$  zuordnen. Diese ganzen Zahlen sind nur so zu wählen, daß die Summe der zur einen Art von Zerlegungsstrecken von  $t$  gehörenden der Zahlen  $\alpha, \beta, \dots$  der Summe der zur andern Art von Zerlegungsstrecken von  $t$  gehörenden der Zahlen  $\alpha', \beta', \dots$  gleich ist. Die Anzahl dieser Gleichungen kann größer sein als die Anzahl der Verhältnisse der Unbekannten. Trotzdem sind sie erfüllbar, also in ganzen Zahlen erfüllbar, weil sie erfüllt sind, wenn man  $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$  den betreffenden Zerlegungsstrecken proportional nimmt.

Bildet man jetzt statt der Summe aller  $t\tau$  die Summe aller

$$(\alpha + \beta + \dots)\tau = (\alpha' + \beta' + \dots)\tau,$$

so erhält man die zu beweisende Relation. (Siehe Abb.)

Kagan zerlegt unnötig und erschwerend die Zerlegungsstrecken in Elementarstrecken.



$$\begin{aligned} & \alpha \tau_1 + (\alpha + \beta) \tau_5 + \beta \tau_6 + (\beta + \gamma) \tau_8 + \gamma \tau_9 \\ &= \alpha (\tau_1 + \tau_5) + \beta (\tau_5 + \tau_6 + \tau_8) + \gamma (\tau_8 + \tau_9) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \tau_1 \end{aligned}$$

(Eingegangen am 10. 10. 1930.)

## Sätze über zwei getrennte Eikörper.

Von

Hermann Brunn in München.

### Zusammenfassung.

Als Hauptsatz wird bewiesen:  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  seien zwei getrennte Eikörper,  $Z_0$  eine sie trennende Ebene,  $Z$  eine Parallelebene zu  $Z_0$ , so daß  $\mathcal{E}$  zwischen  $Z_0$  und  $Z$  liegt. Die Schnittpunkte von  $Z$  mit den Verbindungsgeraden aller Punkte von  $\mathcal{E}$  mit allen Punkten von  $\mathcal{F}$  erfüllen ein Eigebiet. Aus diesem Hauptsatz werden Folgerungen auf gewisse durch die Verbindungsgeraden definierte abwickelbare Flächen gezogen.

Die Eigebilde werden im folgenden nicht als Ovalkurven und Eiflächen gefaßt, sondern als Eigebiete, d. h. als innerhalb endlicher Schranken liegende abgeschlossene Punktmengen, die mit jeder treffenden Geraden nur ein Stück — Punkt oder Strecke — gemein haben.

Wenn zwei Eikörper  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  im Raume gegeben sind, kann man sich fragen, wieviel die durch ihr Zusammenbestehen bedingten Formen höherer Ordnung — Ordnung hier nicht im algebraischen, sondern einem allgemeineren Sinne verstanden — noch von Ovalnatur an sich haben.

$\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  seien völlig getrennt angenommen. Man ist dann bekanntlich immer des Vorhandenseins einer, ja unendlich vieler „Zwischenebenen“ sicher, welche keinen Punkt mit  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  gemein und beide Körper auf verschiedenen Seiten von sich liegen haben.

Durch  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  werden „Gemeinstützebenen“, kürzer „Gemeinstützen“, bedingt, d. h. Ebenen, die sowohl für  $\mathcal{E}$  als für  $\mathcal{F}$  Stützebenen sind. Eine Gemeinstütze heiße eine äußere, wenn sie  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  auf der nämlichen Seite, eine innere, wenn sie  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  auf verschiedenen Seiten von sich liegen hat.

Schon in einer Vorlesung im Sommersemester 1924 beschäftigte ich mich unter der Voraussetzung, daß die äußeren und inneren Gemeinstützen von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  zwei abwickelbare Flächen  $A$  und  $J$  bilden, mit der Untersuchung, ob die Parallelkegel zu  $A$  und  $J$  etwa Ovalkegel sind.

Ein orientierendes Beispiel zeigte, daß diese Beschaffenheit höchstens für  $J$  in Frage kommt, nicht für  $A$ , wo man es zunächst viel eher er-

wartet, weil man den Blick auf die den Eikörpern anliegenden konvexen Teile von  $A$  lenkt, statt auf die gegenseitigen Durchdringungen und Rückkehrkanten der Fläche gegen das Unendliche hin, welches für die Gestalt des Kegels maßgebend ist.

Wir wählen der Einfachheit wegen für  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  ebene Figuren, also degenerierte Körper; aber man sieht leicht, daß nicht etwa diese Ausartung es ist, welche in dem Beispiel die Ovalität des Parallelkegels zu  $A$  stört und verhindert. Man kann nämlich hinterher an Stelle der ebenen Figuren  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  körperliche setzen, die nur minimal von ihnen abweichen, und entnimmt dem Prinzip der Stetigkeit, daß diese geringfügige Änderung unmöglich die starken Abweichungen des Parallelkegels zu  $A$  von der Konvexität wettmachen kann.

Wenn man einem Quadrat  $efe'f'$  — siehe die Figur 1 — die vier Viertelskreise über den Diagonalen einschreibt, entstehen zwei Kreisbogenzweiecke  $ee'$  und  $ff'$ , deren Ecken — kurz gesagt — die Quadratecken von innen tangieren.

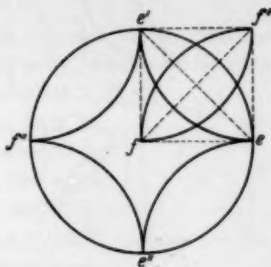


Fig. 1.

Das Zweieck  $ee'$  sei unser  $\mathcal{E}$ ;  $\mathcal{F} \equiv f_1 f_1'$  liege unter der Zeichnungsebene in einer Paralleltafel, und Zweieck  $ff'$  sei seine senkrechte Parallelprojektion auf die Zeichnungsebene. Wir mögen uns die abwickelbare Fläche  $A$  etwa durch eine Ebene beschrieben, d. h. umhüllt denken, die sich stets als gemeinsame Stütze im Uhrzeigersinn um  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$ , d. h. so herumbewegt, daß die Schnittlinien mit den Tafeln sich im Uhrzeigersinn drehen. Ausgangslage der Ebene mag die durch  $ef_1$ , Scheitel des Parallelkegels  $K$  zu  $A$  mag  $f_1$  sein. Welche Linie schneidet das entstehende  $K$  in der Tafel aus? Zunächst offenbar den linken Begrenzungsbogen von  $\mathcal{E}$ , weiterhin drei dazu kongruente Viertelskreise, die sich tangierend aneinanderschließen, so daß eine vierspitzige, nach außen konkav begrenzte Figur  $ee'f''e''$ , also kein Oval entsteht.

Dies etwas überraschende Ergebnis wird sofort verständlich, wenn man die Querschnitte unsrer Fläche  $A$  von  $f_1 f_1'$  nach aufwärts über  $ee'$  bis ins Unendliche verfolgt. Es ergeben sich nacheinander Schnitte von folgender Gestalt (Fig. 2).

NB. Die Größenverhältnisse der Schnitte untereinander sind in den Figuren nicht wiedergegeben. Die Figuren setzen sich alle nur aus Viertelskreisen zusammen; Nr. 1 und 5 aus je zweien, die übrigen aus je vierten. Bei den letzteren haben die Bögen an den Zusammenschlußstellen stets gemeinsame Tangente.

Somit besteht der Satz, „die Parallelkegel zu unsern äußern Regel-  
flächen sind Ovalkegel“, sicher nicht zu Recht. Der Parallelkegel zu  $J$  aus  
demselben Scheitel  $f_1$ , dagegen schneidet in der Zeichnungsebene vier Viertels-  
kreise aus — diesmal ist der rechte Begrenzungsbogen von  $\mathfrak{E}$  dabei —, die  
sich glatt zu einem Kreise  $ee'f''e''$ , also zu einem Oval zusammenschließen.  
Somit widerspricht das Beispiel nicht der Möglichkeit, daß die Parallelkegel  
zu den  $J$  allgemein Ovalkegel sind.

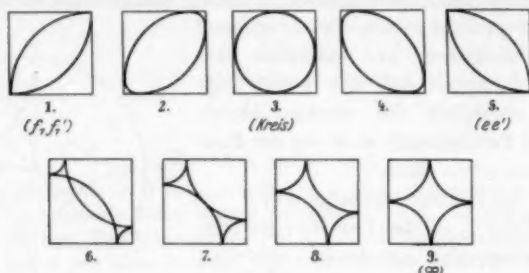


Fig. 2.

Daß sie es in der Tat sind, suchte ich in meiner Vorlesung durch einen  
sehr umständlichen indirekten Beweis zu zeigen, der darauf hinauslief, daß die  
Annahme, eine Ebene durch den Scheitel könne mit der Kegelfläche mehr als  
zwei Gerade oder eine Winkelfläche gemein haben, auf Widersprüche führe.

Ich möchte nun hier dem Satze nicht nur einen andern Beweis, sondern  
zugleich eine Verallgemeinerung und eine ganz andere Einkleidung geben,  
aus welcher zunächst der zu einigen Zweifeln Anlaß gebende Begriff der  
developpablen Flächen  $A$  und  $J$  vollständig herausfällt. Der Zusammenhang  
des scheinbar neuen Satzes mit der alten Fassung wird schließlich sich  
schon klarstellen.

Gegeben seien zwei Eikörper  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{F}$  und eine Zwischenebene  $Z_0$ .  $Z_0$  kann  
wagrecht,  $\mathfrak{E}$  oberhalb,  $\mathfrak{F}$  unterhalb  $Z_0$  gedacht werden. Von den Ebenen  
 $Z$ ,  $Z' \parallel Z_0$  liege die erste oberhalb und getrennt von  $\mathfrak{E}$ , die zweite unter-  
halb und getrennt von  $\mathfrak{F}$ .

Unter  $e$  seien immer Punkte verstanden, die zu  $\mathfrak{E}$ , unter  $f$  solche, die  
zu  $\mathfrak{F}$  gehören.

$E$  sei der Ort der Punkte  $g$ , in denen  $Z$ ,  $F$  der der Punkte  $g'$ , in  
denen  $Z'$  von Verbindungsgeraden  $ef$  geschnitten wird.

**Satz.**  $E$  und  $F$  sind Ovale.

Es genügt, das für  $E$  zu beweisen. Wir zeigen:

1.  $E$  erfüllt die „Streckenbedingung“, d. h. die endliche Verbindungs-  
strecke  $\overline{g_1 g_2}$  zweier Punkte  $g_1, g_2$  von  $E$  gehört ganz zu  $E$ .

Beweis (vgl. Fig. 3). Durch  $g_1$  geht, nach der Definition der  $g$ , mindestens eine Gerade  $ef$ , sei sie  $e_1 f_1 \equiv \gamma_1$ , durch  $g_2$  eine Gerade  $e_2 f_2 \equiv \gamma_2$ . Die Reihenfolge der — stets diskreten — Punkttupel auf  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ist von oben nach unten  $g_1 e_1 f_1$  und  $g_2 e_2 f_2$ .

Wenn  $g_1, g_2$  und  $f_1, f_2$  nicht in einer Ebene liegen, so liegt  $\overline{e_1 e_2}$  als Verbindungsstrecke zweier Gegenkanten ganz im Innern des körperlichen Tetraeders  $g_1 g_2 f_2 f_1$ .

Man bemerke, daß  $e_1$  weder mit  $g_1$  noch  $f_1$ ,  $e_2$  weder mit  $g_2$  noch  $f_2$  zusammenfallen kann.

Für jeden Punkt der Geraden  $g_1 g_2$ , also auch für jeden innern Punkt  $m$  von  $\overline{g_1 g_2}$  existiert eine Gerade — nennen wir sie  $\mu$  —, welche die Geraden  $e_1 e_2$  und  $f_1 f_2$  schneidet. Man braucht nur den Schnitt  $s_m$  der Ebene  $m f_1 f_2$  mit  $e_1 e_2$  aufzusuchen und hat dann in  $m s_m$  die gesuchte Gerade, die  $f_1 f_2$  in einem Punkte  $t_m$  schneiden muß. Für uns ist wichtig, zu zeigen, daß  $s_m$  zu  $\overline{e_1 e_2}$ ,  $t_m$  zu  $\overline{f_1 f_2}$  gehört. Punkt  $s_m$  liegt aber auf  $\overline{e_1 e_2}$ , weil offenbar  $e_1$  und  $e_2$ , wie die ganzen Dreiecke  $g_1 f_1 f_2$  und  $g_2 f_1 f_2$  (abgesehen von der Grundlinie  $\overline{f_1 f_2}$ ), zu verschiedenen Seiten der Ebene  $m f_1 f_2$  liegen. Und zwar ist  $s_m$  ein innerer Punkt des Dreiecks  $m f_1 f_2$ <sup>1)</sup>, woraus folgt, daß  $m s_m$  die Gerade  $f_1 f_2$  in einem Punkte  $t_m$  von  $\overline{f_1 f_2}$  schneidet.

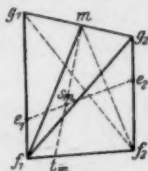


Fig. 3.

Da aber  $\overline{e_1 e_2}$  ganz zu  $\mathfrak{E}$ ,  $\overline{f_1 f_2}$  ganz zu  $\mathfrak{F}$  gehört, ist auch  $s_m$  ein Punkt  $e_m$  von  $\mathfrak{E}$ ,  $t_m$  ein Punkt  $f_m$  von  $\mathfrak{F}$ ,  $\mu \equiv f_m e_m m$  eine Gerade  $\gamma_m$ ,  $m$  ein Punkt  $g_m$  von  $E$ . Die Punkte  $m = g_m$  füllen aber das ganze  $\overline{g_1 g_2}$ ,  $\overline{g_1 g_2}$  gehört ganz zu  $E$ .

Wenn  $g_1, g_2, f_1, f_2$  in einer Ebene liegen, so liegen auch  $e_1, e_2$  in dieser Ebene; wir können die ganze Figur als Projektion einer räumlichen ansehen, bei welcher die den  $g_1, g_2, f_1, f_2$  entsprechenden Punkte *nicht* in einer Ebene liegen, und die Punkttupel  $f_m, e_m, g_m$  wie eben bestimmt werden können. Die Projektionen dieser Tripel in die ebene Figur beweisen dann, was wir nötig haben.

Somit erfüllt  $E$  die Streckenbedingung oder auch die damit äquivalente Bedingung der „Eintrittigkeit“, d. h.  $E$  hat mit treffenden Geraden nur ein Stück, nämlich einen Punkt oder eine Strecke gemein.

<sup>1)</sup> Den Punkt  $m$  oder die Strecke  $\overline{f_1 f_2}$ , die sicher außerhalb  $\mathfrak{E}$  liegen, kann das ganz zu  $\mathfrak{E}$  gehörige  $\overline{e_1 e_2}$  nicht treffen;  $e_1 e_2$  könnte also die Begrenzung des Dreiecks  $m f_1 f_2$  höchstens in einem innern Punkt der Dreiecksseiten  $\overline{m f_1}$  oder  $\overline{m f_2}$  treffen. Im erstern Falle müßte aber  $\overline{e_1 e_2}$  die Ebene  $f_1 g_1 f_2$  in einem von  $g_2$  verschiedenen Punkte von  $g_2 f_1$  schneiden, während sie das doch in einem von  $g_2$  verschiedenen Punkte  $e_2$  von  $g_2 f_2$  tut. Im zweiten Falle beweist man die Unmöglichkeit analog.

2. *E* ist im Endlichen gelegen. Da keine Gerade  $\gamma = ef$  zu  $Z_0$  parallel sein kann, kann sie es auch nicht zu  $Z$  sein, kein  $g$  kann in unendlicher Ferne liegen. *E* liegt aber auch innerhalb angebbarer endlicher Kreise. Sei z. B. *C* ein auf  $Z_0$  senkrechter Kreiszylinder, der  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  völlig in sein Inneres schließt;  $Z_0$  die zu  $Z_0$  parallele untere Stützebene von  $\mathfrak{E}$ ,  $Z_1$  die zu  $Z_0$  parallele obere von  $\mathfrak{F}$ , so bestimmen die beiden Schnitkreise  $\kappa_0$  und  $\kappa_1$  von  $Z_0$  und  $Z_1$  mit *C* einen Kegelmantel *D* mit Scheitel *d*, umhüllt durch die inneren Gemeinstützebenen beider Kreise<sup>2)</sup>, und *E* wird ganz innerhalb des Schnitkreises  $\sigma$  von *D* und *Z* liegen. Irgendein Punkt *a* außerhalb  $\sigma$  in *Z* kann nämlich kein  $g$  sein; es geht kein  $\gamma = aef$  durch *a*; denn jede Gerade *ae* dringt in den begrenzten Halbkegel *D'* (Grundfläche  $\sigma$ , Scheitel *d*) ein, muß also seine Oberfläche in zwei Punkten schneiden;  $\sigma$  kann nicht geschnitten werden, weil seine Ebene *Z* bereits in *a* geschnitten ist, somit liegen die zwei Schnitpunkte auf dem Mantel von *D'*. Also kann die Gerade *ae* die untere Mantelhälfte von *D* nicht mehr schneiden, in deren Inneres sie doch über einen Schnitt eindringen müßte, um zu einem  $f$  zu gelangen.

Jetzt wäre drittens, um *E* als Ovalgebiet zu erweisen, nur noch der Nachweis seiner Abgeschlossenheit erforderlich. Wir können aber auch auf einem etwas andern Wege vorgehen und kommen auf demselben an einigen Sätzen vorbei, deren Aufstellung nicht ganz unnütz erscheint.

Es steht nach dem Erweise der Eintrittigkeit und Endlichkeit von *E* fest, daß *E* durch Hinzunahme aller noch nicht zugehörigen Häufungspunkte *h* von Punkten  $g$  zu einem Oval *X* wird. Denn die Hinzunahme der *h* gibt *E* die noch mangelnde Abgeschlossenheit, ohne ihr offenbar die Endlichkeit und, wie wir gleich sehen werden, die Streckeneigenschaft zu nehmen. Es gehören nämlich nicht nur die  $\overline{g_1 g_2}$ , weil zu *E*, auch zu *X*, sondern auch die  $\overline{g h}$  und  $\overline{h_1 h_2}$ . Es genügt, dies für die  $\overline{h_1 h_2}$  darzutun. Einem  $h_1$  liegen Punkte  $g_1$ , einem  $h_2$  Punkte  $g_2$ , der Strecke  $\overline{h_1 h_2}$  also Strecken  $\overline{g_1 g_2}$  beliebig nahe, so daß sich sämtliche Punkte von  $\overline{h_1 h_2}$  als Häufungspunkte von *E*-Punkten  $g$  und zu *X* gehörig herausstellen.

Was für Punkte des Ovals *X* können nun Punkte *h* sein? Nie können zwei von einem *h* ausgehende, sich gegenseitig verlängernde Halbstrahlen gleichzeitig mit Punkten  $g$  belegt sein, sonst müßte wegen der von *E* erfüllten Streckenbedingung *h* ein  $g$  sein, was seiner Definition widerspricht.

<sup>2)</sup> Leicht ersichtlich bildet der Winkel  $\delta < \frac{\pi}{2}$ , unter dem die Erzeugenden des Kegelmantels die Ebene  $Z_0$  schneiden, eine untere Schranke für die Winkel  $< \frac{\pi}{2}$ , unter welchen die Geraden *ef* die Ebene  $Z_0$  schneiden.



Hieraus läßt sich genau wie bei meinem Beweise des Fundamentalsatzes von den Stützen eines Eigebietes<sup>\*)</sup> ableiten, daß durch  $h$  mindestens eine Gerade geht, die auf ihrer einen Seite von  $E$ -Punkten, also auch von  $X$ -Punkten frei und somit eine Stütze von  $X$  ist.

Sonach kann  $h$  nur ein Begrenzungspunkt von  $X$  sein, und jedes  $E$ <sup>4)</sup> ist aus einem Oval  $X$  durch Weglassung nur bzw. höchstens von Begrenzungspunkten erzeugbar. Es kann die ganze Begrenzung, es können beliebig viele oder wenige Teile oder diskrete Punkte der Begrenzung weggelassen werden. Nur auf den geraden Begrenzungsstrecken ist Vorsicht nötig, da man offenbar auf einer solchen Strecke  $\overline{ab}$  nur Teilstrecken, sei es einzeln, sei es zusammen, weglassen darf, die von den Endpunkten  $a, b$  — unter Einschluß ihrer — ausgehen, übrigens auf die Endpunkte  $a, b$  sich zusammenziehen können, gegen das Innere der Strecke abgeschlossen oder unabhängig sind und sich auch zur ganzen Strecke zusammenschließen dürfen. Weglassungen zwischen beibehaltenen Teilstrecken oder Punkten würden ein unmögliches  $E$  ergeben, das die Streckenbedingung nicht erfüllt. Wir bringen unsere Regel in folgende für die Verallgemeinerung auf Egebiete von mehr Dimensionen günstige Form:

*Bei Bildung eines  $E$  aus einem  $X$  durch Hinwegnahme von Begrenzungspunkten darf von geradlinigen Begrenzungsstrecken — wenn überhaupt etwas von denselben beibehalten wird — nur eine Punktmenge beibehalten werden, welche die Streckenbedingung erfüllt.*

Der zweite Schritt des von uns eingeschlagenen Weges soll zu dem Nachweis führen, daß  $E$  in jeder Richtung seiner Ebene zwei voneinander verschiedene Stützengerade hat. Dies ist bei Mengen, über deren Abgeschlossenheit man im Unsichern ist, durchaus nicht selbstverständlich, wenn man für die Stütze an der Forderung festhält, daß sie mindestens einen Punkt der Menge enthalten muß.

In  $Z_0$  werde ein Geradenbüschel  $\mathfrak{B}$  mit Geraden  $B$  angenommen. In Richtung jedes  $B$  mache man eine Parallelprojektion der dreidimensionalen Eikörper  $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$  auf eine zu  $B$  senkrechte Ebene  $N$ ; das ergibt sicher zweidimensionale Ovalgebiete  $O_e$  und  $O_f$ , die ganz zu verschiedenen Seiten von  $Z_0$  und also auch von der Schnittlinie  $\zeta_0$  der Ebenen  $Z_0$  und  $N$  liegen.  $Z$  und  $Z'$  projizieren sich in Gerade  $\zeta$  und  $\zeta' \parallel \zeta_0$ .

Zwei echte, vollständig getrennte Ovalgebiete  $O_e, O_f$  haben vier verschiedene Gemeinstützen, zwei „äußere“,  $\alpha, \alpha^*$ , und zwei „innere“,  $\iota, \iota^*$ .

<sup>\*)</sup> Vgl. Math. Annalen 100 (1928), S. 634 ff.

<sup>4)</sup> Unter  $E$  ist von hier ab eine Zeit lang nicht oder nicht nur unser spezielles  $E$  — das sich schließlich als abgeschlossen herausstellen wird — sondern jede eintrittige, endliche ebene Figur verstanden.

Die letzteren kommen hier allein in Betracht und sind diejenigen, welche  $O_e$  und  $O_f$  — abgesehen von den Berührungspunkten — zu verschiedenen Seiten von sich liegen haben. Die  $\iota$  schneiden sich in einem Punkte  $s$  im Endlichen und bilden zwei Vollstrahlenwinkel  $\varphi$  und  $\varphi_0$ , deren Größe zwischen 0 und  $\pi$  — mit Ausschluß dieser Werte — liegt. Der eine,  $\varphi_0$ , ist von Ovalpunkten im Innern völlig frei; von dem andern,  $\varphi$ , enthält der eine obere Halbstrahlenwinkel  $\varphi_1$  das Gebiet  $O_e$ , der untere Scheitelhalbstrahlenwinkel  $\varphi_2$  das  $O_f$ . Die Parallele durch  $s$  zu  $\zeta_0$ , nennen wir sie  $\zeta_s$ , zieht durch  $\varphi_0$  <sup>5)</sup>.

Alle diese Ergebnisse für die ebene Projektion lassen sich in den Raum zurückdeuten. Man hat zwei Gemeinstützebenen  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{J}^*$  an  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{F}$ , die — abgesehen von den Berührungspunkten — jede das  $\mathfrak{E}$  und das  $\mathfrak{F}$  zu verschiedenen Seiten von sich liegen haben und sich in einer Geraden  $\sigma$  im Endlichen schneiden; die Winkel  $\varphi$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  bleiben die nämlichen, sind nur jetzt als Winkel zwischen Halb- oder Vollebenen aufzufassen;  $\varphi_1$  enthält  $\mathfrak{E}$ ,  $\varphi_2$  enthält  $\mathfrak{F}$  und die Parallelebene  $Z_s$  durch  $\sigma$  zu  $Z_0$  zieht durch  $\varphi_0$ .

Die parallelen Schnittlinien  $\tau$  und  $\tau^*$  von  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{J}^*$  mit  $Z$  liegen im Endlichen, wie man mit ähnlichen Mitteln beweist wie oben die Endlichkeit von  $E$ .

Die Parallelen  $\tau$  und  $\tau^*$  können nicht zusammenfallen, d. h.  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{J}^*$  können sich nicht auf  $Z$  schneiden; denn täten sie es, so läge der Halbebenenwinkel  $\varphi_1$ , der das  $\mathfrak{E}$  enthalten muß — wie der Halbstrahlenwinkel  $\varphi_1$  das  $O_e$  — oberhalb von  $Z$ , wo  $\mathfrak{E}$  nicht liegen kann.

Es ist also jedes  $\tau$  von seinem  $\tau^*$  verschieden. Auf jedem  $\tau$  (oder  $\tau^*$ ) liegt mindestens ein Punkt von  $E$ . Denn  $\mathfrak{J}$  (bzw.  $\mathfrak{J}^*$ ) muß als gemeinsame Stütze von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  sowohl ein  $e$  als ein — davon getrenntes —  $f$  enthalten, und  $ef$  muß  $Z$  im Endlichen treffen in einem Punkte des Charakters  $g$  auf  $\tau$  (bzw.  $\tau^*$ ).

Eine Seite von  $\tau$ , ebenso von  $\tau^*$ , ist von  $g$ -Punkten völlig frei. Bei  $\tau$  z. B. (wie übrigens auch bei  $\tau^*$ ) ist es die Seite, welche auf der nämlichen Seite  $\lambda$  von  $\mathfrak{J}$  liegt, wie  $\mathfrak{F}$ . Zum Beweise können wir uns auf die ebene Projektion der räumlichen Figur zurückziehen, in der wir noch die Schnitte von  $\iota$  bzw.  $\iota^*$  mit  $\zeta$  durch  $z$  und  $z^*$ , die mit  $\zeta'$  durch  $z'$  und  $z''$  bezeichnen. Sei  $p'$  die Projektion eines  $Z$ -Punktes auf der Seite  $\lambda$ , also auf  $\zeta$  gelegen. Ginge durch  $p$  ein  $\gamma = ef$ , so müßte durch  $p'$  ein Strahl

<sup>5)</sup> Die Behauptungen des letzten Absatzes finden sich bewiesen in meinem Aufsatz „Vom Normalenkegel der Zwischenebenen zweier getrennter Eikörper“, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., 1930, S. 165–169.

Einen früheren Beweis für die vier Stützen zweier getrennter Ovale siehe bei Juel, Indledning i Læren om de grafiske Kurver, D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Skr., 6. Række, math. Afd. X, I (1899), Side 16 o. f.

gehen, der einen  $O_s$ -Punkt  $e'$  mit einem  $O_f$ -Punkte  $f'$  verbindet. Diese Punkte  $e'$  bzw.  $f'$  liegen innerhalb der Dreiecke  $szs^*$  bzw.  $sz'z'^*$ . Da  $p'$  und  $O_f$  auf der entgegengesetzten Seite von  $s$  liegen wie  $\triangle szs^*$  mit  $O_s$ , so liegt  $p'$  außerhalb  $\triangle szs^*$ . Ein Strahl  $p'e'$  muß also, wenn er nicht mit  $\zeta$  zusammenfällt, auf dem sicher kein  $f'$  liegt, die beiden Strecken  $sz$  und  $sz^*$  in  $s$  oder je in einem innern ihrer Punkte schneiden. Ist  $e'$  in  $s$  gelegen, so ist  $s$  sicher kein  $f'$ , weil sonst  $O_s$  und  $O_f$  nicht getrennt wären, und  $p'e' \equiv p's$  verläuft abgesehen von  $s$  sicher außerhalb  $\triangle sz'z'^*$ , kann also auch kein  $f$  enthalten. Schneidet aber  $p'e'$  die Dreiecksseiten  $sz$  und  $sz^*$  im Innern, so hat es sicher mit den Dreiecksseiten  $sz'$  und  $sz'^*$  keinen Punkt gemein; mindestens einer wäre aber doch notwendig, wenn es  $\triangle sz'z'^*$  schnitte oder streifte. Wenn es das aber nicht tut, hat es auch mit  $O_f$  keinen Punkt  $f'$  gemein. Auf einem  $p'e'$  kann also kein  $f'$  liegen; und die Projektion ergibt, daß auch  $p$  kein  $g$  sein kann.

Nach den über  $\tau$  und  $\tau^*$  gemachten Feststellungen ist jetzt klar, daß beides Stützen von  $E$  sind, und daß  $E$  von jeder Richtung seiner Ebene zwei getrennte (parallele) Stützen  $\tau, \tau^*$  hat.

Der dritte Schritt auf unserem Wege (eigentlich Seitenwege) führt zu der Frage: Wieweit wird durch das nachgewiesene Vorhandensein von Stützen die Natur der Menge  $E$  genauer bestimmt?

Wir wußten bereits,  $E$  kann sich von einem gewissen Oval  $X$ , wenn es nicht mit ihm identisch ist, nur durch das Fehlen von Begrenzungspunkten unterscheiden. Wollten wir nun aber einen Punkt an einer gekrümmten Stelle des Umfangs von  $X$  weglassen, so könnte  $E$  dort keine Stütze haben; es hätte dann von der betreffenden Richtung, entgegen unserer letzten Feststellung, höchstens eine Stütze. Für einen Endpunkt, durch den ein ganzes Winkelbüschel von Stützen geht, gilt dieser Schluß in nur noch verstärktem Grade.

Nur die Weglassung von Teilen einer geraden Begrenzungstrecke des Ovals  $X$  raubt dem  $X$  keine der erforderlichen Stützen; die Strecke darf diesmal nicht ganz weggelassen werden.

Unser  $E$  kann sich also von einem Oval  $X$  höchstens durch das Fehlen von Teilen gerader Begrenzungstrecken des Ovalrandes unterscheiden, wobei aber von jeder Begrenzungstrecke ein die Streckenbedingung erfüllender Teil dem  $E$  gewahrt bleiben muß.

Im folgenden haben wir meist keinen Grund mehr, die  $\mathfrak{J}$  und  $\tau$  von den  $\mathfrak{J}^*$  und  $\tau^*$  getrennt zu halten.

Obwohl nun die erzielten Ergebnisse uns bereits in die Lage setzen, mit einem vierten Schritt unser Ziel zu erreichen und zu schließen:

„Die Stützen  $\tau$  der Figur  $E$  stimmen mit dem vollständigen System der Stützen eines Ovals  $X$  überein, das durch sie bestimmt wird,“ oder

„Die inneren Gemeinstützen von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  schneiden auf  $Z$  ein von ihnen umhülltes Oval  $X$  aus,“

so wollen wir doch jetzt auch noch die Abgeschlossenheit von  $E$  und dadurch seine völlige Identität mit  $X$  nachweisen.

Sei  $p$  ein Punkt auf einer geraden Strecke  $q$  des Umfangs von  $X$ , der angenommenermaßen *nicht* zu  $E$  gehört, so kann man eine unendliche Folge von inneren Punkten

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$$

des Ovals  $X$  und somit auch der Figur  $E$  auswählen, welche  $p$  als ihrem Grenzpunkt sich annähern. Von jedem  $p_n$  geht mindestens ein ins Unendliche laufender Halbstrahl  $\chi_n = p_n e_n f_n$  aus. Für jedes  $n$  sei ein bestimmtes  $\chi_n$  bzw. auch  $e_n$  und  $f_n$  ausgewählt. Man schlage dann um  $p$  als Mittelpunkt eine endliche Kugel, die  $X$ ,  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  in sich schließt. Dann werden alle Punkte  $p_n$ ,  $e_n$  und  $f_n$  ins Innere der Kugel fallen, und jedes  $\chi_n$  wird die Kugeloberfläche in einem Punkte  $q_n$  schneiden. Die  $q_n$  müssen auf der endlichen Kugeloberfläche mindestens einen Häufungspunkt  $q$  haben. Man kann daher eine unendliche Folge  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots$  ( $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$ ) herausheben, die mit wachsendem  $n$  sich dem  $q$  als Grenzpunkt annähert. Die Strecken  $\overline{p_{a_n} q_{a_n}}$  nähern sich also mit wachsendem  $n$  der Strecke  $\overline{pq}$  als ihrer Grenzlage. Auf jedem  $\overline{p_{a_n} q_{a_n}}$  kann ein  $e_{a_n}$  und  $f_{a_n}$  festgestellt werden. Von jedem  $e_{a_n}$  fälle man etwa das Lot auf  $pq$ ; die unendlich vielen Fußpunkte  $\bar{e}_{a_n}$  werden auf  $\overline{pq}$  einen Häufungspunkt haben müssen, der offenbar zugleich ein Häufungspunkt der  $e_{a_n}$  ist, und  $e_p$  heißen möge. Ebenso erhält man ein  $f_p$ . Wegen der Abgeschlossenheit von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  sind die beiden Punkte auch in der Tat Punkte von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$ . In  $p e_p f_p q$  ist nun ein durch  $p$  gehender Strahl  $\gamma$  nachgewiesen,  $p$  ist ein  $g$ ; die Annahme, daß es nicht zu  $E$  gehört, läßt sich nicht aufrechterhalten.  $E$  ist vollkommen abgeschlossen,  $E$  und  $X$  sind identisch. Ganz das nämliche wie für  $Z$  und  $E$  gilt natürlich auch für  $Z'$  und  $F$ .

Die Ableitung der  $\mathfrak{J}$ , aus denen sich ihrerseits wieder die  $\tau$  ergaben, aus den  $\iota$  der ebenen Projektionen läßt erkennen, daß wir in den  $\mathfrak{J}$  das vollständige System  $J$  der inneren Gemeinstützebenen  $\mathfrak{J}$  von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  vor uns haben. Und jetzt sehen wir, daß wir dieses System  $J$  statt aus den beiden Eikörpern  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  aus den beiden Ovalen  $E$  und  $F$  ableiten können, indem wir alle inneren Gemeinstützebenen von  $E$  und  $F$  legen, d. h. in jeder Richtung  $B$  die zueinander parallelen und nach verschiedenen Seiten liegenden Stützgeraden  $\tau$  und  $\tau'$  bzw.  $\tau^*$  und  $\tau^{*'} - „Gegenstützen“$  wollen wir diese Paare nennen — durch Ebenen miteinander verbinden.

Die Menge der Gebilde  $J$ , erzeugbar aus zwei Eiflächen oder Eikörpern  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{F}$ , ist also sicher nicht größer wie die Menge der  $J$ , die aus zwei Ovalen in parallelen Ebenen gewonnen werden können.

Auch ist damit erwiesen, daß das Gebilde  $J$  aus den inneren Gemeinschaftsebenen von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  eine abwickelbare Fläche umhüllt. Denn bei dem  $J$  von  $E$  und  $F$  wird dies niemand bezweifeln.

Betrachten wir zunächst Ovale  $E$ ,  $F$ , die überall gekrümmt sind, d. h. die Bedingung erfüllen, daß jeder endlichen von Null verschiedenen Drehung der Stütze ein endlicher von Null verschiedener Fortschritt des Berührungspunktes entspricht, und umgekehrt. Die Stützgeraden, aus denen sie erzeugt werden, bilden eine zyklische Reihenfolge, wenn wir die Stützen, von einer bestimmten an, z. B. im Uhrzeigersinne durchlaufen, d. h. so, daß ihre Richtungen sich aufeinanderfolgend so ändern wie die Richtungen des Uhrzeigers. In der Redeweise des unendlich Kleinen ausgedrückt besteht das Längenelement der Ovalkurve  $E$  aus dem Stück einer Stütze, das von der vorhergehenden und folgenden Nachbarstütze ausgeschnitten wird. In  $J$  sind immer zwei parallele, nach verschiedenen Seiten liegende Längenelemente  $ds$ ,  $ds'$  der Ovalkurven  $E$  und  $F$  durch ein  $\mathfrak{S}$  verbunden. Der Uhrzeigersinn, in dem die  $\tau$  bzw.  $\tau'$  durchlaufen werden, überträgt sich auf die Punkte der beiden Kurven in der Weise, daß  $ds$  und  $ds'$  in entgegengesetzter Pfeilrichtung durchlaufen werden. Die Schnittlinien von  $\mathfrak{S}$  mit den Nachbargemeinschaftsebenen verbinden also entgegengesetzt liegende Endpunkte von  $ds$  und  $ds'$  miteinander, etwa den vorderen  $a$  von  $ds$  mit dem hinteren  $b'$  von  $ds'$ , und umgekehrt  $a'$  mit  $b$ .

Daraus folgt, daß die Geraden  $ab'$  und  $a'b$ , die man als aufeinanderfolgende „erzeugende Gerade“  $\varepsilon$  von  $J$  bezeichnen kann, sich in einem Punkte  $c$ , der zwischen  $Z$  und  $Z'$  liegt, schneiden müssen. Durch die  $c$  wird die Rückkehrkante  $C$  der Fläche  $J$  bestimmt. Auf die möglicherweise sehr irreguläre, oszillierende, d. h. spitzenreiche Natur von  $C$  einzugehen liegt kein Anlaß vor, da die Abwickelbarkeit der Fläche durch Abnormitäten von  $C$  nicht gestört wird.

Als Aufbauflächenenelement  $dJ$  von  $J$  ist nun der von den  $ds$  überspannte, bei unsern jetzigen Voraussetzungen unendlich kleine Vollstrahlenwinkelflächenstreifen zwischen  $ab'$  und  $a'b$  anzusehen.

Für den jetzigen regulären Fall ergeben sich noch folgende Sätze:

1. Es ist kein Unterschied zwischen der durch die erzeugenden Ebenen  $\mathfrak{S}$  und der durch die erzeugenden Geraden  $\varepsilon$  beschriebenen Fläche  $J$ ; ein  $\varepsilon$  verbindet immer Berührstellen von „Gegenstützen“ miteinander.
2. Wie die  $\tau$  und  $\tau'$  und ihre Berührungspunkte mit  $E$  und  $F$  bilden auch die  $\varepsilon$  eine stetige zyklische Reihenfolge.

3. So wenig auf den  $\tau$  oder  $\tau'$  zwei endlich getrennte Randpunkte von  $E$  oder  $F$  liegen, so wenig liegen auf einem  $\mathfrak{J}$  zwei endlich getrennte  $\varepsilon$ .

4. Keine zwei  $\varepsilon$  sind parallel zueinander. Denn wäre  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$  und  $\mathfrak{J}_1$  das zu  $\varepsilon_1$  gehörige  $\mathfrak{J}$ , so würde  $\varepsilon_2$  mit den darauf liegenden Punkten  $e$  und  $f$  auf einer Seite von  $\mathfrak{J}_1$  liegen, was mit der Definition einer *inneren* Gemeinstützebene  $\mathfrak{J}$  von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  nicht vereinbar ist. Nur wenn  $\mathfrak{J}_1$  auch durch  $\varepsilon_2$  ginge, würde dieser Widerspruch wegfallen; dafür würde sich aber der andere ergeben, daß ein  $\mathfrak{J}$  zwei getrennte  $\varepsilon$  enthielte, was nach 3. ausgeschlossen ist.

Nun sei auch das Vorkommen von Stellen an  $E$  und  $F$  in Betracht gezogen, bei denen ein endlicher Fortschritt des Begrenzungskurvenpunktes mit einem Stehenbleiben der Stütze, oder eine endliche Drehung der Stütze mit einem Stehenbleiben des Kurvenpunktes verbunden ist, d. h. das Vorkommen von geraden Begrenzungsstellen oder von Ecken.

Stellen wir zunächst folgendes fest: Wenn die Begrenzung eines der beiden Ovale, z. B. von  $E$ , eine endliche gerade Strecke  $\overline{ab}$  aufweist, die natürlich auf einer Stütze liegt, so muß  $F$  auf der Gegenstütze eine parallele — nicht notwendig gleichgroße — gerade Strecke  $\overline{a'b'}$  aufweisen. Denn wäre das betreffende, zu  $\overline{ab}$  parallele Längenelement der Kurve  $F$  unendlich klein, so daß  $a'$ ,  $b'$  und  $c$  praktisch in einen einzigen Punkt  $a'$  zusammenfielen, so würden die Berührstrecken oder Berührflächen, welche das Dreieck  $aba'$  mit  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  gemein haben müßte und welche in dem von  $\overline{aa'}$  überspannten Halbstrahlenwinkel zwischen  $a'a$  und  $a'b$  eine Verbindung zwischen den Schenkeln herstellen müßten, wie das ganze Dreieck auf einer Seite jeder Nachbargemeinstützebene der Gemeinstützebene  $\mathfrak{J} = aba'$  liegen; denn diese Nachbarstützebenen  $\mathfrak{J}_1$ ,  $\mathfrak{J}_2$  schneiden  $\mathfrak{J}$  nach  $aa'$  und  $ba'$ .  $\mathfrak{J}_1$  und  $\mathfrak{J}_2$  können aber als *innere* Gemeinstützen von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  Elemente von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  *nicht* auf derselben Seite liegen haben. Der Schluß wird hinfällig nur dann, wenn  $a'$ ,  $b'$ ,  $c$  ein endliches Dreieck bilden,  $\overline{a'b'}$  endliche Länge hat.

Während im regulären Falle, d. h. bei durchwegs gekrümmten Ovalen, die Aufbauelemente der Fläche  $J$  aus lauter ebenen Winkelflächen unendlich kleinen Winkels bestehen, tritt im gegenwärtigen Falle eine Winkelfläche endlichen Winkels auf, eben des von  $\overline{ab}$  und  $\overline{a'b'}$  überspannten Winkels zwischen  $ab'$  und  $ba'$ .

Und während im regulären Falle zwischen dem  $J$ , beschrieben durch die Gemeinstützebenen, und dem  $J$ , beschrieben durch die erzeugenden Geraden, kein Unterschied ist, würde sich jetzt ein solcher ergeben, wenn wir nicht eine besondere Bestimmung treffen. Die Definition von erzeugenden Geraden als Verbindungsgeraden der Berührpunkte auf Gegenstützen würde nämlich *jede* Verbindungsgerade eines Punktes von  $ab$  mit einem



von  $a'b'$  als erzeugende Gerade erscheinen lassen und damit der Fläche  $J$  ein ebenes, von den regulär erzeugten Nachbarpartien der Fläche  $J$  sich teilweise absplittendes Stück der Form I adjungieren (s. Fig. 4), während bei Erzeugung von  $J$  durch die  $\mathfrak{J}$  nur ein in den Zusammenhang der übrigen Fläche sich einfügendes ebenes Stück der Form II auftritt, und hiernach als erzeugende Gerade zwischen  $\overline{ab}$  und  $\overline{a'b'}$  ausschließlich die durch  $c$  gehenden Verbindungsgeraden charakterisiert erscheinen.

Da wir natürlich eine einheitliche Definition von  $J$  bevorzugen, und die Erzeugung durch die Gemeinstützebenen hier das organischere Resultat ergibt, erklären wir, unter „erzeugenden Geraden“ von  $J$ , welche Punkte von  $\overline{ab}$  mit Punkten von  $\overline{a'b'}$  verbinden, hierfür nur solche Gerade verstehen zu wollen, welche zugleich durch  $c$  gehen. Wir haben dann überdies den Vorteil, daß die auf S. 309 und 310 für den regulären Fall geltenden Sätze 2 und 4, wie man leicht sieht, auch für die  $E$  und  $F$  mit geraden Begrenzungsstellen gültig bleiben. Der Beweis bei 4. ändert sich insofern, als ein  $\mathfrak{J}$  jetzt zwar zwei getrennte  $\varepsilon$  enthalten kann, aber doch keine parallelen.

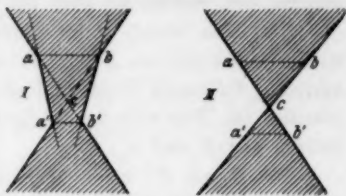


Fig. 4.

Liegt an einem der Ovale  $E, F$  — sei es  $E$  — eine Ecke  $k$  vom Knickungswinkel  $\varphi$  vor, so muß  $F$  auf der entgegengesetzten Seite eine Ecke  $k'$  aufweisen, deren Knickungswinkel die gleiche Größe und parallele Schenkel hat. Jede andere Annahme führt auf Widersprüche. Nehmen wir zunächst an,  $\mu$  sei eine „mittlere“ Stütze von  $E$  in  $k$ , d. h. eine, die nicht gerade mit der Richtung der von  $k$  ausgehenden beiden Halbtangenten zusammenfällt, sondern im Innern des von den Stützgeraden an  $k$  gebildeten Stützenbüschelwinkels liegt, und die Gegenstütze  $k'$  von  $F$  berühre  $F$  an einer regulären Stelle, habe also ein von 0 verschiedenes, unendlich kleines Längenelement  $ds' = \overline{a'b'}$  mit dem Rand von  $F$  gemein. Den Nachbarstützen  $k'_1$  und  $k'_2$  von  $k'$ , die durch  $a'$  und  $b'$  gehen, entsprechen an  $E$  Gegenstützen  $k_1$  und  $k_2$ , die durch  $k$  gehen. An das unendlich schmale Dreieck  $ka'b'$  lassen sich nun dieselben Schlüsse anknüpfen, wie vorhin bei einer endlichen geraden Randstrecke  $\overline{ab}$  an das endliche Dreieck  $aba'$ ; es ergibt sich die Unmöglichkeit unserer Annahme, daß  $F$  bei  $k'$  regulär geformt sein könne. Die Unmöglichkeit bleibt bestehen, verstärkt sich, möchte man sagen, wenn  $\overline{a'b'}$  endlich groß angenommen wird. Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß auch  $k'$  eine Ecke ist. Hätte aber diese Ecke nicht parallele Schenkel und gleiche Knickungsgröße mit der Ecke  $k$ , so würde sich die Unmöglichkeit der



Annahme mit genau denselben Mitteln wie eben dartun lassen; an Stelle von  $\varphi$  würden im Beweis nur Teilwinkel zu treten haben, die — kurz ausgedrückt — bei einer Art geometrischer Subtraktion des Knickwinkels  $k$  von dem bei  $k'$  übrigbleiben.

Offenbar stört auch das Auftreten von Ecken an  $E$  und  $F$  nicht die Gültigkeit der Sätze 2 und 4 auf S. 309 und 310; zyklische Reihenfolge und Nichtparallelität der  $\varepsilon$  bleiben gesichert.

Nachdem aus dem Bisherigen folgt, daß Singularitäten in endlicher Anzahl auf dem Rande von  $E$  und  $F$  der Gültigkeit unserer Sätze keinen Eintrag tun, werden sie auch bei unendlicher Häufung nicht stören können.

NB. Man könnte  $J$  statt mittels  $E$  und  $F$  auch erzeugen durch  $E$  und ein Oval  $E''$ , wo  $E''$  den Schnitt einer Ebene  $Z''$  mit den Geraden  $ef$  vorstellt, die genau dieselben Bedingungen erfüllt wie  $Z$ , aber von  $Z$  verschieden ist. Nur wäre dann  $J$  die abwickelbare Fläche der äußeren Gemeinstützen von  $E$  und  $E''$ .

Für  $E$  und  $E''$  könnte natürlich auch  $F$  und ein  $F''$  in einer zu  $Z_0$  parallelen, von  $Z'$  verschiedenen Ebene unterhalb  $\mathfrak{F}$  dienen.

Wir haben nun bewiesen, daß der durch die Geraden  $ef$  gebildete Körper von Ebenen, die parallel sind zu Zwischenebenen und die oberhalb  $\mathfrak{E}$  oder unterhalb  $\mathfrak{F}$  verlaufen, nach Ovalen geschnitten wird. Wir haben gesehen, daß diese Schnitte auch bezeichnet werden können als Schnitte mit der von den inneren Gemeinstützen der Körper  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  erzeugten abwickelbaren Fläche  $J$ . Welche Beziehung hat nun dieser Satz zu dem ursprünglich ins Auge gefaßten von der ovalen Natur des Parallelkegels  $\mathfrak{E}$  zu  $J$ ? Insofern  $J$  und der Mantel von  $\mathfrak{E}$  offenbar die nämliche Schnittlinie mit der unendlich fernen Ebene haben, ist der ursprünglich beabsichtigte Satz identisch mit der Behauptung:

„Der Schnitt der unendlich fernen Ebene mit  $J$  ist als Oval zu betrachten“,

und man könnte ihn somit als speziellen Fall des neuen Satzes und infolge der Stetigkeit der Verhältnisse als durch letzteren für bewiesen erachten.

Das hieße sich aber doch den Beweis etwas zu leicht machen. Wir wollen ihn lieber noch selbständig gestalten, wobei auch für die Beweistechnik in diesen Dingen noch ein wenig zu lernen ist.

Wir werden zeigen, daß  $\mathfrak{E}$  von einer Ebene im Endlichen nach einem Oval geschnitten werden kann.

Wir zeigen zunächst, daß  $\mathfrak{E}$  eine Eigenschaft besitzt, die der Streckeneigenschaft ebener Ovale analog ist.

Da für die Schnitte  $\parallel Z_0$ , die über  $\mathfrak{E}$  bis ins Unendliche hinaus liegen, erkenntmaßen der Körper der  $ef$  mit der Fläche  $J$  völlig äquivalent ist,

d. h. von ihr begrenzt wird, können wir für die Untersuchung von  $\mathfrak{C}$  bald auf den Körper der  $ef$ , bald auf  $J$  zurückgreifen.

Fürs erste sei er entstanden gedacht, indem man von einem festen Punkte die Parallelstrahlen zieht zu sämtlichen  $ef$ , und zwar genügt es, die nach oben gerichteten Halbstrahlen zu ziehen, so daß von hier ab  $\mathfrak{C}$  immer nur einen nach oben ins Unendliche laufenden Halbkegel bezeichnet.

Seien  $\chi_1, \chi_2$  zwei solche ganz beliebig gewählte Halbstrahlen von  $\mathfrak{C}$ , so gibt es sicher parallele Strahlen  $f_e$ :

$$f_1 e_1 \parallel \chi_1; \quad f_2 e_2 \parallel \chi_2.$$

Wir legen nun den Scheitel von  $\mathfrak{C}$  in den Punkt  $f_1$  und schneiden auf dem zu  $f_2 e_2$  parallelen Kegelhalbstrahl die Strecke  $\overline{f_1 e'_2} = \overline{f_2 e'_2}$  ab (siehe Fig. 5). Zieht man nun durch den Winkel  $e_1 f_1 e'_2$  von  $f_1$  aus einen beliebigen Halbstrahl, der  $e_1 e'_2$  in  $e'_3$  schneiden möge, so zeigt sich, daß es parallel zu  $f_1 e'_3$  sicher ein  $ef$  gibt, also auch  $f_1 e'_3$  ein Kegelstrahl ist. Man ziehe nur durch  $e'_3$  eine Gerade parallel zu  $e'_2 e_2$  (und  $f_1 f_2$ ), so ergibt sich auf  $\overline{e_1 e_2}$  ein Punkt  $e_3$ , der nach dem Streckensatz zu  $\mathfrak{C}$  gehört, und ziehe weiter von  $e_3$  aus eine Parallele zu  $f_1 e'_3$ , die offenbar  $\overline{f_1 f_2}$  in einem Punkte  $f_3$  schneiden muß, der zu  $\mathfrak{C}$  gehört;  $f_3 e_3$  ist der erwünschte zu  $f_1 e'_3$  parallele  $ef$ -Strahl. Also:



Fig. 5.

Wenn zwei vom Kegelscheitel nach oben gerichtete Halbstrahlen zu  $\mathfrak{C}$  gehören, gehören alle Halbstrahlen des von ihnen gebildeten Winkels  $< \pi$  zu  $\mathfrak{C}$ .

Daraus folgt, daß die Figur, nach welcher  $\mathfrak{C}$ , dessen Scheitel immer noch in  $f_1$  festgehalten werde, von Parallelebenen zu  $Z_0$  geschnitten wird, die Streckenbedingung erfüllt.

Die Endlichkeit der Schnittfigur folgt leicht unter Verwendung der Anmerkung <sup>2)</sup>, wonach die Neigungen der zu den  $ef$  parallelen  $\mathfrak{C}$ -Strahlen gegen  $Z_0$  nicht unter einen von 0 verschiedenen Winkel herabsinken können.

Unter Benützung früher gewonnener Einsichten steht sonach schon fest, daß der Schnitt von  $\mathfrak{C}$  mit  $Z$  ein Oval ist, dem höchstens Teile der Begrenzung fehlen könnten.

Die Beschaffenheit der Begrenzung untersuchen wir aber besser, indem wir auf die andere Erzeugungsart des Kegels zurückgreifen, und ihn mittels der durch den Scheitel gelegten Parallelebenen zu den  $\mathfrak{Z}$  umhüllen, noch besser, seinen Mantel durch die aus dem Scheitel gezogenen Parallelen  $\varepsilon'$  zu den erzeugenden Geraden  $\varepsilon$  von  $J$  beschreiben.

Aus Gründen leichter Beschreibung verlegen wir jetzt den Scheitel des Kegels in den bzw. einen der Randpunkte  $t$  von  $E$ , der eine Stütze  $\tau$  (auf  $\mathfrak{J}$ ) hat, die an  $E$  sagen wir nach der rechten Seite liegt. Ferner legen wir — weil der Schnitt von  $Z$  mit dem Kegel jetzt ein Punkt ist — über  $Z$  noch eine Ebene  $Z'' \parallel Z_0$  und bezeichnen ihren Schnitt mit  $\mathfrak{C}$  durch  $C''$ .

Wir sahen oben, daß die  $\varepsilon$  eine stetige zyklisch geschlossene Folge bilden und daß keine zwei von ihnen zueinander parallel sind, falls nur bezüglich der geraden Stellen am Rande von  $E$  und  $F$  eine passende Bestimmung getroffen wird.

Daraus folgt, daß die Halbstrahlen  $\varepsilon'$  ebenfalls eine stetige geschlossene Folge, und zwar ohne Doppelstrahl bilden, daher auf  $Z''$  einen stetig zusammenhängenden geschlossenen Linienzug ohne Doppelpunkt ausschneiden.

Wüßten wir nun — was noch nicht selbstverständlich —, daß die  $\varepsilon'$  die Mantelstrahlen von  $\mathfrak{C}$  sind, so würde, weil alle  $\varepsilon$  zu  $J$  gehören, der ganze Mantel aus den  $\varepsilon'$  zu  $\mathfrak{C}$ , der ganze Rand von  $C''$  zu  $C''$  gehören,  $C''$  somit als abgeschlossen und schließlich als richtiges Oval erwiesen sein. Die  $\varepsilon'$  werden Mantelstrahlen von  $\mathfrak{C}$  sein, wenn die Parallelebenen aus  $t$  zu den  $\mathfrak{J}$  Stützebenen des Halbk Kegels  $\mathfrak{C}$  sind. Es genügt, dies für das zu dem herausgegriffenen  $\tau$  gehörige  $\mathfrak{J}$  zu zeigen, das bei der für den Kegelscheitel gewählten Lage  $t$  mit der Parallelebene zu  $\mathfrak{J}$  durch  $t$  zusammenfällt.

Zum Beweise greifen wir auf die Seite 305 eingeführte ebene Projektion in Richtung  $\tau$  unserer räumlichen Figur zurück, die wir noch durch die Schnittlinie  $\zeta''$  von  $Z''$  mit  $N$  ergänzen, und in der wir die Schnittpunkte von  $t$  (das  $O_l$  links,  $O_r$  rechts berühre) mit  $\zeta$ ,  $\zeta'$  und  $\zeta''$  — als Projektionen von  $\tau$ ,  $\tau'$  und einer parallelen Linie  $\tau''$  — mit eben diesen Buchstaben bezeichnen, vgl. Fig. 6.

Bemerken wir zunächst, daß  $\mathfrak{J}$  mindestens ein  $ef$  und mit der Parallelen zu  $ef$  aus  $t$  auch Punkte von  $\mathfrak{C}$  enthält, was ja eine Stützebene von  $\mathfrak{C}$  tun muß. Es ist dann nur noch zu zeigen, daß alle nicht in  $\mathfrak{J}$  liegenden, an der Bildung des Kegelkörpers beteiligten Halbstrahlen auf einer einzigen Seite von  $\mathfrak{J}$  liegen. Es wird das nach unsern Dispositionen die linke sein; und die gewünschte Lage der  $\varepsilon'$  wird schon gesichert sein, wenn nur ihre Projektionen in die ebene Figur als links von  $t$  liegend nachgewiesen werden. Die Projektion eines beliebigen  $\varepsilon'$  erhält man aber, wenn man parallel zur Projektion eines beliebigen  $\varepsilon$  einen Halbstrahl aus  $\tau$  (das auch Projektion von  $t$  ist) nach oben zieht.

Es seien  $e, f$  zwei nicht in  $\mathfrak{J}$  liegende Punkte von  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{F}$ ,  $o_e$  und  $o_f$  ihre Projektionen in  $N$ . Auf  $\overline{o_f o_e}$  liegt notwendig der Schnittpunkt  $s_1$  von  $o_f o_e$  mit  $t$ , und  $s_1$  liegt auf  $t$  sicher zwischen  $\tau'$  und  $\tau$ .

Der Halbstrahl  $s, o_s$ , nach oben gehend, liegt mit  $O_s$  auf der nämlichen Seite von  $t$ , folglich wird auch sein Schnittpunkt  $o''$  mit  $Z''$  auf dieser, in unserem Falle der linken Seite, liegen.

Zieht man nun zu  $s_1 o_s$  parallel aus  $\tau$  den Halbstrahl nach oben, so ist er die Projektion eines Kegelstrahls  $\varepsilon''$ , und dieser muß  $\zeta''$  zwischen  $o''$  und  $\tau''$  schneiden, weil  $\tau$  zwischen  $s_1$  und  $\tau''$  liegt, in einem Punkte  $d''$ , der somit auch links von  $\tau''$  liegt.

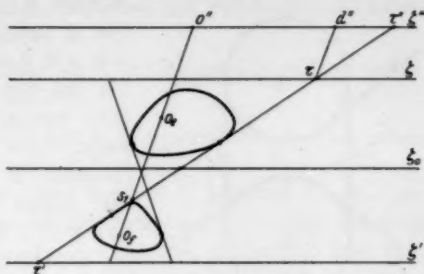


Fig. 6.

Weil nun  $\tau d''$  die Projektion eines beliebigen, nicht in  $\mathfrak{J}$  liegenden Kegelstrahls,  $d''$  die eines beliebigen nicht auf  $\tau$  liegenden Punktes der Schnittfigur  $C''$  von  $\mathfrak{C}$  und  $Z''$  ist, folgt in Anbetracht von früher Gesagtem, daß  $\mathfrak{C}$  und  $C''$  Punkte nur auf  $\mathfrak{J}$  und links von  $\mathfrak{J}$  liegen hat, und  $\mathfrak{J}$  bzw. die Parallelebene zu  $\mathfrak{J}$  durch  $t$  Stützebene von  $\mathfrak{C}$ ,  $\tau''$  Stützgerade von  $C''$  ist.

Alles zusammengefaßt ist nun der Ovalcharakter von  $\mathfrak{C}$  bewiesen.

### Projektivische Behandlung des Problems.

Es gibt einen einfacheren Weg als den oben eingeschlagenen, um die Ovalschnitte der Fläche  $J$  nachzuweisen.

Man kann sich den Körper  $\mathfrak{R}(ef)$  der  $ef$  zusammengesetzt denken aus zwei Teilen, dem Körper  $\mathfrak{R}(\overline{ef})$  der endlichen und dem Körper  $\mathfrak{R}(\underline{ef})$  der unendlich großen Strecken  $ef$ . Wir stellen uns also jetzt auf den projektivischen Standpunkt, nach welchem eine Gerade nach beiden Seiten zu dem nämlichen unendlich fernen Punkte hinführt. Natürlich gilt nicht etwa die Gleichung

$$\mathfrak{R}(ef) = \mathfrak{R}(\overline{ef}) + \mathfrak{R}(\underline{ef})$$

in dem Sinne, daß links und rechts die den Körper bildenden Punkte in derselben Multiplizität, oder gar auf beiden Seiten nur einfach vorhanden wären. Insbesondere ist, da wir die Strecken als abgeschlossen betrachten, von vornherein klar, daß die Eikörper  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{J}$  sowohl dem  $\mathfrak{R}(\overline{ef})$  als dem  $\mathfrak{R}(\underline{ef})$  angehören.

Die Gleichung hat nur den Sinn, daß jeder Punkt, der zu  $\mathfrak{R}(ef)$  gehört, auch in der Summe der Körper  $\mathfrak{R}(\overline{ef})$  und  $\mathfrak{R}(\underline{ef})$  vorhanden ist, und umgekehrt.

Auch darf man sich durch zu oberflächliches Anschauen oder Vorstellen von Figuren nicht verleiten lassen, zu glauben, daß den beiden

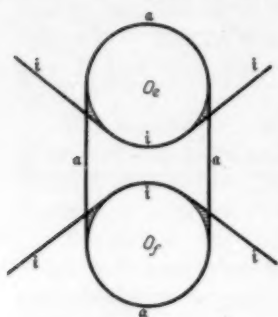


Fig. 7.

Körpern  $\mathfrak{R}(ef)$  und  $\mathfrak{R}(ef\bar{e})$  nur die Punkte von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  gemeinsam wären. Man denke sich z. B. durch Rotation bestehender Fig. 7 um die Symmetrieachse  $O_e O_f$  eine räumliche erzeugt, dann entstehen durch die beiden Ovale (Kreise)  $O_e$  und  $O_f$  Eikörper (Kugeln)  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$ , und durch Rotation der Linien  $a$  und  $i$  die Oberflächen von  $\mathfrak{R}(ef\bar{e})$  und  $\mathfrak{R}(ef)$ . Die durch Rotation der schraffierten Zwickel entstehenden Ringe enthalten Punkte, die den Körpern  $\mathfrak{R}(ef\bar{e})$  und  $\mathfrak{R}(ef)$  gemeinsam sind, ohne doch  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  anzugehören.

Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück.  $\mathfrak{R}(ef\bar{e})$  ist nichts anderes als der kleinste Eikörper, der  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  in sich enthält. Dies darf als bekannt vorausgesetzt werden<sup>9)</sup>. Als Eikörper besitzt  $\mathfrak{R}(ef\bar{e})$  eine wohldefinierte Oberfläche  $S$ , über die es gut sein wird, hier einige Bemerkungen einzuschieben.

Zur Hintanhaltung eines sich leicht aufdrängenden Fehlschlusses sei zunächst folgendes gesagt: Wenn  $e'$  und  $f'$  die äußersten Punkte sind, die eine Gerade  $ef$  mit  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{F}$  gemein hat, so daß also die Gerade den Körper  $\mathfrak{E}$  bei  $e'$ , den Körper  $\mathfrak{F}$  bei  $f'$  gegen das Unendliche hin verläßt, ohne einen der beiden Körper noch einmal zu treffen, so können  $e'$  und  $f'$  zwar Begrenzungspunkte von  $\mathfrak{R}(ef\bar{e})$  sein, sie müssen es aber nicht. Man kann das aus der Fig. 7 entnehmen, wenn man innere Punkte von zweien der schraffierten Zwickel, die diagonal liegen, miteinander verbindet. Noch leichter ist es ersichtlich aus Fig. 8, wo an  $f'e'$  sich noch die



Fig. 8.

Strecke  $e'e''$  als zu  $\mathfrak{R}(ef\bar{e})$  gehörig anschließt. — Über die Zusammensetzung von  $S$  werden wir auf folgende Weise klar:

Die Oberfläche eines Eikörpers besteht aus den auf seinen Stützebenen liegenden Körperpunkten. Die Stützebenen des kleinsten Eikörpers  $\mathfrak{R}(ef\bar{e})$ , der  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  enthält, sind aber identisch mit denjenigen Stützebenen von  $\mathfrak{E}$  und von  $\mathfrak{F}$ , die  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  auf der nämlichen Seite liegen haben. Zu diesen gehören:

<sup>9)</sup> Man vergleiche etwa meinen Aufsatz „Über das durch eine beliebige endliche Figur bestimmte Eigeilde“, Boltzmann-Festschrift 1904, Leipzig bei J. A. Barth, S. 94 u. ff.

1. die äußeren Gemeinstützebenen  $G$  von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$ ; ihre Berührungspunkte mit  $S$  bezeichnen wir als Menge  $\alpha$ ;
2. die Stützebenen von  $\mathfrak{E}$  allein, die  $\mathfrak{F}$  auf der nämlichen Seite haben wie  $\mathfrak{E}$ ; ihre Berührungpunktmenge heiße  $\beta$ ;
3. die Stützebenen von  $\mathfrak{F}$  allein, die  $\mathfrak{E}$  auf der nämlichen Seite haben, wie  $\mathfrak{F}$ ; ihre Berührungpunktmenge heiße  $\gamma$ .

Zu 1. Die Punkte, die ein  $G$  mit  $\mathfrak{R}(\overline{ef})$  gemein hat, werden jedenfalls erschöpft (unter Umständen zum Teil vielfach, durch die Verbindungsstrecken  $v$  der auf  $G$  liegenden  $e$  mit den auf  $G$  liegenden  $f$ ; die  $e$  auf  $G$  bilden — allgemein gesprochen — ein Ovalgebiet  $O_{(e)}$  — das allerdings meist in einen Punkt oder in eine Strecke entartet, gelegentlich aber auch zwei Dimensionen annimmt —, die  $f$  auf  $G$  ein Oval  $O_f$ ; und die  $v$  erfüllen ein Ovalgebiet  $O(\overline{ef})$ , ein ebenes Gebiet, das also ganz analog definiert ist, wie das räumliche  $\mathfrak{R}(\overline{ef})$ .  $O(\overline{ef})$  gehört zur abwickelbaren Fläche  $A$ , und ist im regulären, einfachsten Falle eine Strecke auf einer erzeugenden Geraden von  $A$ . Also die Flächen  $S$  und  $A$  haben einen Teil  $\bar{A}$ , bestehend aus den sämtlichen  $O(\overline{ef})$ , gemeinsam.

Es würde leicht zu erhärten sein, daß diese  $O(\overline{ef})$  im allgemeinen einen ausgeprägt ringförmigen Zusammenhang haben; bei Entartungen von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  kann aber auch dieser Ring entarten.

Zum Beispiel, wenn  $\mathfrak{E}$  in einen Punkt zusammenschrumpft, während  $\mathfrak{F}$  körperlich bleibt, geht der Ring in einen begrenzten Kegelmantel über; die eine Begrenzungskurve des Ringes hat sich auf einen Punkt zusammengezogen. Wenn aus  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  zwei sich überkreuzende Strecken werden, wird der Ring zur geschlossenen Fläche des durch diese Strecken bestimmten Tetraeders; die beiden Begrenzungskurven des Ringes sind als auf Punkte oder Strecken zusammengezogen zu erachten. Wenn die Körper in zwei Ovale derselben Ebene übergehen, wird  $\bar{A}$  wieder ein Oval  $O(ef)$ , dessen Fläche man doppelt rechnen und dessen beide Blätter man nur seitlich längs der beiden äußern Gemeinstützen zusammengeheftet annehmen mag. Wenn aus den Körpern zwei Punkte werden, kommt eine gerade Strecke, die man als eine unendlich dünne Röhre auffassen kann.

Zu 2. Ein weiterer Teil der Oberfläche von  $\mathfrak{R}(\overline{ef})$  besteht aus einer „Haube“  $H_e$  der Oberfläche von  $\mathfrak{E}$ . Diese Haube verschwindet nie ganz, wenn sie sich auch auf einen einzigen Punkt  $h_e$  zusammenziehen kann; dieser Punkt ist gesichert durch die Berührstelle der oberen Stützebene  $Z'' \parallel Z_0$  an  $\mathfrak{E}$ ;  $Z'$  hat ja zweifelsohne  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  auf einer Seite liegen.

Wenn Punkt  $h_e$  in seiner Art isoliert bleibt, ist er als Grenzpunkt zwischen  $H_e$  und  $\bar{A}$  allerdings auch dem  $\bar{A}$  beizurechnen.

$H_e$  kann nur ein zusammenhängendes Stück bilden; denn wenn man eine Ebene aus der Lage  $Z'$  durch andere Stützebenenlagen nach irgend-einer Seite zylinderbildend stetig an  $\mathfrak{E}$  entlang führt (wobei die Berühr-stelle sinkt), immer bis sie zu einer äußeren Gemeinstütze wird, so behält sie ja sicher ebensolange  $\mathfrak{F}$  auf derselben Seite wie  $\mathfrak{E}$ , ihre wandernde Berührstelle gehört also zur Menge  $\beta$  und bildet eine mit  $h_e$  ununter-brochen zusammenhängende Berührstellenfolge. Die Berührstellen brauchen nicht immer nur Punkte zu sein. Diese Beweisandeutungen mögen genügen.

Zu 3. Hier ergibt sich analog eine Haube  $H_f$ .

$S$  besteht also aus  $\bar{A}$ ,  $H_e$  und  $H_f$ , Flächenstücken, die nur gewisse Begrenzungslinien oder Begrenzungselemente gemeinsam haben.

Zurück zu unsern Ovalschnitten!

Der Schnitt einer Zwischenebene  $Z$  von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  mit  $S$ , der ein Oval ist, kann nun, da  $Z$  mit  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  nichts gemein hat, nur auf  $\bar{A}$  verlaufen; der Schnitt von  $Z$  mit  $\bar{A}$  wird aber der vollständige Schnitt von  $Z$  mit  $A$  sein. Denn letzterer besteht aus den Schnittpunkten von  $Z$  mit sämtlichen Erzeugenden  $ef$  von  $A$ ; diese werden aber alle von  $Z$  auf den zu ihnen gehörigen Strecken  $\overline{ef}$ , also auf  $\bar{A}$  geschnitten. Schluß-ergebnis:  $A$  wird durch jedes  $Z$  nach einem Oval geschnitten.

Wir können nun eine projektivische Umformung, gewisser Vereinfachungen wegen eine involutorische, uns denken, welche eine höchst einfache Beziehung zwischen der Natur von  $\mathfrak{R}(ef)$  und der von  $\mathfrak{R}(ef)$  aufdeckt. Ist  $x$  irgend-ein ursprünglich gegebenes Element, so werde das transformierte Element immer mit  $x'$  bezeichnet. Eine etwaige frühere andere Bedeutung ange-hängter Striche komme nicht mehr in Betracht.

Die Transformation sei der Art, daß  $Z'_0 \equiv U$ , d. h. identisch mit der unendlich fernen Ebene, und  $U' \equiv Z_0$ , d. h. identisch mit der (horizontal gedachten) Zwischenebene  $Z_0$  von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  wird.

Es ist klar, daß eine gerade Strecke  $ef$  sich wieder in eine gerade Strecke  $e'f'$  transformiert, es wird sich nur immer darum handeln, wo die endliche und wo die unendliche Strecke zu verstehen ist.

Da  $\overline{ef}$  die Zwischenebene  $Z_0$  in einem Punkte  $s$  schneidet, erhalten wir auf der transformierten Strecke einen unendlich fernen Punkt  $s'$  auf  $U$ , während  $e'$  und  $f'$ , da  $e$  und  $f$  nicht auf  $Z_0$  liegen, ins Endliche fallen;  $\overline{ef} = \overline{esf}$  transformiert sich in  $e's'f'$ , d. h. in die über den unendlich fernen Punkt laufende Verbindungsstrecke  $e'f'$ . Umgekehrt: Die Strecken  $ef$ , als die Supplemente zu den  $\overline{ef}$  auf den  $\overline{ef}$ , verwandeln sich in die Supple-mente  $e'f'$  zu den  $e'f'$  auf den  $e'f'$ , d. h. in die endlichen Strecken.

Da  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  keinen Punkt mit  $Z_0$  gemein haben, werden  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{F}'$  auch im Endlichen liegen, und da Eintriftigkeit und Abgeschlossenheit pro-jektive Eigenschaften sind, werden auch  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{F}'$  Eikörper sein.



Stützebenen  $S$  von  $\mathcal{E}$  oder  $\mathcal{F}$  transformieren sich in Stützebenen  $S'$  von  $\mathcal{E}'$  oder  $\mathcal{F}'$ ; denn gemeinsame Punkte von  $S$  und  $\mathcal{E}$  oder  $\mathcal{F}$  gehen in gemeinsame Punkte von  $S'$  und  $\mathcal{E}'$  oder  $\mathcal{F}'$  über, Begrenzungspunkte von  $\mathcal{E}$  oder  $\mathcal{F}$  in Begrenzungspunkte von  $\mathcal{E}'$  oder  $\mathcal{F}'$ . Ein  $S'$  wird also eine Ebene sein, die mit  $\mathcal{E}'$  und  $\mathcal{F}'$  nur Begrenzungspunkte gemein hat; eine solche Ebene ist aber für völlig richtige, also im Endlichen gelegene Eikörper wie  $\mathcal{E}'$  und  $\mathcal{F}'$  stets eine Stützebene. Nur wenn  $Z_0$  einen Eikörper, z. B.  $\mathcal{E}$ , schnitte, würde  $\mathcal{E}'$  in zwei nur über das Unendliche zusammenhängende Stücke zerfallen und  $S'$  diese Stücke zu verschiedenen Seiten liegen haben.

Es folgt, daß Gemeinstützebenen von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  sich in Gemeinstützebenen von  $\mathcal{E}'$  und  $\mathcal{F}'$  transformieren.

Das Gesamtergebnis ist:  $\mathfrak{R}(ef)$  geht in  $\mathfrak{R}(e'f')$ ,  $\mathfrak{R}(ef)$  in  $\mathfrak{R}(\overline{e'f'})$ , die beiden abwickelbaren Flächen aus Gemeinstützebenen von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  gehen in die beiden Flächen aus Gemeinstützebenen von  $\mathcal{E}'$  und  $\mathcal{F}'$  über, aber — und das ist für uns hier der wichtigste Punkt — sozusagen kreuzweise, es findet ein Rollenwechsel statt:  $J'$  ist nicht die innere, sondern die äußere Gemeinstützebenenfläche von  $\mathcal{E}'$  und  $\mathcal{F}'$ ,  $A'$  nicht die äußere, sondern die innere.

Denn jede innere Gemeinstütze  $J$  von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  schneidet je ein beliebig gewähltes  $ef$  (wo  $e$  und  $f$  innere Punkte von  $e$  und  $f$  sein sollen);  $J'$  schneidet daher nicht  $\overline{e'f'}$ , sondern  $e'f'$ , ist also nicht innere, sondern äußere Gemeinstütze von  $\mathcal{E}'$  und  $\mathcal{F}'$ , usw.

Aus dem projektivischen Zusammenhang der Natur von  $\mathfrak{R}(\overline{ef})$  und  $\mathfrak{R}(ef)$  ergibt sich nun, bzw. hat sich schon ergeben folgender Beweis unseres Satzes:

Ein Schnitt der Art  $E$ , bzw.  $F$ , ist projektivisch zu dem Schnitt einer Zwischenebene von  $\mathcal{E}'$  und  $\mathcal{F}'$  mit  $\mathfrak{R}(\overline{e'f'})$ , d. h. zu einem Oval. Ein endliches Gebiet wie  $E$  bzw.  $F$  aber, das projektivisch ist zu einem Oval, ist selbst ein Oval. Also: Jeder Schnitt von  $\mathfrak{R}(ef)$  oder — was hier auf das nämliche hinauskommt — von  $J$  mit einer Ebene, die parallel ist zu einer Zwischenebene  $Z$  von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$ , und die, von  $Z$  aus betrachtet, über  $\mathcal{E}$ , bzw.  $\mathcal{F}$ , hinausliegt, ist ein Oval.

Der Ausdruck „Schnitt von der Art  $E$  bzw.  $F$ “ sei noch einmal genauer erläutert; es ist ein Schnitt von  $\mathfrak{R}(ef)$  bzw.  $J$ , der weder mit  $\mathcal{E}$  noch mit  $\mathcal{F}$  einen Punkt gemein hat, der ferner zu einer Zwischenebene  $Z$  von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$ , also zu keiner Geraden  $ef$  parallel ist, vielmehr die  $ef$  alle nur im Endlichen, und zwar auf ihren Strecken  $ef$ , schneidet. Das zu ihm als projektiv erwiesene Oval  $O'$  auf einer Schnittebene von  $\mathfrak{R}(\overline{e'f'})$  — die Zwischenebene von  $\mathcal{E}'$  und  $\mathcal{F}'$  ist — kann offenbar keinen Punkt gemein

haben mit dem ovalen Schnitt  $O'_0$ , der sich zwischen  $Z_0$  und  $\mathfrak{R}(\overline{e'f'})$  ergibt — wir wollen diese Art von Schnitten  $O'$  mit  $O'_1$  bezeichnen —, sonst, d. h. wenn das  $O'$  von der entgegengesetzten Art  $O'_2$  wäre, würden ja bei Rückgängigmachung der Transformation die gemeinsamen Punkte ins Unendliche fallen, was für Punkte von Schnitten der Art  $E, F$  eben ausgeschlossen wurde.

Der Vervollständigung unserer Einsichten wegen sei nun aber einen Augenblick auch bei den Schnittfiguren verweilt, die bei Rücktransformation aus einem  $O'_2$  entstehen.

Es sind ebene Schnitte<sup>7)</sup>  $\tilde{E}$  von  $\mathfrak{R}(ef)$  bzw.  $J$ , die insofern verwandt sind mit  $E$  und  $F$ , als sie weder mit  $\mathfrak{E}$  noch mit  $\mathfrak{F}$  einen Punkt gemein haben, auch die  $ef$  nur auf ihren Strecken  $ef$  schneiden, aber die parallel sind zu einer, und dann auch zu unendlich vielen Geraden  $ef$ , daher auch ins Unendliche von  $\mathfrak{R}(ef)$  vordringen. Trotz ihrer Projektivität zu einem Oval  $O'_2$  sind die  $\tilde{E}$  also keine Ovale, sondern nur eintriffige, abgeschlossene Kurven. Sie werden durch Ebenen ausgeschnitten, welche nicht, wie die Ebenen von  $E$  und  $F$ , nur den *einen*, sondern die beiden aus dem Endlichen ins Unendliche ziehenden Blöcke von  $\mathfrak{R}(ef)$  schneiden.

Was den Paralleikegel  $P$  aus einem Punkte  $p$  — für den Zweck des folgenden Beweises ist es praktisch,  $p$  nicht gerade auf  $Z_0$  anzunehmen — zu den erzeugenden Ebenen und Geraden der Fläche  $J$  angeht, so laufen seine erzeugenden Ebenen und Geraden, in der Redeweise der Projektivitätslehre gesprochen, nach denselben Elementen der unendlich fernen Ebene  $U$ , wie die von  $J$ . Nachdem nun aber der Schnitt von  $J$  mit  $U$  sich in den Ovalschnitt  $O'_0$  von  $Z_0$  mit  $J'$  transformiert, wird besagter Paralleikegel sich in einen andern  $P'$  verwandeln, der von einem endlichen Punkte  $p'$  nach  $O'_0$  als Leitlinie läuft, also ein Ovalkegel ist. Daher wird, nach einer bereits vorhin angewendeten Schlußweise,  $P$  selbst ein Ovalkegel sein, wobei der Schluß sich vom Unendlichfernen völlig frei hält, wenn man bei der Rücktransformation nicht mit  $O'_0$  und dem Schnitt  $(J, U)$ , sondern einem zu  $O'_0$  parallelen Nachbarschnittoval und dem ebenfalls endlichen Oval im ungestrichenen System operiert, das ihm projektivisch entspricht.

NB. Natürlich hätten wir mit Bezug auf  $\mathfrak{R}(\overline{ef})$  und  $A$  ganz analoge Betrachtungen anstellen können, wie für  $\mathfrak{R}(ef)$  und  $J$ , indem wir, etwa auf dem vorigen Beweis unseres Hauptsatzes fußend, die Schnitte von  $\mathfrak{R}(\overline{ef})$  mit zwei parallelen Zwischenebenen von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  als Ovale und  $A$  als die Hüllfläche der *äußeren* Gemeinstützebenen an diese Ovale nachgewiesen hätten. Aber der Vorteil in diesem Kapitel war eben, daß der Eigebildcharakter von  $\mathfrak{R}(\overline{ef})$  und der Ovalcharakter seiner Schnitte bereits als feststehend betrachtet werden durfte.

<sup>7)</sup> Schnitte  $\tilde{E}$  von Schnitten  $\tilde{F}$  zu unterscheiden, liegt hier kein Grund mehr vor.

### Bemerkung zur Nomenklatur.

Im vorstehenden Kapitel sind die Eigeilde in enge Beziehung getreten zu solchen projektivischen Umformungen ihrer selbst, die ins Unendliche reichen. Ich schlage vor, letztere als „Zerreigebilde“ zu bezeichnen. Die Eigeilde und Zerreigebilde haben die Eigenschaften der Eintriftigkeit und Abgeschlossenheit gemeinsam. Speziell war  $\mathfrak{R}(ef)$  ein Eikörper,  $\mathfrak{R}(ef)$  ein Zerrekörper. Weil  $\mathfrak{R}(ef)$  den Typus des zweischaligen Hyperboloids hat, könnte man den Körper auch als „Hyperboloidal“ bezeichnen.

Übrigens mag es gut sein, hier darauf hinzuweisen, daß die Eigeilde und Zerregebiete eines Raumes noch nicht ganz die Gesamtmenge der eintriftigen abgeschlossenen Gebiete dieses Raumes erschöpfen. Es gibt eintriftige, abgeschlossene, ins Unendliche reichende Gebiete beispielsweise in der Ebene, die keine Zerregebiete sind. Ein Zerroval entsteht durch projektive Umformung aus einem Oval  $O$ , muß also durch projektive Rücktransformation wieder in das Oval verwandelt werden können. Träfe aber jede Gerade der Ebene das Zerroval, so täte es natürlich auch die, welche nach der Rücktransformation ins Unendliche fällt;  $O$  würde ins Unendliche reichen und kein Oval sein können.

Die Zerrovalgebiete sind also eintriftige, abgeschlossene, ins Unendliche reichende Figuren, die *nicht* mit allen Geraden ihrer Ebene Punkte gemein haben.

Es gibt aber eintriftige, abgeschlossene Figuren, die mit allen Geraden ihrer Ebene Punkte gemein haben: Der Streifen zwischen zwei Parallelen mit Einschluß der Parallelen, die Ebene, soweit sie außerhalb zweier Parallelen liegt, wieder mit Einschluß derselben, eine Halbebene mit Einschluß der begrenzenden Geraden, eine Vollstrahlenwinkelfläche mit Einschluß der Schenkel (dieser Fall faßt die vorhergehenden projektivisch als Spezialfälle unter sich), und die Gesamtebene — wobei der Abgeschlossenheit wegen die in Frage kommenden unendlich fernen Punkte den sämtlichen genannten Figuren immer beizuzählen sind.

Analog ist es in Räumen von anderer Dimensionszahl.

### Degenerierende Eikörper $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ .

Bei einer Kontrolle, ob unser Satz auch gültig bleibt, wenn  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  degenerieren, d. h. wenn sie einzeln oder beide weniger als drei Dimensionen aufweisen, stellt sich zunächst heraus, daß der Beweis keinerlei Störung erleidet, wenn trotz Degeneration von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  die Figuren  $E$  und  $F$  richtig, d. h. zweidimensional bleiben.

Nehmen wir nun den Fall, daß nur eine der beiden Figuren, sagen wir  $E$ , in eine Strecke  $\bar{\tau}$  degenerierte. Die richtige Figur  $F$  würde dann zwei ge-

trennte Stützen  $\tau_f$  und  $\tau_f^*$  parallel zu  $\bar{\tau}$  haben, und die Ebenen  $(\bar{\tau}, \tau_f)$  und  $(\bar{\tau}, \tau_f^*)$  würden als innere (freilich auch als äußere) Gemeinstützen von  $\bar{\tau}$  und  $F$  zu gelten haben, und somit auch als solche von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$ . Die Berührungspunkte von  $(\bar{\tau}, \tau_f)$  mit  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  z. B. müßten unterhalb  $Z$ , auf der unteren Hälfte von  $(\bar{\tau}, \tau_f)$  liegen, die aber ganz auf einer Seite der anderen Ebene  $(\bar{\tau}, \tau_f^*)$  liegt; es ist aber mit dem Charakter einer solchen inneren Gemeinstütze nicht verträglich, daß sie Punkte  $e, f$  getrennt von sich auf *einer* Seite liegen hat.

Diesem Widerspruch entkommen wir nur, wenn wir annehmen, daß die untern Halbebenen von  $(\bar{\tau}, \tau_f)$  und  $(\bar{\tau}, \tau_f^*)$  sich gar nicht trennen, diese Ebenen überhaupt zusammenfallen, so daß auch  $\tau_f$  und  $\tau_f^*$  zusammenfallen und  $F$  ebenfalls auf eine Gerade sozusagen zusammengequetscht ist. Auf dasselbe Ergebnis kommen wir auch, wenn  $E$  statt in eine Strecke in einen Punkt entartet.

Wir haben also nur noch den Fall zu untersuchen, daß  $E$  und  $F$  zwei parallele Strecken sind,  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  somit in ebene Figuren degenerieren, die in *einer* Ebene  $P$  liegen. Die sich ergebenden Figuren sind ebene Korrelate zu den ausgebildeteren, verwickelteren räumlichen, die wir bereits bewältigt haben; es würde ein leichtes sein, sie nach dem gegebenen Muster in ähnlich ausführlicher Darstellung zu erledigen; aber eben deswegen dürfen wir uns hier wohl mit einer etwas oberflächlicheren, mehr beschreibenden als streng beweisenden Behandlung begnügen.

Wenn wir uns an das Gebilde  $\mathfrak{K}(ef) = \mathfrak{K}(\overline{ef}) + \mathfrak{K}(\underline{ef})$  halten, bleibt alles zweifelsfrei bestimmt, es ergeben sich Figuren von der Art wie in Fig. 9.

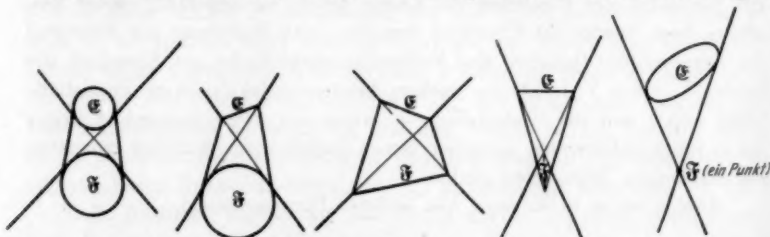


Fig. 9.

In den oberen und unteren Teilen bei  $Z$  und  $Z'$  wird die fächerförmige Entfaltung dieser Figuren immer durch die inneren Gemeinstützgeraden  $\gamma$  und  $\gamma^*$  der ebenen Eigebiete  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  bedingt,  $E$  und  $F$  werden begrenzte gerade Strecken, also Spezialfälle von Ovalen, so daß wir unsern Satz als erfüllt ansehen dürfen. Und er bleibt auch noch erfüllt, wenn  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{F}$  in Punkte oder Strecken degenerieren, die auf *einer* Geraden liegen, und  $E, F$  sich auf Punkte reduzieren, denn auch ein Punkt ist Spezialfall eines Ovals.

Wenn wir uns statt an  $\mathbb{R}(ef)$  in diesen Degenerationsfällen an die abwickelbare Fläche  $J$  zu halten versuchen, so ist es so:

Die erzeugenden inneren Ebenen für die Fläche  $J$  bestehen jetzt aus den beiden Ebenenbüscheln durch  $\gamma$  und  $\gamma^*$ , die Ebene  $P$  ist doppelt beizurechnen. Als umhüllte Fläche ist anzusehen die ebene Vollstrahlenwinkelfläche zwischen  $\gamma$  und  $\gamma^*$ , welche  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  enthält. Es treten hier eigentlich gewisse Unbestimmtheiten auf; auch die Flächen des anderen, supplementären Vollstrahlenwinkels zwischen  $\gamma$  und  $\gamma^*$  wird schließlich von den genannten Ebenenbüscheln umhüllt; ja man könnte die beiden Winkel zusammen und somit die ganze Ebene in gewissem Sinne als Umhüllungserzeugnis ansehen. Aber es wird gestattet sein, jene Lösung oder sagen wir Auffassung zu bevorzugen, welche nach dem Gesichtspunkt der Stetigkeit sich am besten an benachbarte Fälle anschließt, in denen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  fast in einer Ebene liegen, aber doch gerade noch dreidimensional sind; und so wählen wir den Winkel zwischen  $\gamma$  und  $\gamma^*$ , der  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{F}$  enthält. Die Schnitte von  $J$  mit  $Z$  und  $Z'$  sind dann die nämlichen wie vorhin.

Will man den Begriff der erzeugenden Geraden von  $J$  aufrechterhalten, so ist eine ähnliche Bemerkung zu machen; natürlich sind  $\gamma$  und  $\gamma^*$  je unendlich vielfach als erzeugende Gerade zu rechnen, weil sich unendlich viele Paare von richtungsbenachbarten Ebenen in ihnen schneiden, auf der Winkelfläche zwischen  $\gamma$  und  $\gamma^*$  könnte man vielleicht streiten, welche Geraden alle als Erzeugende anzusehen sind; allen bisherigen Annahmen paßt es sich am besten an, wenn wir nur die durch den Schnitt von  $\gamma$  und  $\gamma^*$  gehenden Geraden innerhalb des bevorzugten Winkels als „erzeugende Geraden“ anerkennen. Man mag sie jede doppelt rechnen, wie man die Winkalebene doppelt rechnete.

Der Parallelkegel zu  $J$  wird unter all diesen Voraussetzungen immer ein zu  $J$  paralleler kongruenter Winkel und kann ebenfalls als Spezialfall eines Ovalkegels gelten.

### Schlußbemerkung \*).

In meinem kürzlich erschienenen Aufsatz „Vom Normalenkegel der Zwischenebenen zweier getrennter Eikörper“ (Sitz.-Ber. d. Bay. Akad. d. Wiss., math.-nat. Abt., Jg. 1930, S. 165—182) habe ich gezeigt, daß auch dieser Normalenkegel i. A. ein Ovalkegel ist, und daß er begrenzt wird von den Normalen der inneren Doppelstützebenen  $\mathfrak{S}$  \*) beider Eikörper, d. h. den Normalen der erzeugenden Ebenen  $\mathfrak{S}$  einer gewissen abwickelbaren Fläche  $J$ . Diese Normalen sind selbstverständlich auch normal zu den erzeugenden

\*) Eingegangen am 6. 10. 1930.

\*\*) Die übrigens in dem Akademieaufsatz mit  $J$  bezeichnet sind.

Ebenen eines Parallelkegels zu  $J$ , wie er im vorliegenden Aufsatz zur Besprechung kommt und ebenfalls als Ovalkegel nachgewiesen wird. Mit anderen Worten: Die in den beiden Aufsätzen behandelten Kegel sind, wenn man sie mit gemeinsamem Scheitel denkt, Polarkegel zueinander. Meine beiden Sätze stehen also — trotz ihres ganz verschiedenen Beweises — in einem innigen Zusammenhang, und der eine könnte als sehr unmittelbare Folge des andern bezeichnet werden, wenn der Satz, daß der Polarkegel eines Ovalkegels wieder ein Ovalkegel ist, für allgemeine Ovalkegel schon so bekannt und fest begründet wäre, wie er uns für elliptische Kegel geläufig ist. Dies dürfte aber noch nicht der Fall sein. Und so kann umgekehrt das Bestehen meiner beiden Sätze als Beweis des Satzes von den polaren Ovalkegeln gewertet, bzw. zu einem solchen Beweise leicht ausgestaltet werden. Dabei machen dann meine Präzisionsfeststellungen darauf aufmerksam, daß der Satz von den polaren Ovalkegeln eine Ausnahme erleidet. Ich habe von einem sphärischen Oval das Bestehen einer gewissen „Schranke“ verlangt; wenn wir den Begriff des Ovalkegels entsprechend limitieren, so ist der Polarkegel eines in die Ebene entarteten Ovalkegels kein Ovalkegel im strengen Sinne mehr.

(Eingegangen am 18. 7. 1930.)

### Bemerkung der Redaktion

zu der Arbeit von R. Caccioppoli „Teoria generale del cambiamento di variabili negli integrali doppi“, Math. Annalen 101, S. 672—685:

Von Herrn J. Schauder-Lemberg werden wir liebenswürdigerweise darauf aufmerksam gemacht, daß die Arbeit des Herrn Caccioppoli mit dem Satze IX der in den *Fundamenta Mathematicae* 12 (Sept. 1928) erschienenen Arbeit des Herrn Schauder in den Resultaten weitgehend Berührungspunkte aufweist.

### Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis.

Der von Herrn Domherrn Dr. Dr.-Ing. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig errichtete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften“ in Höhe von 1000 RM ist für das Jahr 1930 durch das Preisgericht Herrn Oberstudiendirektor Professor Dr. Johannes Tropske in Berlin für die „2. Auflage der Geschichte der Elementarmathematik und die Arbeit über den Anteil des Archimedes an der Entstehung der Trigonometrie“ zuerkannt worden.

# Eindeutigkeit der Lösung des Anfangsproblems einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen.

Von

Hans Lewy in Göttingen.

## Einleitung.

Gegenstand der folgenden Untersuchung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine Funktion  $u$  der beiden Variablen  $x$  und  $y$ :

$$(1) \quad F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0,$$

in der wie üblich  $p, q, r, s, t$  für die Ableitungen erster und zweiter Ordnung stehen:

$$(2) \quad u_x = p, \quad u_y = q; \quad u_{xx} = r, \quad u_{xy} = s, \quad u_{yy} = t;$$

ferner ein beliebiges Kurvenstück  $C$  der  $x, y$ -Ebene, auf dessen einer Seite — in einer gewissen Umgebung — eine Lösung von (1) existiert, und zwar derart, daß

1. sie auf  $C$  gewisse Anfangswerte  $u, p, q, r, s, t$  annimmt;

2. die Funktion  $F$  für diese Anfangswerte und eine gewisse Umgebung derselben im Raume der komplexen Argumente  $x, y, u, p, q, r, s, t$  eine regulär analytische Funktion von ihnen ist;

3. die Differentialgleichung für die Anfangswerte elliptisch ausfällt, das bedeutet, daß dort die Ungleichung

$$(3) \quad 4 \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} - \left( \frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 > 0 \quad \left( \text{also auch } \frac{\partial F}{\partial r} + 0, \frac{\partial F}{\partial t} + 0 \right)$$

gilt.

Wir fragen, ob die Lösung  $u$  von (1) durch ihre Anfangswerte auf  $C$  eindeutig bestimmt ist; genauer beschränken wir uns darauf, festzustellen, ob es eine endliche Umgebung von  $C$  gibt, in der irgend zwei solche Lösungen — infolge der ihnen auferlegten Anfangsbedingungen notwendig übereinstimmen.

Bevor wir diese Frage und zwar im Sinne der Eindeutigkeit entscheiden, wird es nützlich sein, ihre Beziehung zu den bekannten Untersuchungen von Cauchy-Kowalewski klarzulegen. Gestattet die vorgelegte



Lösung in einem Punkte  $x_0, y_0$  der Anfangskurve eine Entwicklung in eine Potenzreihe nach  $x - x_0$  und  $y - y_0$ , so folgt aus der Differentialgleichung sofort eine rekursive Berechnung der Koeffizienten dieser Reihe, *falls die Anfangskurve  $C$  analytisch ist und die Anfangswerte der Funktionen  $u, p, q, r, s, t$  selbst analytisch von einem passend gewählten Parameter auf  $C$ , etwa der Bogenlänge, abhängen.* Um also unter dieser Voraussetzung über die Anfangsbedingungen die Eindeutigkeit der Lösung  $u(x, y)$  garantieren zu können, wäre für die Anwendung der Cauchy-Kowalewskischen Gedankengänge immer noch die zusätzliche Bedingung notwendig, daß die Lösung auf der Anfangskurve  $C$  und in derjenigen Umgebung von  $C$ , in der sie auf ihre Eindeutigkeit zu untersuchen ist, regulär analytisch ist im Sinne einer Funktion der beiden Variablen  $x$  und  $y$ . Dies erfordert gewiß die Existenz von  $u$  auf beiden Seiten der Anfangskurve  $C$ ; andererseits folgt aus der beiderseitigen Existenz der Lösung nach einem bekannten Satze über den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen, daß die Lösung  $u$  auf der Anfangskurve selbst und in einer gewissen Umgebung von ihr eine analytische Funktion von  $x$  und  $y$  ist, weil dann die Punkte der Anfangskurve *innere* Punkte des Existenzbereiches von  $u$  sind. Nun ist schließlich auch die beiderseitige Existenz der Lösung unter den obigen Voraussetzungen über die Anfangsbedingungen keine neue Einschränkung, weil ja hier eine beliebige auf der einen Seite von  $C$  bestehende Lösung auf der anderen Seite durch die von dem hier gültigen Cauchy-Kowalewskischen Existenzsatz gelieferte fortgesetzt werden kann. Man gelangt so bei analytischer Anfangskurve und analytischen Anfangswerten unter Zuhilfenahme des Satzes vom analytischen Charakter mittels der Sätze von Cauchy-Kowalewski zu der gesuchten Eindeutigkeit.

Handelt es sich speziell um eine lineare Differentialgleichung, so führen diese Überlegungen auch ohne die Voraussetzung der Analytizität von Anfangskurve und Anfangswerten zum Ziel. Man kann sich nämlich auf verschwindende Anfangswerte und homogene Gleichungen beschränken. Man kann dann eine einseitig existierende Lösung der Differentialgleichung auf der anderen Seite von  $C$  durch  $u \equiv 0$  fortsetzen und berechnet nunmehr die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung in einem Punkte der Anfangskurve sämtlich zu null. Damit ist ein Resultat von Holmgren<sup>1)</sup> bewiesen, betreffend die Eindeutigkeit bei linearen elliptischen Differentialgleichungen.

In diesen Zusammenhang gehört auch ein bekannter Satz über analytische Funktionen eines komplexen Arguments und sein Beweis. Da er für die folgenden Untersuchungen der entscheidende Hilfssatz ist, möge er

<sup>1)</sup> Holmgren benutzt außer dem Satz vom analytischen Charakter noch gewisse Integralgleichungen beim Beweis „Om Cauchy's problem vid de lineära partiella differentialequationerna ...“, Ark. f. Math. Astr. Fys. 2, S. 24.

hier genannt sein: Es gibt höchstens eine analytische Funktion, die auf einer Seite eines Kurvenstücks der komplexen Zahlenebene in dessen Umgebung existiert und bei Annäherung an die Kurve gleichmäßig gegen dort vorgegebene stetige „Anfangswerte“ strebt.

Wenden wir uns nun zu den nichtlinearen Differentialgleichungen, um auch dort die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangsproblems nachzuweisen, ohne jedoch Anfangskurve oder Anfangswerte als analytisch vorauszusetzen.

Hadamard hat auf eine Eigentümlichkeit hingewiesen, die das allgemeine Problem der Eindeutigkeit bei elliptischen Differentialgleichungen unterscheidet von dem analogen Problem etwa bei gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Er bemerkt nämlich<sup>2)</sup>, daß in den beiden letzten Fällen — das gilt übrigens auch für die hyperbolischen Differentialgleichungen — die Tatsache der Eindeutigkeit und auch die dafür bekannten Beweise lediglich Spezialisierungen des allgemeinen Stetigkeitsprinzips sind, das besagt, daß die Lösungen sich stetig ändern, wenn ihre Anfangswerte stetig variieren. Andererseits aber zeigt er an einem eleganten Beispiel, daß dieses Prinzip für elliptische Differentialgleichungen, allgemein zu reden, *nicht* gültig ist. Man darf daher mit Hadamard annehmen, daß auch die Übertragung jener Beweise auf unseren Fall schwerlich zum Ziele führen wird und es geraten ist, einen anderen Weg einzuschlagen. Ein solcher bietet sich in einer ähnlichen Fortsetzung der Lösung ins Komplexe<sup>3)</sup>, wie ich sie unlängst zum Beweise des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen angewandt habe. Ich kann dadurch die allgemeine Eindeutigkeitsfrage auf den erwähnten Satz über Funktionen eines komplexen Arguments zurückführen.

Bei der folgenden Darstellung ließ es sich leider nicht vermeiden, verschiedene Umstände, die bereits beim Beweise des analytischen Charakters auftraten, in modifizierter Form zu wiederholen; insbesondere erscheint der analytische Charakter der zu besorgenden Fortsetzung ins Komplexe wiederum als Nebenresultat und Hauptstütze des Beweises der Eindeutigkeit; jedoch steht diesem Nachteil die Annehmlichkeit gegenüber, daß beide Eigenschaften mit derselben Methode abgeleitet werden; beide werden durch diese Fortsetzung mit dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz im hyperbolischen Falle in enge Beziehung gesetzt, und man gewinnt so eine vergleichende Übersicht über die so verschiedenen Grundeigenschaften der Lösungen von elliptischen und hyperbolischen Differentialgleichungen, die sich mühelos als nur verschiedene Seiten ein und derselben Sache aufklären.

<sup>2)</sup> Hadamard, „Lectures on Cauchy's Problem“ S. 33 und Zusatz zu einer Note von Haar, Comptes Rendus 187 (2. 6. 1928).

<sup>3)</sup> Vgl. Hans Lewy, Neuer Beweis des analytischen Charakters ..., Math. Ann. 101 (1929), S. 609.

## § 1.

## Fortsetzung ins Komplexe.

## 1. Einführung passender Variablen. Differenzierbarkeitsvoraussetzungen.

Da bekanntlich der elliptische Typus von  $F$  gegen Koordinatentransformationen der  $x, y$  mit nicht verschwindender Determinante invariant ist, können wir von vornherein annehmen, daß die Kurve  $C$  in einem inneren Punkt  $P$  von ihr durch den Ursprung  $x=0, y=0$  geht und sich in einer Umgebung von  $P$  in die Gestalt

$$y = f(x)$$

setzen läßt. Wir verlangen, daß  $f(x)$  zweimal stetig nach  $x$ , daß die vorgelegte Lösung  $u(x, y)$  viermal stetig nach  $x$  und  $y$  differenzierbar sei (diese Voraussetzung soll auch noch für die Punkte der Anfangskurve gültig sein).

Führen wir folgende Variable ein:

$$\alpha = x, \quad \beta = y - f(x).$$

Die Determinante der Transformation ist  $\neq 0$ ; es wird eine Umgebung von  $P$  auf eine Umgebung des Ursprungs des (kartesischen)  $\alpha, \beta$ -Systems eindeutig bezogen. Durch eventuelles Ändern des Vorzeichens von  $\beta$  bewirkt man, daß diejenige Seite von  $C$ , auf der die Voraussetzung die Existenz der Lösung von (1) garantiert, auf einen Teil der Halbebene  $\beta \geq 0$  abgebildet wird. Alle im folgenden früher oder später vorzunehmenden Operationen beziehen sich dann immer auf eine *passend klein* gewählte Halbumgebung  $\beta \geq 0$  von  $\alpha=0, \beta=0$ , die ein endliches, den Ursprung im Innern enthaltendes Stück der Geraden als Teil ihres Randes besitzt; wir werden diese Einschränkung als selbstverständlich unterstellen und an den betreffenden Stellen nicht mehr ausdrücklich darauf hinweisen.

2. Wie die Charakteristikentheorie zeigt, gehorcht jede dreimal stetig differenzierbare Lösung  $u(x, y)$  von (1) dem folgenden Differentialgleichungssystem:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (4_1) \quad y' - \varrho_1 x' = 0, \\ (4_2) \quad y' - \varrho_2 x' = 0, \\ \varrho_1 F_r r' + F_t s' + (F_p r + F_q s + F_u p + F_x) y' = 0, \\ \varrho_1 F_r s' + F_t t' + (F_p s + F_q t + F_u q + F_y) y' = 0, \\ \varrho_2 F_r r' + F_t s' + (F_p r + F_q s + F_u p + F_x) y' = 0, \\ u' - p x' - q y' = 0, \\ p' - r x' - s y' = 0, \\ q' - s x' - t y' = 0. \end{array} \right.$$

Hierbei ist

$$(5) \quad \varrho_1 = \frac{1}{2F_r}(F_r + i\sqrt{4F_r F_t - F_t^2}), \quad \varrho_2 = \frac{1}{2F_r}(F_r - i\sqrt{4F_r F_t - F_t^2}),$$

und die Operatoren bedeuten

$$(6) \quad ' = \frac{\partial}{\partial x} + \varrho_1 \frac{\partial}{\partial y}, \quad \backslash = \frac{\partial}{\partial x} + \varrho_2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Die Determinante<sup>4)</sup> des Systems (4) ist gleich  $(\varrho_1 - \varrho_2)^2 F_r F_t^2$ , also wegen (3) von null verschieden; und dies gilt jedenfalls für die Anfangskurve, also aus Stetigkeitsgründen auch in einer passenden Halbumgebung von  $C$ .

3. Wir haben jetzt gewisse Funktionen  $x(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ ,  $y(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ ,  $u(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2), \dots$  zu definieren. Dazu nehmen wir zwei (einander und der Anfangskurve hinreichend benachbarte) Punkte  $\alpha_1, \beta_1$  und  $\alpha_2, \beta_2$  derart, daß die Verbindungsstrecke ganz dem Existenzbereich der vorgelegten Lösung, die als Funktion von  $\alpha$  und  $\beta$  zu denken ist, angehört. Da die Punkte dieser Strecke sich in die Form

$$\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2, \lambda \beta_1 + \mu \beta_2 \quad (0 \leq \lambda \leq 1, \lambda + \mu = 1)$$

setzen lassen, sind die Funktionen  $x(\alpha, \beta)$ ,  $y(\alpha, \beta)$ ,  $u(\alpha, \beta), \dots$  dort auch als Funktionen auf der Geraden  $\lambda + \mu = 1$  einer  $\lambda\mu$ -Ebene auffaßbar, und sie werden gemäß den Voraussetzungen über die Anfangskurve und über die Lösung  $u(x, y)$  von (1) als solche zweimal stetig nach der Bogenlänge differenzierbar sein. Wir stellen nun ein hyperbolisches, nach der Theorie eindeutig lösbares Anfangswertproblem für (komplexwertige) Funktionen der reellen Variablen  $\lambda$  und  $\mu$ , indem wir eine Lösung des Systems (4) suchen, wobei wir jedoch den Operatoren  $'$  und  $\backslash$  die Bedeutung

$$(7) \quad ' = \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \backslash = \frac{\partial}{\partial \mu}$$

beilegen und als Anfangswerte die Werte der Funktionen  $x, y, u, \dots$  auf der Geraden  $\lambda + \mu = 1$  geben. Der Wert der zugehörigen Lösungen im Punkte  $\lambda = 1, \mu = 1$  ist dann eindeutig durch die Anfangswerte gegeben, da die Charakteristiken durch ihn, d. h. die Geraden  $\lambda = 1$  und  $\mu = 1$  aus der Anfangsgeraden  $\lambda + \mu = 1$  gerade dasjenige Stück ausschneiden, auf dem wir die Werte der Funktionen vorgeben. Wir wollen den Wert der Funktionen  $x, y, u, \dots$  im Punkte  $\lambda = 1, \mu = 1$ , insofern sie ja ihrer Konstruktion nach von den beiden Punkten  $\alpha_1, \beta_1$  und  $\alpha_2, \beta_2$  abhängen, mit  $x(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ ,  $y(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ ,  $u(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2), \dots$  bezeichnen.

<sup>4)</sup> Vgl. für diesen Begriff Hans Lewy, „Über das Anfangswertproblem bei einer hyperbolischen nichtlinearen Differentialgleichung...“, Math. Annalen 98, S. 186 ff., oder Kurt Friedrichs und Hans Lewy, „Lösung des Anfangswertproblems einer beliebigen hyperbolischen Differentialgleichung...“, Math. Annalen 98, S. 208. Dort auch eine bequeme Ableitung der Differentialgleichungen (4).

Offenbar handelt es sich um eine vierparametrische Schar von Anfangs-problemen; und die bezüglichen Anfangswerte sind nach den vier Parametern der Schar:  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  zweimal stetig differenzierbar; wir schließen hieraus dasselbe für die Lösungen und finden so, daß die Funktionen  $x(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2), y(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2), u(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2), \dots$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Argumente sind.

4. Es ist

$$x(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = y(\alpha, \beta), u(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = u(\alpha, \beta), \dots$$

In der Tat stellt ja  $x = x(\alpha, \beta), \dots, u = u(\alpha, \beta), \dots$  für alle  $\lambda, \mu$  des in Betracht kommenden Dreiecks  $\lambda + \mu \geq 1, \lambda \leq 1, \mu \leq 1$  eine Lösung des zugehörigen Anfangsproblems dar, in dem nämlich die obigen beiden Punkte  $\alpha_1, \beta_1$  und  $\alpha_2, \beta_2$  in den einen Punkt  $\alpha, \beta$  zusammenfallen; in der analytischen Formulierung des Anfangsproblems auf S. 329 wurde keine Voraussetzung über Nichtzusammenfallen der beiden Punkte gemacht. Nach dem für das System (4) gültigen Eindeigkeitssatze ist also  $x = x(\alpha, \beta), \dots, u = u(\alpha, \beta)$  die Lösung. Daher gilt speziell

$$x(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = x(\alpha, \beta), \dots, u(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = u(\alpha, \beta), \dots$$

5. Ich behaupte, daß die Funktionen  $x(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2), \dots, u(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$  selbst als Lösungen des Systems (4) auffaßbar sind, wenn man die Operatoren ' und ' geeignet als Differentialquotienten nach den Variablen  $\alpha_1, \beta_1$  und  $\alpha_2, \beta_2$  erklärt.

Dies einzusehen, greifen wir eins der obigen Anfangsprobleme heraus, sagen wir dasjenige, das uns die Werte  $x(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2), \dots$  liefert. Wir hatten die Strecke der  $\alpha\beta$ -Ebene, die die Punkte  $\alpha_1, \beta_1$  und  $\alpha_2, \beta_2$  verbindet, affin auf die Strecke mit den Endpunkten  $\lambda = 1, \mu = 0$  und  $\lambda = 0, \mu = 1$  der  $\lambda\mu$ -Ebene abgebildet und die Funktionen  $x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), \dots$  auf der ersten Strecke als Funktionen der Punkte der zweiten geschrieben; die Werte  $x(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2), \dots$  waren die Werte in  $\lambda = \mu = 1$  der Lösungen des oben erklärten Anfangswertproblems der  $\lambda\mu$ -Ebene mit den soeben genannten Anfangswerten auf der Geraden  $\lambda + \mu = 1$ . Fassen wir aber einen beliebigen Punkt des Dreiecks  $\lambda = 1, \mu = 0; \lambda = 0, \mu = 1$   $\lambda = \mu = 1$ , der nicht auf der Geraden  $\lambda + \mu = 1$  liegen möge, ins Auge, etwa den Punkt  $\lambda = A, \mu = M$ . In ihm nehmen die Lösungen des Anfangsproblems gewisse Werte an, die nach dem allgemeinen Satze für Systeme (4) in der Bedeutung (7) nur von einem Teile der Anfangswerte abhängen, nämlich von derjenigen Strecke, die auf der Geraden  $\lambda + \mu = 1$  von den Geraden  $\lambda = A$  und  $\mu = M$  ausgeschnitten wird. Macht man jetzt eine Ähnlichkeitstransformation der  $\lambda\mu$ -Ebene, die die beiden Endpunkte in die Punkte  $\lambda = 1, \mu = 0; \lambda = 0, \mu = 1$  wirft, d. h. setzt man

$$\lambda' = \frac{\lambda + M - 1}{\lambda + M - 1}; \quad \mu' = \frac{\mu + A - 1}{\lambda + M - 1}$$

und schreibt die Funktionen  $x(\lambda, \mu), \dots$  als entsprechende Funktionen der  $\lambda', \mu'$ , so werden (wegen der Proportionalität der Operatoren  $\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \mu}$  mit  $\frac{\partial}{\partial \lambda'}, \frac{\partial}{\partial \mu'}$  und der Homogenität des Systems (4) in den Ableitungen) diese Funktionen der  $\lambda', \mu'$  gerade die Lösungen des Anfangsproblems aus der Schar, das für  $\lambda' = \mu' = 1$  die Funktionen

$$(8) \quad x(A\alpha_1 + (1-A)\alpha_2, A\beta_1 + (1-A)\beta_2; M\alpha_3 + (1-M)\alpha_1, M\beta_3 + (1-M)\beta_1),$$

liefert (dies gilt nach 4. auch noch für  $A + M = 1$ ). Die Argumente in (8) sind offenbar die Koordinaten zweier Punkte der  $\alpha_1\beta_1$  und  $\alpha_3\beta_3$  verbindenden Geraden. Bezeichnet  $\varphi$  den Winkel, den die positive Richtung der  $\alpha$ -Achse der  $\alpha\beta$ -Ebene mit der Richtung von  $\alpha_1\beta_1$  nach  $\alpha_3\beta_3$  bildet ( $\alpha_1, \beta_1$  wieder  $\neq \alpha_2, \beta_2$  vorausgesetzt), so wird also für die Funktionen (8) das Gleichungssystem (4) gelten in der Bedeutung

$$(8'') \quad \lambda' = \frac{\partial}{\partial A}, \quad \mu' = \frac{\partial}{\partial M}$$

oder auch wegen der Homogenität allgemein mit

$$(*) \quad \lambda' = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial A_1} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial B_1}, \quad \mu' = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial A_2} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial B_2},$$

wo wir die neuen Symbole  $\frac{\partial}{\partial A_1}, \frac{\partial}{\partial B_1}, \frac{\partial}{\partial A_2}, \frac{\partial}{\partial B_2}$  einführen mußten, um die Differentiation nach dem ersten, zweiten, dritten und vierten Argumente der Funktionen (8) auszudrücken. Die beiden letzten Gleichungen sind die in 5. aufgestellte Behauptung.

6. Speziell interessiert, was man für  $A = 1, M = 0$  und  $A = 0, M = 1$  schließen kann. Beachtet man, daß der Winkel  $\varphi$  bei festem  $\alpha_1\beta_1$  mit dem Punkte  $\alpha_2\beta_2$  variiert, so erhält man, für  $\alpha_1\beta_1$  wieder  $\alpha\beta$  schreibend, aus der Gleichung (4<sub>1</sub>)

$$0 = y' - \varrho_1 x' = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial A_1} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial B_1} \right) y - \varrho_1 \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial A_1} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial B_1} \right) x$$

die beiden neuen

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial A_1} y(\alpha, \beta; \alpha, \beta) - \varrho_1 \frac{\partial}{\partial A_1} x(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = 0,$$

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial B_1} y(\alpha, \beta; \alpha, \beta) - \varrho_1 \frac{\partial}{\partial B_1} x(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = 0.$$

Aus (4<sub>2</sub>)  $y' - \varrho_2 x' = 0$  folgt entsprechend

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial A_2} y(\alpha, \beta; \alpha, \beta) - \varrho_2 \frac{\partial}{\partial A_2} x(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = 0,$$

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial B_2} y(\alpha, \beta; \alpha, \beta) - \varrho_2 \frac{\partial}{\partial B_2} x(\alpha, \beta; \alpha, \beta) = 0.$$

Weiter gilt selbstverständlich die Differentiationsregel

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial A_1} + \frac{\partial}{\partial A_2}\right) x(\alpha, \beta; \alpha, \beta) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} x(\alpha, \beta); & \left(\frac{\partial}{\partial B_1} + \frac{\partial}{\partial B_2}\right) x(\alpha, \beta; \alpha, \beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta} x(\alpha, \beta) \\ \left(\frac{\partial}{\partial A_1} + \frac{\partial}{\partial A_2}\right) y(\alpha, \beta; \alpha, \beta) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} y(\alpha, \beta); & \left(\frac{\partial}{\partial B_1} + \frac{\partial}{\partial B_2}\right) y(\alpha, \beta; \alpha, \beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta} y(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Das sind zusammen 16 Gleichungen für die Ableitungen von  $x(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ ,  $y(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ , die als komplexwertig zu betrachten sind, nach  $A_1, A_2, B_1, B_2$ . Spaltet man in Real- und Imaginärteil und setzt demgemäß

$$x = x_1 + i x_2, \quad \bar{x} = x_1 - i x_2,$$

$$y = y_1 + i y_2, \quad \bar{y} = y_1 - i y_2,$$

so kann man die obigen Gleichungen benutzen, um das Nichtverschwinden der Determinante (für die Kurve  $C$  der reellen  $xy$ -Ebene)

$$(13) \quad \frac{\partial(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial(A_1, B_1, A_2, B_2)} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial(x, \bar{x}, y, \bar{y})}{\partial(A_1, B_1, A_2, B_2)}$$

zu beweisen und sich so das Recht verschaffen, (in einer gewissen Umgebung von ihr)  $x_1, x_2, y_1, y_2$  als neue Variable an Stelle von  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  einzuführen. Man findet nämlich eindeutig durch eine kleine Rechnung

$$\begin{array}{l|l} \frac{\partial x(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial A_1} = \frac{\frac{\partial y(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} - \varrho_2 \frac{\partial x(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}}{\varrho_1 - \varrho_2} & \frac{\partial y(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial A_1} = \varrho_1 \frac{\partial x(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial A_1} \\ \frac{\partial x(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial B_1} = \frac{\frac{\partial y(\alpha, \beta)}{\partial \beta} - \varrho_2 \frac{\partial x(\alpha, \beta)}{\partial \beta}}{\varrho_1 - \varrho_2} & \frac{\partial y(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial B_1} = \varrho_1 \frac{\partial x(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial B_1} \\ \frac{\partial x(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial A_2} = \frac{-\frac{\partial y(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} + \varrho_1 \frac{\partial x(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}}{\varrho_1 - \varrho_2} = \frac{\partial \bar{x}(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial A_1} & \frac{\partial y(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial A_2} = \varrho_2 \frac{\partial x(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial A_2} \\ \frac{\partial x(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial B_2} = \frac{-\frac{\partial y(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \varrho_1 \frac{\partial x(\alpha, \beta)}{\partial \beta}}{\varrho_1 - \varrho_2} = \frac{\partial \bar{x}(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial B_1} & \frac{\partial y(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial B_2} = \varrho_2 \frac{\partial x(\alpha, \beta; \alpha, \beta)}{\partial B_2} \end{array}$$

und weiter unter Beachtung der für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  sicher richtigen Gleichung  $\bar{\varrho}_1 = \varrho_2$

$$\frac{\partial(x, \bar{x}, y, \bar{y})}{\partial(A_1, B_1, A_2, B_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial A_1} & \frac{\partial x}{\partial B_1} & \frac{\partial x}{\partial A_2} & \frac{\partial x}{\partial B_2} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial A_1} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial B_1} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial A_2} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial B_2} \\ \varrho_1 \frac{\partial x}{\partial A_1} & \varrho_1 \frac{\partial x}{\partial B_1} & \varrho_2 \frac{\partial x}{\partial A_2} & \varrho_2 \frac{\partial x}{\partial B_2} \\ \varrho_2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial A_1} & \varrho_2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial B_1} & \varrho_1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial A_2} & \varrho_1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial B_2} \end{vmatrix} = -\frac{\partial(x, \bar{x})}{\partial(A_1, B_1)} \frac{\partial(x, \bar{x})}{\partial(A_2, B_2)} (\varrho_1 - \varrho_2)^2,$$



und wenn zur Abkürzung

$$x_\alpha = \frac{\partial x(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \quad y_\alpha = \frac{\partial y(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \dots$$

stehen,

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(x, \bar{x})}{\partial(A_1, B_1)} &= \frac{-1}{\varrho_1 - \varrho_2} (x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha), \\ \frac{\partial(x, \bar{x})}{\partial(A_2, B_2)} &= \frac{\partial(\bar{x}, x)}{\partial(A_1, B_1)} = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2} (x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha). \end{aligned}$$

Man stellt übrigens leicht auch fest

$$(15) \quad \frac{\partial(x_\alpha, y_\alpha)}{\partial(A_1, B_1)} = -\frac{1}{4} (x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha), \quad \frac{\partial(x_\alpha, y_\alpha)}{\partial(A_2, B_2)} = -\frac{1}{4} (x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha).$$

Damit ist also für die Punkte der Anfangskurve  $C$ , d. h. für die Gerade  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  der Ebene  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  das Nichtverschwinden der Determinante (13) (als Folge des elliptischen Charakters von (1), der in den Beziehungen  $\varrho_1 = \bar{\varrho}_1 + \varrho_2$  benutzt wird) nachgewiesen und ist dann wegen der Stetigkeit der Ableitungen nach  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  auch in hinreichender Nähe dieser Punkte gesichert.

Weiter folgt aus den vorletzten beiden der obigen Gleichungen, daß man auf den Flächen  $\alpha_1 = \text{konst.}$ ,  $\beta_1 = \text{konst.}$  und  $\alpha_2 = \text{konst.}$ ,  $\beta_2 = \text{konst.}$   $x_1$  und  $x_2$  als unabhängige Veränderliche einführen kann.

## § 2.

**Analytischer Charakter der Funktionen  $u(x, y)$ ,  $p(x, y)$ , ...<sup>a)</sup>.**

Eine Ableitung  $\frac{\partial}{\partial A_1}, \frac{\partial}{\partial A_2}, \frac{\partial}{\partial B_1}, \frac{\partial}{\partial B_2}$  kann nunmehr als lineare Kombination der Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}$  geschrieben werden. Das charakteristische Gleichungssystem gilt für  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  (vgl. §. 331) mit den folgenden Bedeutungen der Operatoren

$$' = \frac{\partial}{\partial A_1}, \quad '' = \frac{\partial}{\partial B_1}; \quad \backslash = \frac{\partial}{\partial A_2}, \quad \backslash\backslash = \frac{\partial}{\partial B_2}$$

und auch noch mit

$$' = \frac{\partial}{\partial x_1} + \varrho_1 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \backslash = \frac{\partial}{\partial x_1} + \varrho_2 \frac{\partial}{\partial y_1}$$

(vgl. (6); man beachte  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = 0$ ).

Es wird nun für  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$

$$\frac{\partial}{\partial A_1} = K_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + K_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + K_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + K_4 \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial x_1} \right),$$

<sup>a)</sup> Vgl. hierzu Hans Lewy, „Neuer Beweis des analytischen Charakters“, Math. Annalen 101, S. 615 ff. Die obigen Überlegungen wiederholen im wesentlichen das dort Gesagte für unsern Fall, sind daher kurz gefaßt.

und wegen Gleichung (9) folgt  $\varrho_1 K_1 = K_2$ , wobei  $K_1 \neq 0$  ist, weil sonst der reelle Operator  $\frac{\partial}{\partial A_1}$  notwendig komplex würde; ähnlich ist

$$\frac{\partial}{\partial B_1} = L_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + L_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + L_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + L_4 \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right)$$

mit  $\varrho_1 L_1 = L_2$ ,  $L_1 \neq 0$ .

Analog kommt

$$\frac{\partial}{\partial A_2} = M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \varrho_1 M_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + M_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + M_4 \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right), \quad M_1 \neq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial B_2} = N_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \varrho_1 N_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + N_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + N_4 \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right), \quad N_1 \neq 0.$$

Es folgt nun hieraus

$$\begin{array}{ll} K_3 = \frac{1}{i} \frac{\partial x_2}{\partial A_1}, & K_4 = \frac{1}{i} \frac{\partial y_2}{\partial A_1} \quad \left| \quad M_3 = \frac{1}{i} \frac{\partial x_2}{\partial A_2}, \quad M_4 = \frac{1}{i} \frac{\partial y_2}{\partial A_2} \right. \\ L_3 = \frac{1}{i} \frac{\partial x_2}{\partial B_1}, & L_4 = \frac{1}{i} \frac{\partial y_2}{\partial B_1} \quad \left| \quad N_3 = \frac{1}{i} \frac{\partial x_2}{\partial B_2}, \quad N_4 = \frac{1}{i} \frac{\partial y_2}{\partial B_2} \right. \end{array}$$

und somit nach (15) für reelle  $x, y$  (oder  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ) und daher für eine gewisse Umgebung infolge der Stetigkeit

$$K_3 L_4 - K_4 L_3 = 0, \quad M_3 N_4 - M_4 N_3 = 0.$$

Wir schreiben jetzt die charakteristischen Gleichungen in der Form

$$\sum_{k=1}^8 a_{ik} \chi_k = 0 \quad (i = 1, \dots, 6),$$

$$\sum_{k=1}^8 a_{ik} \chi_k = 0 \quad (i = 7, 8),$$

dabei vertreten die  $\chi_k$  die Funktionen  $x, y, u, p, q, r, s, t$ , und die  $a_{ik}$  sind die entsprechenden Koeffizienten der Gleichungen (4), deren Reihenfolge der einfacheren Schreibweise wegen etwas abgeändert erscheint; es ist, wie schon seinerzeit bemerkt wurde,  $|a_{ik}| \neq 0$ . Deuten wir wieder den Operator  $\frac{\partial}{\partial A_1}$  als  $\frac{\partial}{\partial A_1}$  und  $\frac{\partial}{\partial A_2}$  als  $\frac{\partial}{\partial A_2}$ , und subtrahieren wir von dem so entstehenden System (4) beziehungsweise dieselben (mit  $K_1$  resp.  $M_1$  multiplizierten) Gleichungen in der Bedeutung (6) der Operatoren, so kommt das für  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  gültige Resultat

$$\sum_k a_{ik} \left[ K_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + K_4 \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \right] \chi_k = 0 \quad (i = 1, \dots, 6),$$

$$\sum_k a_{ik} \left[ M_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + M_4 \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \right] \chi_k = 0 \quad (i = 7, 8),$$

ähnlich erhält man auch

$$\sum_k a_{ik} \left[ L_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + L_4 \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \right] z_k = 0 \quad (i = 1, \dots, 6),$$

$$\sum_k a_{ik} \left[ N_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + N_4 \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \right] z_k = 0 \quad (i = 7, 8).$$

Dies sind lineare Gleichungen für  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) z_k$  und  $\left( \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) z_k$ , sie besitzen wegen  $K_3 L_4 - K_4 L_3 = 0$  und  $M_3 N_4 - M_4 N_3 = 0$  die einzige Lösung

$$V_x z_k = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) z_k = 0, \quad V_y z_k = \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) z_k = 0.$$

D. h. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten jedenfalls für  $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$ .

Es folgt nunmehr wie in der zitierten Arbeit durch Differentiation des Systems der charakteristischen Differentialgleichungen, daß die Größen  $V_x z_k = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) z_k$  und  $V_y z_k = \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) z_k$  ein linear homogenes hyperbolisches Anfangswertproblem mit nicht verschwindender Determinante lösen, das als eine Lösung sicher  $V_x z_k = 0, V_y z_k = 0$  zuläßt. Die Anwendung des Eindeutigkeitsatzes für die hyperbolischen Anfangswertprobleme liefert, daß notwendig somit  $V_x z_k = V_y z_k = 0$  gilt; und zwar in dem ganzen vierdimensionalen Bereich, in dem man sich durch den angegebenen Fortsetzungsprozeß die Lösungen  $z_k$  beschafft hat. Diese sind daher dort analytische Funktionen der beiden komplexen Veränderlichen  $x$  und  $y$ .

### § 3.

#### Beweis der Eindeutigkeit der Lösung von $F = 0$ .

Während die Ausführungen des vorigen Paragraphen, die dem Nachweis des analytischen Charakters der besorgten Fortsetzung der Lösung ins Komplexe dienten, von der speziellen Konstruktion dieser Fortsetzung keinen Gebrauch machten, kommen wir nun zu einer neuen Betrachtung, die, die Kenntnis der Lösung auf der Kurve  $C$  wesentlich benutzend, unsere Funktionen im vierdimensionalen Bereich auf eine andere Weise allmählich aufbaut und so die Eindeutigkeit der vorgelegten Lösung  $u(x, y)$  von  $F = 0$  ergeben wird. Dabei wird sich auch die Bedeutung einiger früher eingeführter Bezeichnungen, soweit die vorangehenden Überlegungen dies nicht schon taten, motivieren.

Ein erster Schritt ist der Nachweis, daß die Flächen  $\alpha_1 = \text{konst.}$ ,  $\beta_1 = \text{konst.}$  charakteristische Flächen im Sinne der regulären Funktionen

zweier komplexen Veränderlichen sind, wie er in einer Arbeit von Levi-Civita\*) erklärt wurde, ebenso die Flächen  $\alpha_2 = \text{konst.}$ ,  $\beta_2 = \text{konst.}$ . Genauer: die Flächen  $\alpha_1 = \text{konst.}$ ,  $\beta_1 = \text{konst.}$  bzw.  $\alpha_2 = \text{konst.}$ ,  $\beta_2 = \text{konst.}$  lassen sich in die Gestalt

$$y = f(x)$$

setzen, wo  $f$  eine analytische Funktion des komplexen Arguments  $x$  ist.

Nehmen wir eine Fläche  $\alpha_1 = \text{konst.}$ ,  $\beta_1 = \text{konst.}$ . Führen wir den Winkel  $\varphi$  wie auf S. 331 und außerdem  $R = \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2}$  ein, so sind mit

$$\alpha_2 = \alpha_1 + R \cos \varphi, \quad \beta_2 = \beta_1 + R \sin \varphi$$

natürlich auch  $x(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ , ...,  $z(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen von  $R$  und  $\varphi$ , die für  $R=0$  offenbar konstant in  $\varphi$  sind. (4<sub>2</sub>) nimmt nun nach S. 331 (\*) die Gestalt

$$y' - \varrho_2 x' = \frac{\partial y}{\partial R} - \varrho_2 \frac{\partial x}{\partial R} = 0$$

an. Für  $R=0$  ist der Ausdruck

$$A \equiv \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \varrho_2 \frac{\partial x}{\partial \varphi}$$

null; wir zeigen, daß  $A$  einer linear homogenen Differentialgleichung nach  $R$  genügt, womit auch für  $R \neq 0$

$$A \equiv \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \varrho_2 \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0$$

nachgewiesen sein wird.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho_2}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \dots \right) + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \dots \right), \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial R} &= \frac{\partial x}{\partial R} \left( \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \dots \right) + \frac{\partial y}{\partial R} \left( \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \dots \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial R} \left( \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \dots \right) + \varrho_2 \frac{\partial x}{\partial R} \left( \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \dots \right); \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial R} &= \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \varrho_2 \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial y}{\partial R} - \varrho_2 \frac{\partial x}{\partial R} \right) + \frac{\partial \varrho_2}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial R} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial x}{\partial R} \left( \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \dots \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \varrho_2 \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = \text{Faktor} \times A, \end{aligned}$$

q. e. d.

\*) Levi-Civita, Sulle funzioni di due o più variabili complesse. Rend. Acc. Linc. 14, pp. 492—99.

Man bekommt somit für  $\alpha_1, \beta_1 + \alpha_2, \beta_2$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_2} - \varrho_2 \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial y}{\partial \beta_2} - \varrho_2 \frac{\partial x}{\partial \beta_2} = 0,$$

eine Relation, deren Gültigkeit für  $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$  früher (S. 331, (11) (12)) bewiesen wurde. Daraus folgt, wenn man an Stelle von  $\alpha_2, \beta_2$  die unabhängigen Variablen  $x_1, x_2$  einführt, was ja nach § 1 (Ende) möglich ist,

$$\frac{d}{dx_1} y - \varrho_2 \frac{d}{dx_1} x = 0,$$

$$\frac{d}{dx_2} y - \varrho_2 \frac{d}{dx_2} x = 0,$$

also, wegen  $\left(\frac{d}{dx_1} + i \frac{d}{dx_2}\right) x = 0$ ,

$$\left(\frac{d}{dx_1} + i \frac{d}{dx_2}\right) y = 0,$$

und dies ist gerade die Behauptung.

Somit schreiben sich auch  $u, p, q, r, s, t$  auf der Fläche  $\alpha_1 = \text{konst.}, \beta_1 = \text{konst.}$  als analytische Funktionen des (unabhängigen) Argumentes  $x_1 + i x_2$ . Denn man hat

$$\left(\frac{d}{dx_1} + i \frac{d}{dx_2}\right) u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{d}{dx_1} + i \frac{d}{dx_2}\right) y = 0$$

nach § 2 und dem soeben Bewiesenen.

Ich wähle nun für  $\alpha_1, \beta_1$  zunächst einen Punkt der Anfangskurve  $\beta = 0$ . Von den Funktionen  $x(\alpha_1, 0; \alpha_2, \beta_2), y(\alpha_1, 0; \alpha_2, \beta_2), u(\alpha_1, 0; \alpha_2, \beta_2), \dots$  kennen wir eindeutig die Werte für  $\beta_2 = 0$ , da wir die Werte der  $x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), u(\alpha, \beta), \dots$  für  $\beta = 0$  kennen. Um dies einzusehen, genügt es, sich an die Definition der Funktionen der vier Argumente  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  zu erinnern. Die den verschiedenen Werten von  $\alpha_2$  entsprechenden Funktionswerte

$$x_1 + i x_2 = x(\alpha_1, 0; \alpha_2, 0)$$

bilden in der Fläche  $\alpha_1 = \text{konst.}, \beta_1 = \text{konst.} = 0$ , in der  $x_1$  und  $x_2$  als unabhängige Variable genommen sein mögen, eine Kurve  $K$  (das Bild der Geraden  $\beta_2 = 0$  einer  $\alpha_2, \beta_2$ -Ebene bei der Parameterdarstellung durch  $\alpha_2, \beta_2$ ). Welches nun auch die Funktionen  $x, y, u, p, q, r, s, t(\alpha, \beta)$  sonst sein mögen; da sie für  $\beta = 0$  übereinstimmen, so stimmen sie<sup>7)</sup> auf der Geraden  $\alpha_1 = \text{konst.}, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0$  überein, weil sie dort Lösungen desselben Anfangswertproblems sind. Weiter sind sie, als Funktionen der komplexen Variablen  $x = x_1 + i x_2$  in der Fläche  $\alpha_1 = \text{konst.}, \beta_1 = 0$  betrachtet, in einer gewissen Halbumgebung der Kurve  $K$  regulär, sind

<sup>7)</sup> bzw. ihre oben konstruierten Fortsetzungen.

auf  $K$  noch stetig und nehmen daher bei Annäherung an  $K$  gleichmäßig gewisse (soeben als eindeutig erkannte) Randwerte an. Sie werden also auf der ganzen Fläche  $\alpha_1 = \text{konst.}$ ,  $\beta_1 = 0$  übereinstimmen, vermöge des in der Einleitung zitierten Satzes über reguläre Funktionen eines komplexen Arguments. Das gibt die Eindeutigkeit der Funktionen

$$x(\alpha_1, 0; \alpha_2, \beta_2), \quad y(\alpha_1, 0; \alpha_2, \beta_2), \quad u(\alpha_1, 0; \alpha_2, \beta_2), \dots$$

Ähnlich wird dasselbe für

$$x(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, 0), \quad y(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, 0), \quad u(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, 0), \dots$$

bewiesen.

Nunmehr ist es leicht, die Eindeutigkeit in dem Umfange zu beweisen, wie sie in der Einleitung behauptet wurde. Um nämlich zu zeigen, daß die Funktionen  $x(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ ,  $y(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ ,  $u(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ , ... für hinreichend kleine Werte  $\alpha, \beta$  eindeutig bestimmt sind, verbinde man in der  $\alpha, \beta$ -Ebene den Punkt  $\alpha, \beta$  gradlinig mit einem Punkte der Anfangskurve, etwa mit  $\alpha_1, \beta_1 = 0$ . Die Werte

$$x(0, 0; \mu\alpha, \mu\beta), \quad y(0, 0; \mu\alpha, \mu\beta), \dots \quad (1 \geq \mu \geq 0)$$

und

$$x(\lambda\alpha, \lambda\beta; 0, 0), \quad y(\lambda\alpha, \lambda\beta; 0, 0), \dots \quad (1 \geq \lambda \geq 0)$$

sind bereits eindeutig festgelegt, wie soeben gezeigt. Allgemein gehorchen die Funktionen von  $\lambda$  und  $\mu$

$$x(\lambda\alpha, \lambda\beta; \mu\alpha, \mu\beta), \dots$$

dem Differentialgleichungssystem (4) mit der Festsetzung

$$\dot{\phantom{x}} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad \dot{\phantom{x}} = \frac{\partial}{\partial \mu}$$

(vgl. S. 331, (8'')). Man hat hier demnach ein Anfangswertproblem vorliegen, in dem die gesuchten Funktionen auf den beiden Charakteristiken  $\mu = 0$  und  $\lambda = 0$ ,  $1 \geq \lambda \geq 0$  bzw.  $1 \geq \mu \geq 0$  bekannt sind. Ihre Werte sind dann nach dem allgemeinen Satze über solche hyperbolische Differentialgleichungen in dem ganzen Quadrate  $0 \leq \mu \leq 1$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$  eindeutig bestimmt; für den Punkt  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  bekommt man speziell die Eindeutigkeit von

$$x(\alpha, \beta; \alpha, \beta), \quad y(\alpha, \beta; \alpha, \beta), \dots$$

Dies ist genau das Ziel der Untersuchung; denn wenn man wieder auf der Fläche  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  die reellen Veränderlichen  $x$  und  $y$  einführt, so heißt das, die Funktionen

$$u(x, y), \quad p(x, y), \dots$$

sind durch ihre Anfangswerte auf der Kurve  $C$  eindeutig festgelegt.

Bemerkung: Wünscht man eine genauere Festsetzung der in dem Beweise auftretenden *Umgebungen*, so überzeugt man sich leicht von folgendem: Da es zu jedem inneren Punkt  $P$  der Kurve  $C$  eine gewisse Halb-umgebung gibt, in der zwei Lösungen der Gleichung (1), die auf ihre Übereinstimmung zu untersuchen sind, existieren, so gibt es auch in der  $\alpha, \beta$ -Ebene einen von  $\beta = 0$  begrenzten Halbkreis mit dem Bilde jenes Punktes  $P$  als Mittelpunkt, so daß dort beide Lösungen existieren; wählt man einen genügend kleinen konzentrischen Halbkreis, so sind dort alle Prozesse der Fortsetzung für beide Lösungen erlaubt; desgleichen alle weiteren Schlüsse betreffend die Eindeutigkeit der Lösungen der vorkommenden hyperbolischen Anfangswertprobleme; die diesbezüglichen Verhältnisse sind ähnlich denen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

(Eingegangen am 20. 5. 1930.)



# Über die Wärmeleitungsgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten im räumlichen Falle.

I. Mitteilung.

Von

Erich Rothe in Breslau.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Behandlung der sogenannten ersten Randwertaufgabe für die Gleichung

$$(1) \quad L(z) = R(x, y_1, y_2, y_3) \frac{\partial z}{\partial x} + S(x, y_1, y_2, y_3),$$

wobei

$$(2) \quad L(z) = \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ik} \frac{\partial z}{\partial y_k} \right) \quad [a_{ik} = a_{ik}(y_1, y_2, y_3) = a_{ki}]$$

ist und die Form  $\sum a_{ik} \eta_i \eta_k$  positiv definit sei. Die bekannte Behandlung dieser Aufgabe durch E. E. Levi<sup>1)</sup> im Spezialfall  $L(z) \equiv \Delta z$ <sup>2)</sup>

benutzt wesentlich die Fundamentallösung  $\frac{1}{x^{1/2}} e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{4x}}$  und kann daher auf die Gleichung (1) nicht unmittelbar übertragen werden, da für diese die Existenz einer Fundamentallösung anscheinend noch nicht bewiesen ist<sup>3a)</sup>. Um die hier befolgte Methode, welche der in einer früheren Arbeit auf die

<sup>1)</sup> Annali di Matematica (3) 14 (1908). — Vgl. auch Gevrey, Journal d. Math. (6) 9 (1914). — Über die Behandlung von (1) für den Fall, daß  $R$  von  $x$  unabhängig und  $S \equiv 0$  ist, mit der Methode der Partikularlösungen siehe A. Hammerstein, Über die Entwicklung gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwertaufgaben, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 304ff.

<sup>2)</sup> Dieser entspricht der Wärmeleitung in homogenen isotropen Körpern, während Gleichung (1) auch den Fall inhomogener anisotroper Körper umfaßt.

<sup>3a)</sup> Anmerkung bei der Korrektur. Vgl. jedoch die demnächst in der Math. Zeitschr. erscheinende Arbeit des Verfassers: Über die Grundlösung bei parabolischen Gleichungen.

Gleichung der linearen Wärmeleitung<sup>2)</sup> angewandten ganz analog ist, auseinanderzusetzen, müssen wir zuerst die Aufgabe formulieren: Sei  $\mathfrak{B}$  ein einfach zusammenhängender, ganz im Endlichen liegender Bereich des  $y$ -Raumes<sup>3)</sup>,  $O$  seine Oberfläche.  $\mathfrak{U}$  sei alsdann der zylindrische durch

$$(3) \quad y \in \mathfrak{B}, \quad 0 \leq x \leq X,$$

gegebene Teil des vierdimensionalen  $(y, x)$ -Raumes und  $\mathfrak{M}$  sein durch

$$(4) \quad y \in O, \quad 0 \leq x \leq X,$$

gegebener „Mantel“. Als dann suchen wir in  $\mathfrak{U}$  eine Lösung von (1), welche den Randbedingungen

$$(5a) \quad z(0, y) = z_0(y),$$

$$(5b) \quad z = 0 \text{ auf } \mathfrak{M}^4)$$

wobei  $z_0$  eine vorgegebene Funktion von  $y$  ist, die jedoch (wegen (5b)) der Bedingung

$$(6) \quad z_0 = 0 \text{ auf } O$$

genügen soll.

<sup>2)</sup> Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben, Math. Annalen 102 (1930), S. 650. Im folgenden mit Z. p. R. zitiert. Soweit sich einzelne Beweise aus dieser Arbeit für die vorliegende unmittelbar verwenden ließen, wurde ihre Darstellung unter Berufung auf die entsprechenden Stellen in Z. p. R. übergangen. Im übrigen ist die Darstellung unabhängig von Z. p. R. gehalten.

<sup>3)</sup>  $y$  steht an Stelle von  $(y_1, y_2, y_3)$ . Ebenso werden wir häufig statt  $f(x, y_1, y_2, y_3)$  kurz  $f(x, y)$  schreiben.

<sup>4)</sup> Die allgemeinere Aufgabe, die entsteht, wenn man an Stelle von (5b) die Forderung

$$(*) \quad z = f \text{ auf } \mathfrak{M},$$

wo  $f$  eine gegebene auf  $\mathfrak{M}$  definierte Funktion ist, stellt, läßt sich (unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über  $f$  und den Rand von  $\mathfrak{B}$ ) auf die des Textes zurückführen, wenn man irgendeine Funktion  $F(x, y)$  kennt, die der Bedingung  $(*)$  genügt;  $\bar{z} = z - F$  ist dann nämlich eine Lösung von (1), (5), wenn man  $S$  durch

$$\bar{S} = S + R \frac{\partial F}{\partial x} - L(F)$$

und  $z_0$  durch  $\bar{z}_0 = z_0 - F(0, y)$  ersetzt.

Ist  $\mathfrak{B}$  ein Sternbereich, so kann man eine Funktion  $F(x, y)$  mit der verlangten Eigenschaft folgendermaßen erhalten: Sei  $y_0$  ein fester innerer Punkt von  $\mathfrak{B}$ . Auf der Geraden  $y = y_0$  sei dann  $F(x, y) = 0$ . Ist  $P = (x, y)$  ein nicht auf dieser Geraden gelegener Punkt, so sei  $O_x$  der Punkt  $(x, y_0)$ . Der Halbstrahl  $O_x P$  schneide  $\mathfrak{M}$  in  $P'$ . Es sei weiter  $O_x P = r$ ,  $O_x P' = r'$  und  $\alpha$  eine positive ganze Zahl.

Dann genügt  $F = f \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{\alpha+1}$  der Bedingung  $(*)$  und ist überdies  $\alpha$ -mal nach  $x, y_1, y_2, y_3$  differenzierbar (auch in den Punkten der Geraden  $y = y_0$ ), wenn das gleiche von  $f$  und dem Rande von  $\mathfrak{B}$  gilt. Unter entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über die beiden Letztgenannten läßt sich durch passende Wahl von  $\alpha$  erreichen, daß  $\bar{S}$  und  $\bar{z}_0$  so oft differenzierbar sind, wie später (S. 345f.) von  $S$  und  $z_0$  verlangt wird.

Die Methode zur Behandlung der geschilderten Aufgabe besteht nun in folgendem: Wir teilen das Intervall  $0 \leq x \leq X$  in  $n$  Teile der Länge  $h = X:n$  und ersetzen (1), (5) durch

$$(1') \quad L(w_{r+1}) = R_{r+1} \frac{w_{r+1} - w_r}{h} + S_{r+1},$$

$$(5') \quad w_0(y) = z_0, \quad w_{r+1} = 0 \text{ auf } O,$$

wobei

$$R_{r+1} = R(x_{r+1}, y), \quad S_{r+1} = S(x_{r+1}, y).$$

Da  $w_0 = z_0$  gegeben ist, stellt (1'), (5') für  $r=0$  eine inhomogene lineare elliptische Randwertaufgabe in den drei Variablen  $y_1, y_2, y_3$  für die Funktion  $w_1(y)$  dar<sup>6)</sup>; allgemein stellt (1'), (5') ein lineares elliptisches dreidimensionales Randwertproblem für  $w_{r+1}$  dar, wenn  $w_r$  schon bekannt ist. Hat man so von  $r=0$  ausgehend die  $w_r$  berechnet, so wird man, um zu einer Lösung  $z$  von (1), (5) zu gelangen, versuchen den Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  auszuführen.

Hier ist allerdings folgender Umstand zu beachten: Schon in dem Falle der Gleichung der linearen Wärmeleitung  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x}$  ist nämlich bekannt<sup>7)</sup>, daß  $\frac{\partial z}{\partial x}$  für  $x \rightarrow 0$  nicht endlich zu bleiben braucht, sondern wie  $\frac{1}{x}$  unendlich werden kann. Man wird daher bei dem Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  mit dem Unendlichwerden des Quotienten  $\frac{w_1 - w_0}{h}$  rechnen müssen, und da die angegebene Methode wesentlich auf der sukzessiven Behandlung der Gleichungen (1'), ausgehend von  $r=0$ , beruht, erscheint ihrer Anwendung eine ernsthafte Schwierigkeit entgegenzustehen.

Diese tritt nun nicht auf, wenn man verlangt, daß die Differentialgleichung (1) nicht nur im Innern von (3), sondern auch in dem durch  $y < 0, x=0$  gekennzeichneten Schnitt des Zylindermantels  $\mathfrak{M}$  mit der Ebene  $x=0$  erfüllt ist, und das gleiche von den aus (1) durch Anwendung des Operators  $L$  bzw. Differentiation nach  $x$  entstehenden Gleichungen verlangt. In Formeln lautet diese Forderung unter Berücksichtigung von (5) und (6)

$$(7) \quad L(z_0) = S(0, y) \quad \text{für } y < 0,$$

$$(8) \quad L\left(\frac{1}{R} L(z_0)\right)_{x=0} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) + L\left(\frac{S}{R}\right)\right]_{x=0} \quad \text{für } y < 0.$$

<sup>6)</sup> Über die Lösbarkeit elliptischer Randwertaufgaben mit drei unabhängigen Variablen s. L. Lichtenstein, Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, Math. Zeitschr. 20 (1924), S. 198, und W. Sternberg, Über die linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Variablen, Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 286.

<sup>7)</sup> Vgl. etwa Gevrey, loc. cit. S. 330.

Unter diesen Voraussetzungen soll nun in der vorliegenden ersten Mitteilung der Existenzbeweis erbracht und eine Abschätzung des Fehlers  $|z(x, y) - w_r(y)|$  gegeben werden. Die Befreiung von den Voraussetzungen (7), (8) soll in einer weiteren Mitteilung durch Approximation der gegebenen Funktion  $z_0$  durch solche Funktionen, die (7), (8) befriedigen, versucht werden. Eine solche Approximation ist bei stetigem  $z_0$  möglich auf Grund eines an anderer Stelle<sup>6)</sup> bewiesenen Satzes, nach dem für jede stetige Funktion  $f(y_1, y_2, y_3)$  die Darstellung

$$f = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r u_r}{1 + \frac{\lambda_r}{\lambda}} \quad (c_r = \int \varrho u_r dy_1 dy_2 dy_3)$$

gilt, wenn  $\varrho$  eine gegebene positive Funktion von  $y$  ist, während  $u_r$  und  $-\lambda_r$  die normierten Eigenfunktionen und Eigenwerte des Problems  $L(u) - \lambda \varrho u = 0$ ,  $u = 0$  auf  $O$  sind.

### I. Hilfsbetrachtungen.

Das wesentlichste Hilfsmittel für alle weiteren Betrachtungen bildet der folgende

Hilfssatz 1. Der ganz im Endlichen liegende Bereich  $\mathfrak{B}$  des  $y$ -Raumes besitze eine stetig gekrümmte Oberfläche  $O$ .  $\eta(y)$  sei die Lösung von

$$(9) \quad L(\eta) - \lambda \varrho \eta = -\lambda \varphi,$$

$$(10) \quad \eta = 0 \text{ auf } O.$$

$\varrho$  und  $\varphi$  seien einmal stetig differenzierbare und die (nach (2)) in  $L$  auftretenden  $\alpha_{ik}$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen von  $y_1, y_2, y_3$ .  $\varphi$  darf auch von  $\lambda$  abhängen. Dann ist in  $\mathfrak{B}$  für  $\lambda > 0$

$$(11) \quad |\eta| \leq \text{Max} |\varphi|,$$

wobei das Maximum in bezug auf  $y$  bei festem  $\lambda$  gemeint ist<sup>7)</sup>.

Hilfssatz 2. Sei  $\alpha$  eine auf  $O$  erklärte stetige Funktion. Ist dann  $\eta$  die durch die Randbedingung

$$\eta = \alpha$$

bestimmte Lösung von (9), so ist in  $\mathfrak{B}$  für  $\lambda > 0$

$$|\eta| \leq \text{Max} |\varphi| + \text{Max} |\alpha|.$$

<sup>6)</sup> E. Rothe, Über die Approximation stetiger Funktionen durch Eigenfunktionen elliptischer Differentialgleichungen, Sitzungsberichte d. Berliner Math. Ges. 28 (1929).

<sup>7)</sup> Dieser der Vollständigkeit wegen hier ausgesprochene Satz ist auf S. 74 der in Anm. 7) angeführten Arbeit bewiesen.

Beweis. Wir setzen  $\eta = \eta_1 + \eta_2$ , wo  $\eta_1$  und  $\eta_2$  durch

$$\begin{aligned} L(\eta_1) - \lambda \varrho \eta_1 &= -\lambda \varrho \varphi, & \eta_1 &= 0 \text{ auf } O, \\ L(\eta_2) - \lambda \varrho \eta_2 &= 0, & \eta_2 &= \alpha \text{ auf } O \end{aligned}$$

bestimmt sind. Da  $\eta_2$  in einem inneren Punkte von  $\mathfrak{B}$  weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum annehmen kann<sup>10)</sup>, ist  $|\eta_2| \leq \text{Max } |\alpha|$ ; daher folgt die Behauptung aus Hilfssatz 1.

Die folgenden beiden Hilfssätze bringen Differenzen bzw. Differenzenquotienten gleicher Ordnung, die aber mit verschiedenen Argumentdifferenzen gebildet sind, in Zusammenhang.

Hilfssatz 3. Sei  $f(x)$  eine gegebene Funktion von  $x$ ; sei ferner  $h_0$  eine positive Zahl und  $h_{n+1} = \frac{1}{2} h_n$  für  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Weiter sei allgemein

$$(12) \quad \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x); \quad \Delta_h^{\sigma+1} f(x) = \Delta_h(\Delta_h^\sigma f(x)) \quad (\sigma = 1, 2, \dots)$$

gesetzt. Ist dann für  $n = N$  für ein bestimmtes  $\sigma$

$$(13) \quad |\Delta_{h_N}^\sigma f(x)| \leq h_N^\sigma K,$$

wo  $K$  eine von  $x$  und  $h_N$  unabhängige Zahl ist, so gilt diese Ungleichung auch für alle  $n < N$ .

Beweis. Sei  $k = N - n$ . Dann ist  $h_N = h_{n+k} = h_n \cdot 2^k$  und offenbar

$$\Delta_{h_N} f(x) = \sum_{\kappa=0}^{2^k-1} \Delta_{h_{n+k}} f(x + \kappa h_{n+k}).$$

Sukzessive Anwendung dieser Gleichung liefert

$$(14) \quad \Delta_{h_n}^\sigma f(x) = \sum_{\kappa_1=0}^{2^k-1} \dots \sum_{\kappa_\sigma=0}^{2^k-1} \Delta_{h_{n+k}}^\sigma f(x + (\kappa_1 + \dots + \kappa_\sigma) h_{n+k}).$$

Die rechts stehende Summe enthält  $2^{k\sigma}$  Summanden  $\Delta_{h_{n+k}}^\sigma$  und ist daher nach Voraussetzung dem Betrage nach höchstens gleich  $2^{k\sigma} h_{n+k}^\sigma K = h_n^\sigma K$ , womit die Behauptung bewiesen ist.

Hilfssatz 4. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Hilfssatz 3 gilt:

$$(15) \quad \left| \frac{\Delta_{h_n}^{\sigma-1} f(x)}{h_n^{\sigma-1}} - \frac{\Delta_{h_{n+k}}^{\sigma-1}}{h_{n+k}^{\sigma-1}} \right| \leq \bar{K} h_n \quad (n+k=N),$$

wo  $\bar{K}$  eine nur von  $\sigma$  und  $K$  abhängige Konstante ist.

Beweis. Auf beiden Seiten von (14) subtrahieren wir  $2^{k\sigma} \Delta_{h_{n+k}}^\sigma$  und dividieren dann durch  $h_n^\sigma = 2^{k\sigma} h_{n+k}^\sigma$ . Ersetzen wir dann noch  $\sigma$  durch

<sup>10)</sup> Siehe etwa Sternberg, loc. cit. S. 291.

$\sigma - 1$ , so erhalten wir

$$(16) \quad \frac{d_{h_n}^{\sigma-1} f(x)}{h_n^{\sigma-1}} - \frac{d_{h_{n+k}}^{\sigma-1} f(x)}{h_{n+k}^{\sigma-1}} = \frac{1}{2^{k(\sigma-1)}} \sum_{\kappa_1=0}^{2^k-1} \dots \sum_{\kappa_{\sigma-1}=0}^{2^k-1} \left[ \frac{d_{h_{n+k}}^{\sigma-1} f(x + (\kappa_1 + \dots + \kappa_{\sigma-1}) h_{n+k}) - d_{h_{n+k}}^{\sigma-1} f(x)}{h_{n+k}^{\sigma-1}} \right].$$

Die rechte Seite ist offenbar gleich

$$(17) \quad \frac{1}{2^{k(\sigma-1)}} \sum_{\kappa_1=0}^{2^k-1} \dots \sum_{\kappa_{\sigma-1}=0}^{2^k-1} \frac{d_{h_{n+k}}^{\sigma-1} [f(x + (\kappa_1 + \dots + \kappa_{\sigma-1}) h_{n+k}) - f(x)]}{h_{n+k}^{\sigma-1}} \\ = \frac{h_{n+k}}{2^{k(\sigma-1)}} \sum_{\kappa_1=0}^{2^k-1} \dots \sum_{\kappa_{\sigma-1}=0}^{2^k-1} \sum_{\lambda=0}^{\kappa_1 + \dots + \kappa_{\sigma-1} - 1} \frac{d_{h_{n+k}}^{\sigma} f(x + \lambda h_{n+k})}{h_{n+k}^{\sigma}}$$

und daher nach Voraussetzung absolut genommen höchstens gleich  $\frac{h_n}{2^{k\sigma}} K$  multipliziert mit der Anzahl der in (17) rechts auftretenden Summanden. Diese ist nun

$$\sum_{\kappa_1=0}^{2^k-1} \dots \sum_{\kappa_{\sigma-1}=0}^{2^k-1} \sum_{\lambda=0}^{\kappa_1 + \dots + \kappa_{\sigma-1} - 1} 1 = \sum_{\kappa_1=0}^{2^k-1} \dots \sum_{\kappa_{\sigma-1}=0}^{2^k-1} (\kappa_1 + \dots + \kappa_{\sigma-1}) = \sum_{\lambda=0}^{(\sigma-1)(2^k-1)} \lambda a_{\lambda},$$

wenn man unter  $a_{\lambda}$  die Anzahl der Darstellungen von  $\lambda$  als Summe von  $\sigma - 1$  nicht negativen ganzen Zahlen  $\leq 2^k - 1$  versteht. Wir vergrößern also, wenn wir  $a_{\lambda}$  durch die Anzahl *aller* Darstellungen von  $\lambda$  als Summe von  $\sigma - 1$  nicht negativer ganzer Zahlen ersetzen. Diese ist  $\binom{\lambda + \sigma - 2}{\sigma - 2}$  und die rechte Seite von (16) wird daher absolut genommen kleiner als

$$\frac{h_n}{2^{k\sigma}} K \sum_{\lambda=1}^{(\sigma-1)(2^k-1)} \lambda \binom{\lambda + \sigma - 2}{\sigma - 2} = \frac{h_n}{2^k} K \cdot \frac{1}{(\sigma-2)!} \sum_{\lambda=1}^{(\sigma-1)(2^k-1)} \frac{(\lambda + \sigma - 2)(\lambda + \sigma - 3) \dots (\lambda + 1) \lambda}{(2^k)^{\sigma-1}}.$$

Wegen  $\lambda \leq (\sigma - 1)(2^k - 1)$  ist das allgemeine Glied der rechtsstehenden Summe  $< (\sigma - 1)^{\sigma-1}$  und der ganze Ausdruck ist kleiner als

$$\frac{h_n}{2^k} K \cdot \frac{1}{(\sigma-2)!} \cdot (\sigma-1)(2^k-1) \cdot (\sigma-1)^{\sigma-1} < K \frac{(\sigma-1)^{\sigma}}{(\sigma-2)!} h_n.$$

Hiermit ist die Behauptung (15) mit  $\bar{K} = K(\sigma-1)^{\sigma} : (\sigma-2)!$  bewiesen.

## II. Der Existenzsatz.

Vorgelegt sei das Problem (1), (5). Im Bereiche

$$(18) \quad y < \mathfrak{B}', \quad 0 \leq x \leq X,$$

wo  $\mathfrak{B}'$  ein den Bereich  $\mathfrak{B}$  in seinem Innern enthaltender Bereich ist, seien die Koeffizienten  $a_{ik}$  von (1) zweimal stetig,  $R$  und  $S$  fünfmal stetig nach ihren Argumenten differenzierbar. Außerdem sollen die zweiten Ableitungen der  $a_{ik}$  eine Höldersche Bedingung erfüllen. Hinsichtlich  $z_0$  werde in  $\mathfrak{B}$  die Existenz und viermalige stetige Differenzierbarkeit von  $L(z_0)$  sowie das

Bestehen von (6), (7) und (8) vorausgesetzt. [Hängt  $R$  von  $x$  nicht ab, so genügt, wie um einer Anwendung in der zweiten Mitteilung willen hervorgehoben werden soll, die Existenz und Stetigkeit von  $L(z_0)$ ,  $L(\frac{1}{R}L(z_0))$  und  $L(\frac{1}{R}L(\frac{1}{R}L(z_0)))$ .] Ferner soll eine Konstante  $m$  existieren, so daß

$$(19) \quad R \geq m > 0.$$

Ist dann  $X'$  eine beliebige positive Zahl  $< X$ , so gibt es eine und nur eine Funktion  $z(x, y)$ , die die Randbedingung (5) erfüllt, in dem abgeschlossenen Bereiche

$$(20) \quad y < \mathfrak{B}, \quad 0 \leq x \leq X',$$

stetig ist und in seinem Innern die Differentialgleichung erfüllt.

Zum Beweise gehen wir vom Problem (1'), (5') aus, welches unter den gemachten Voraussetzungen (auf Grund der in Anm. <sup>9</sup>) zitierten Arbeiten) jedenfalls eine Lösung besitzt, und werden zunächst einige Abschätzungen über dessen Lösungen  $w$ , herleiten, sodann den eigentlichen Existenzbeweis (S. 350) und schließlich den Eindeutigkeitsbeweis (S. 353) erbringen.

### Eine Abschätzungen.

Ist  $K$  eine die Ungleichungen

$$(21a) \quad K > \frac{1}{m} |S - L(z_0)|, \quad K > \frac{1}{m} \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right|, \quad K > \frac{1}{m} \left| \frac{\partial S}{\partial x} \right|$$

erfüllende Konstante und

$$(21b) \quad L_1 = K e^{KX} (1 + X),$$

so ist

$$(22) \quad |\Delta w_r| < L_1 h \quad (r h \leq X - h).$$

Den Beweis hierfür können wir übergehen, da er auf Grund von Hilfsatz 1 fast genau derselbe ist wie der in Z. p. R. für die entsprechende Ungleichung gegebene<sup>11)</sup>. Aus dem gleichen Grunde können wir uns den im wesentlichen auf der Voraussetzung (7) und den Hilfssätzen 1 und 2 beruhenden Beweis für die Ungleichungen

$$(23) \quad |L(\Delta w_0)| < L_1' h \quad ((r+1)h < X),$$

$$(24) \quad |\Delta^2 w_r| < L_2 h^2 \quad ((r+2)h < X)$$

ersparen<sup>12)</sup>. Hier ist

<sup>11)</sup> Z. p. R., Gl. (25). Man hat nur die dort im Beweise auftretende zweite Ableitung nach der einen Variablen  $y$  durch die Operation  $L$  zu ersetzen sowie die Vereinfachungen zu beachten, die sich daraus ergeben, daß bei uns  $S$  nicht von  $x$  abhängt.

<sup>12)</sup> Z. p. R., Gl. (35) und (38). Vgl. die vorige Anmerkung.



$$(25) \quad L'_1 = \frac{\text{Max } R}{m} \left\{ \text{Max} \left| L \left( \frac{S - L(z_0)}{R} \right) \right| + \text{Max} \left| \frac{\partial S}{\partial x} \right| \right\}$$

und

$$(26) \quad L_2 = K_1 e^{K_1 x} (1 + X),$$

wobei  $K_1$  eine Konstante ist, die den folgenden Ungleichungen

$$(27) \quad \begin{aligned} K_1 &> \frac{1}{m} \left\{ L_1 \text{Max} \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right| + \text{Max} \left| \frac{\partial S}{\partial x} \right| + L'_1, \quad K_1 > \frac{1}{m} \text{Max} \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right|, \\ K_1 &> \frac{1}{m} \left\{ L_1 \text{Max} \left| \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right| + \text{Max} \left| \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right| \right\} \end{aligned}$$

genügen soll.

Wir werden nun noch die weiteren Ungleichungen

$$(28) \quad |L(\Delta^2 w_0)| < L'_2 h^2,$$

$$(29) \quad |L(\Delta^3 w_r)| < L_3 h^3 \quad ((r+3)h < X),$$

wo  $L'_2, L_3$  von  $h, y, r$  unabhängige Konstanten sind, beweisen. (Es wird nämlich später (S. 352 f.) noch die Konvergenz der zweiten Differenzenquotienten gegen die zweiten Ableitungen der Grenzfunktion benötigt.)

Beweis von (28). Ziehen wir von (1') für  $r=0$  bzw.  $r=1$   $L(w_0)$  bzw.  $L(w_1)$  ab, so erhalten wir durch Subtraktion der entstandenen Gleichungen

$$L(\Delta^2 w_0) = \frac{R_1 \Delta w_1 - R_2 \Delta w_0}{h} - L(\Delta w_0) + \Delta S_1.$$

Hieraus und aus (1') für  $r=0$  folgt nach elementarer Rechnung

$$(30) \quad \begin{aligned} L(\Delta^2 w_0) &= \frac{R_0}{h} \left\{ \Delta w_1 - 2 \Delta w_0 + h \frac{1}{R_0} [L(w_0) + S_2 - 2 S_1] \right\} \\ &\quad + \frac{2}{h} \Delta R_0 \cdot \Delta^2 w_0 + \frac{1}{h} \Delta^2 R_0 \cdot \Delta w_1. \end{aligned}$$

Also ist nach (22) und (24)

$$(31) \quad \begin{aligned} |L(\Delta^2 w_0)| &\leq \frac{R_0}{h} \left| \Delta w_1 - 2 \Delta w_0 + h \frac{1}{R_0} [L(w_0) + S_2 - 2 S_1] \right| \\ &\quad + h^2 \left\{ 2 L_2 \text{Max} \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right| + L_1 \text{Max} \left| \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Um nun den Faktor von  $R_0/h$  abzuschätzen, bemerken wir, daß nach (1') für  $r=1$  und 2

$$L(\Delta w_0) - \frac{1}{h} R_1 \Delta w_0 = -L(w_0) + S_1, \quad L(\Delta w_1) - \frac{1}{h} R_2 \Delta w_1 = -L(w_1) + S_2$$

ist. Hieraus folgt durch passende Umformung, wenn

$$(32) \quad \Delta w_1 - 2 \Delta w_0 + h \frac{1}{R_0} [L(w_0) + S_2 - 2 S_1] = F$$

gesetzt wird,

$$(33) \quad L(F) - \frac{1}{h} R_0 F = - \left\{ L(w_1) - L(w_0) - h L \left( \frac{1}{R_0} [L(w_0) + S_2 - 2S_1] \right) \right\} \\ - \frac{1}{h} [2 \Delta^2 w_0 \Delta R_0 + \Delta w_1 \Delta^2 R_0].$$

Auf  $O$  wird nun nach (5'), (6), (7) und (19)

$$|F| = h \frac{1}{R_0} \Delta^2 S_0 \leq h^2 \frac{1}{m} \text{Max} \left| \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|.$$

Hieraus und aus (33) in Verbindung mit (22) und (24) folgt nach Hilfsatz 2 mit  $\lambda = 1:h$

$$(34) \quad |F| \leq \frac{h}{m} \text{Max} |G| + \frac{h^2}{m} \left\{ 2 L_2 \text{Max} \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right| + L_1 \text{Max} \left| \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right| + \text{Max} \left| \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right| \right\},$$

wenn

$$(35) \quad L(w_1) - L(w_0) - h L \left( \frac{1}{R_0} [L(w_0) + S_2 - 2S_1] \right) = G$$

gesetzt ist. Um  $G$  abzuschätzen, bilden wir aus (1') für  $v=0$  die Gleichung

$$L \left( \frac{1}{R_1} L(w_1) \right) - \frac{1}{h} L(w_1) = - \frac{1}{h} L(w_0) + L \left( \frac{S_1}{R_1} \right),$$

aus welcher durch weitere Umformung

$$(36) \quad L \left( \frac{1}{R_1} G \right) - \frac{1}{h} R_1 \cdot \frac{1}{R_1} G = L \left\{ \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) L(w_0) \right\} + L \left( \frac{S_2 - S_1}{R_0} \right) \\ + L \left\{ S_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right) \right\} - h L \left\{ \frac{1}{R_1} L \left( \frac{1}{R_0} [L(w_0) + S_2 - 2S_1] \right) \right\}$$

folgt. Auf  $O$  wird nun nach (35), (1'), (7), (8)

$$G = \left| S_1 - S_0 - h \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{x=0} - h L \left( \frac{\Delta^2 S_0}{R_0} \right) \right| \leq h^2 \left( \text{Max} \left| \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right| + h \text{Max} \left| L \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \right| \right).$$

Hieraus und aus Hilfsatz 2 folgt

$$(37) \quad |G| \leq \text{Max} R \frac{h^2}{m} \left[ \text{Max} \left| L \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} L(z_0) \right) \right| + \text{Max} \left| L \left( \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right| \right. \\ \left. + \text{Max} \left| L \left( \frac{S_1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} \right) \right| + \text{Max} L \left\{ \frac{1}{R_1} L \left( \frac{1}{R_0} [L(w_0) + S_2 - 2S_1] \right) \right\} \right. \\ \left. + m \text{Max} \left| \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right| + h \text{Max} \left| L \left( \frac{1}{R} L \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \right| \right].$$

Aus (31), (32), (34), (37) ergibt sich aber die Behauptung (28).

Beweis von (29). Können wir die Existenz einer von  $h$ ,  $y$ ,  $v$  unabhängigen Zahl  $K_2$  beweisen, für welche

$$(38) \quad |\Delta^2 w_v| \leq K_2 h^2 (1 + K_1 h)^v (1 + h v)$$

gilt, so ist offenbar (29) mit

$$(39) \quad \dot{L}_2 = K_2 e^{K_1 X} (1 + X)$$

bewiesen<sup>13)</sup>. Wir wollen nun zeigen, daß (38) für jede Zahl  $K_2$  erfüllt ist, die die folgenden Ungleichungen befriedigt:

$$(40a) \quad \frac{1}{m} \left[ 2 L_2 \text{Max} \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right| + L_1 \text{Max} \left| \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right| + \text{Max} \left| \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right| \right] + L'_2 < K_2,$$

$$(40b) \quad \frac{1}{m} 3 \text{Max} \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right| < K_2,$$

$$(40c) \quad \frac{1}{m} \left[ 3 L_2 \text{Max} \left| \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right| + L_1 \text{Max} \left| \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} \right| + \text{Max} \left| \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} \right| \right] < K_2.$$

Um bei einem so gewählten  $K_2$  die Ungleichung (38) zunächst für  $\nu = 0$  zu beweisen, ziehen wir für  $\nu = 0, 1, 2$  von (1')  $L(w_0)$  bzw.  $L(w_1)$  bzw.  $L(w_2)$  ab. Geeignete Kombination der so erhaltenen Gleichungen liefert

$$L(\Delta^2 w_1) - L(\Delta^2 w_0) - \frac{1}{h} \Delta^2 (R_1 w_1) = -\frac{1}{h} \Delta^2 (R_1 w_0) - L(\Delta^2 w_0) + \Delta^2 S_1$$

oder nach einiger Umformung

$$L(\Delta^3 w_0) - \frac{1}{h} R_2 \Delta^3 w_0 = \frac{R_2}{h} \left\{ \frac{(R_2 - R_1)}{R_2} \Delta^3 w_0 + \frac{\Delta^2 R_1 \Delta w_1}{R_2} + \frac{h \Delta^2 S_1}{R_2} - \frac{h L(\Delta^2 w_0)}{R_2} \right\}.$$

Da auf  $O$  nach (5'), (6)  $\Delta^3 w_0 = 0$  ist, so folgt aus Hilfssatz 1 mit  $\lambda = 1:h$ , daß  $|\Delta^3 w_0|$  höchstens gleich dem Maximum des Betrages des in der geschweiften Klammer stehenden Ausdrucks ist. Daher folgt aus (40a) unter Berücksichtigung von (22), (24) und (28) die Behauptung (38) für  $\nu = 0$ . Um (38) allgemein zu beweisen, bilden wir aus (1') für  $\nu = 1, 2, 3, \dots, n-3$

$$\Delta^3 L(w_\nu) - \frac{1}{h} \Delta^3 (R_\nu w_\nu) = -\frac{1}{h} \Delta^3 (R_\nu w_{\nu-1}) + \Delta^3 S_\nu.$$

Hieraus folgt durch elementare Umformung

$$\begin{aligned} L(\Delta^3 w_\nu) - \frac{1}{h} R_{\nu+2} \Delta^3 w_\nu &= -\frac{R_{\nu+2}}{h} \left\{ \Delta^3 w_{\nu-1} \left[ 1 - \frac{R_{\nu+2} - R_{\nu+1}}{R_{\nu+2}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R_{\nu+2}} [(\Delta^2 R_\nu + 2 \Delta^2 R_{\nu+1}) \Delta^3 w_\nu + \Delta^2 R_\nu \Delta w_\nu + h \Delta^2 S_\nu] \right\}. \end{aligned}$$

Da auf  $O$  nach (5')  $\Delta^3 w_\nu = 0$  ist, folgt wieder aus Hilfssatz 1, daß  $|\Delta^3 w_\nu|$  höchstens gleich dem Maximum des Betrages des in der geschweiften Klammer stehenden Ausdrucks ist. Nach (22), (24) sowie (40b) und (40c) wird daher

$$\begin{aligned} |\Delta^3 w_\nu| &\leq \text{Max} |\Delta^3 w_{\nu-1}| (1 + K_2 h) + h^4 K_2 \\ &< (1 + K_2 h) [\text{Max} |\Delta^3 w_{\nu-1}| + K_2 h^4 (1 + K_2 h)^{\nu-1}]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt offenbar induktiv die für  $\nu = 0$  schon bewiesene Behauptung (38).

<sup>13)</sup> Vgl. den entsprechenden Schluß in Z. p. R., S. 657.

## Der Existenzbeweis.

Wir lassen  $h$  die Folge  $h_n = X : 2^n$  durchlaufen. Die Lösung von (1'), (5') für  $h = h_n$  sei  $w_{\nu}^{(n)}$ . Ferner sei  $\nu h_n = x_{\nu}^{(n)}$ . Betrachten wir nun irgendeinen festen Punkt des Intervalles  $0, X$ , dessen Abszisse von der Form  $x = \frac{X \cdot q}{2^n}$  ( $q = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$ ) ist. Ist dann  $x = h_n \nu_n$ , so wollen wir zeigen, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\nu_n}^{(n)}$  existiert und die Konvergenz gleichmäßig im Bereiche (20) ist. Zum Beweise setzen wir für den Augenblick  $\nu_n = p + 1$  und  $w_{\nu_n}^{(n)} - w_{\nu_{n+1}}^{(n+1)} = v_{p+1}$ . Dann ist nach (5')  $v_p = 0$  auf  $O$ , und man erhält ferner aus (1') ohne Mühe

$$L(v_{p+1}) - \frac{1}{h_n} R v_{p+1} = -\frac{R}{h_n} \left\{ v_p + \frac{1}{R} \Delta^2 w_{\nu_p}^{(n+1)} \right\} \quad (p = 0, 1, \dots)^{14)}$$

so daß aus Hilfssatz 1 und (24)

$$|v_{p+1}| \leq \text{Max} |v_p| + \frac{1}{m} L_2 h_n^2$$

und weiterhin wegen  $v_0 = 0$  induktiv

$$|w_{\nu_n}^{(n)} - w_{\nu_{n+1}}^{(n+1)}| = |v_{p+1}| \leq (p+1) \frac{1}{4m} L_2 h_n^2 < X \frac{L_2}{4m} h_n$$

folgt. Ersetzt man hierin  $n$  der Reihe nach durch  $n+1, n+2, \dots, n+i-1$ , so erhält man (unter Beachtung von  $h_{n+i} = h_n : 2^i$ ) durch Addition der so entstandenen Ungleichungen

$$(41) \quad |w_{\nu_{n+i}}^{(n+i)} - w_{\nu_n}^{(n)}| < h_n X \frac{L_2}{2^i m},$$

womit die gleichmäßige Konvergenz bewiesen ist. Die Grenzfunktion heiße  $z(x, y)$ . Sie ist definiert für alle Punkte aus (20), für die  $x$  von der Form  $Xq : 2^n$  ist. Aus (22) folgt leicht

$$(42) \quad |z(x + h_n, y) - z(x, y)| \leq L_1 h_n.$$

Hieraus wieder folgt, daß  $z$  sich in eindeutiger Weise zu einer für alle  $x$  des Intervalles  $0 \leq x \leq X'$  definierten Funktion ergänzen läßt, für die wieder (42) gilt. Ehe wir nun zeigen können, daß  $z$  eine Lösung des Problems (1), (5) ist, müssen wir noch einige Aussagen über die Ableitungen von  $z$  machen. Setzen wir zu diesem Zweck in Hilfssatz 3  $f = w_{\nu_{n+k}}^{(n+k)}$ , so folgt aus (24) und (29)

$$(43) \quad \Delta_{h_n}^{\sigma} w_{\nu_{n+k}}^{(n+k)} \leq h_n^{\sigma} L_{\sigma} \quad (\sigma = 2, 3).$$

Der Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  liefert

$$(44) \quad |\Delta_{h_n}^3 z(x, y)| \leq h_n^3 L_3,$$

$$(45) \quad |\Delta_{h_n}^2 z(x, y)| \leq h_n^2 L_2$$

<sup>14)</sup> Vgl. die entsprechende Rechnung in Z. p. R., S. 661 f.

zunächst für alle  $x$  der Form  $Xq:2^n$ ; aus Stetigkeitsgründen gelten (44), (45) für alle nicht negativen  $x \leq X'$ . Aus (44) folgt, daß  $z$  eine stetige Ableitung  $\frac{\partial z}{\partial x}$  besitzt<sup>15)</sup>. Wie wir zeigen wollen, gilt gleichmäßig in (20)

$$(46) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{r_{n+1}}^{(n)} - w_{r_n}^{(n)}}{h_n}.$$

Es ist nämlich für  $p = 1, 2, 3, \dots$ ;  $q = 1, 2, 3, \dots$  und  $n = p + q$

$$(47) \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\Delta_{h_n} w_{r_n}^{(n)}}{h_n} \right| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\Delta_{h_p} z}{h_p} \right| + \left| \frac{\Delta_{h_p} z}{h_p} - \frac{\Delta_{h_p} w_{r_n}^{(n)}}{h_p} \right| + \left| \frac{\Delta_{h_p} w_{r_n}^{(n)}}{h_p} - \frac{\Delta_{h_{p+q}} w_{r_n}^{(n)}}{h_{p+q}} \right|.$$

Setzt man nun in Hilfssatz 4  $f = w_{r_n}^{(n)}$ , so erkennt man wegen (24), daß der dritte Summand lediglich durch Wahl von  $p$  (unabhängig von  $q$ ) kleiner als eine vorgegebene positive Zahl  $\varepsilon$  gemacht werden kann. Das gleiche gilt wegen der Stetigkeit von  $\frac{\partial z}{\partial x}$  von dem ersten Summanden. Sei jetzt also  $p$  eine feste Zahl, für welche der erste und dritte Summand in (47) je kleiner als  $\varepsilon$  sind. Wegen der Konvergenz der  $w_{r_n}^{(n)}$  gegen  $z$  können wir nun die Zahl  $q$  so groß wählen, daß auch der zweite Summand kleiner als  $\varepsilon$  wird. Hiermit ist (46) offenbar bewiesen. Nunmehr wollen wir zeigen, daß  $\frac{\partial z}{\partial x}$  eine stetige Ableitung  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  besitzt. Hierzu genügt es zu zeigen, daß die zweiten (mit  $h = h_p$  gebildeten) Differenzenquotienten von  $\frac{\partial z}{\partial x}$  beschränkt sind<sup>16)</sup>. Um dies nachzuweisen, beachten wir, daß nach (24) und (29)

$$\left| \Delta_{h_{p+q}}^{\sigma-1} \left( \frac{\Delta_{h_{p+q}} w_{r_{p+q}}^{(p+q)}}{h_{p+q}} \right) \right| = \left| \frac{\Delta_{h_{p+q}}^{\sigma} w_{r_{p+q}}^{(p+q)}}{h_{p+q}} \right| \leq L_{\sigma} h_{p+q}^{\sigma-1} \quad (\sigma = 2, 3)$$

ist. Nach Hilfssatz 3 ist daher auch

$$\left| \Delta_{h_p}^{\sigma-1} \left( \frac{\Delta_{h_{p+q}} w_{r_{p+q}}^{(p+q)}}{h_{p+q}} \right) \right| \leq L_{\sigma} h_p^{\sigma-1}.$$

Lassen wir nun  $q$  gegen  $\infty$  gehen, so folgt nach (46) die gewünschte Beschränktheit der ersten und zweiten Differenzenquotienten von  $\frac{\partial z}{\partial x}$  für  $x = Xq:2^n$ ; aus Stetigkeitsgründen gilt sie für alle  $x$ . Der Beweis dafür, daß gleichmäßig in (20)

$$(48) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta^2 w_{r_n}^{(n)}}{h_n^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

<sup>15)</sup> Vgl. Z. p. R., Anm. 7).

<sup>16)</sup> Z. p. R., Anm. 7).

ist, läßt sich nun auf Grund der Zerlegung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\Delta h_n w_{r_n}^{(n)}}{h_n^2} = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\Delta h_p z}{h_p^2} \right) + \left( \frac{\Delta h_p z}{h_p^2} - \frac{\Delta h_p w_{r_n}^{(n)}}{h_p^2} \right) + \left( \frac{\Delta h_p w_{r_n}^{(n)}}{h_p^2} - \frac{\Delta h_{p+q} w_{r_n}^{(n)}}{h_{p+q}^2} \right)$$

unter Benutzung von Hilfssatz 4 und von (29) völlig analog dem für (46) gegebenen Beweise führen; wir gehen daher nicht weiter auf ihn ein.

Nunmehr können wir zeigen, daß  $z$  eine Lösung des gestellten Problems (1), (5) ist. Daß die Randbedingungen (5) erfüllt sind, ist auf Grund der Gleichmäßigkeit der Konvergenz nach (5') klar.

Um zu zeigen, daß auch die Differentialgleichung (1) erfüllt ist, bemerken wir, daß aus (1') bekanntlich

$$(49) \quad w_{r_n+1}^{(n)}(y) = \int_{\mathfrak{B}} \left[ R_{r_n+1}(\eta) \frac{\Delta w_{r_n}(\eta)}{h_n} + S_{r_n+1}(\eta) \right] K(y, \eta) d\eta$$

folgt, wenn  $K(y, \eta)$  die zu der Randbedingung (5) gehörige Greensche Funktion von  $L(z)$  ist. Der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  liefert nach (46) wegen  $h_n r_n = x$  (unter Beachtung von (22)):

$$(50) \quad z(x, y) = \int_{\mathfrak{B}} \left[ R(x, \eta) \frac{\partial z(x, \eta)}{\partial x} + S(x, \eta) \right] K(y, \eta) d\eta$$

zunächst für alle  $x$  der Form  $Xq:2^n$ , sodann aus Stetigkeitsgründen für alle nicht negativen  $x \leq X'$ . Nun folgt allgemein aus

$$\varphi(y) = \int_{\mathfrak{B}} \psi(\eta) K(y, \eta) d\eta$$

die Gleichung  $L(\varphi) = \psi$  für alle inneren Punkte von  $\mathfrak{B}$ , falls  $\psi$  in jedem inneren Punkte von  $\mathfrak{B}$  einmal stetig nach  $y_1, y_2, y_3$  differenzierbar ist. Da nun  $R$  und  $S$  nach Voraussetzung nach den  $y_i$  differenzierbar sind, folgt also (1) aus (50), falls noch gezeigt ist, daß  $\frac{\partial^2 z}{\partial y_i \partial x}$  existiert und stetig ist, wenn  $y$  im Innern von  $\mathfrak{B}$  liegt. Um dies zunächst für ein  $x$  der Form  $x = Xq:2^n$  zu beweisen, differenzieren wir (49) nach  $y_i$ :

$$\frac{\partial w_{r_n+1}^{(n)}}{\partial y_i} = \int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial K}{\partial y_i} \left[ R_{r_n+1} \frac{\Delta w_{r_n}^{(n)}}{h_n} + S_{r_n+1} \right] d\eta.$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von derjenigen, die entsteht, wenn  $r_n$  durch  $r_n + 1$  ersetzt wird, so erhalten wir nach Division durch  $h_n$

$$(51) \quad \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\Delta w_{r_n+1}^{(n)}}{h_n} \right) = \int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial K}{\partial y_i} \frac{\Delta h_n}{h_n} \left[ R_{r_n+1} \frac{\Delta w_{r_n}^{(n)}}{h_n} + S_{r_n+1} \right] d\eta.$$

Aus (46), (48) folgt nun, unter Berücksichtigung der Stetigkeit von  $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$  und  $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ , daß der Faktor von  $\frac{\partial K}{\partial y_i}$  gleichmäßig in dem abgeschlossenen

Bereiche (20) gegen

$$\Phi = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial x}$$

konvergiert. Daher<sup>17)</sup> konvergiert das in (51) rechts stehende Integral gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von (20) gegen die stetige Funktion

$$\int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial K}{\partial y_i} \Phi d\eta.$$

Aus (51) folgt daher, daß die Grenzfunktion der Folge

$$\frac{\Delta h_n w_{v_n}^{(n)} + 1}{h_n} = \frac{\Delta h_n w_{v_n}^{(n)}}{h_n} + h_n \frac{\Delta^2 w_{v_n}^{(n)}}{h_n^2}$$

stetig nach  $y_i$  differenzierbar ist und daß wegen (46) und (48) die Gleichung

$$(51) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y_i \partial x} = \int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial K}{\partial y_i} \Phi d\eta$$

besteht.

Um die somit für alle  $x$  der Form  $Xq:2^n$  bewiesene Existenz und Stetigkeit von  $\frac{\partial^2 z}{\partial y_i \partial x}$  auch für ein beliebiges nicht negatives  $x \leq X'$  zu beweisen, betrachten wir eine Folge gegen  $x$  konvergierender Zahlen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  der Form  $Xq:2^n$ . Für  $x_i$  gilt dann (51) und wegen der Stetigkeit der rechten Seite folgt aus dieser Gleichung die Existenz von

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial z(x_k, y)}{\partial x} \right)$$

und die Gleichmäßigkeit der Konvergenz in jedem abgeschlossenen Teilbereiche (vgl. Anm. 17). Hieraus folgt die Behauptung.

### Eindeutigkeitsbeweis.

Unter Benutzung üblicher Methoden kann der Beweis der Eindeutigkeit folgendermaßen erbracht werden: Die Differenz  $u(x, y)$  zweier in dem

<sup>17)</sup> Man beachte, daß  $\int_{\mathfrak{B}} \left| \frac{\partial K(y, \eta)}{\partial y_i} \right| d\eta$  beschränkt ist, wenn  $y$  in einem ab-

geschlossenen Teilbereich von  $\mathfrak{B}$  liegt. Es ist nämlich  $K(y, \eta) = \bar{K}(y, \eta) + v(y, \eta)$ , wo  $\bar{K}$  (bis auf einen von Sternberg loc. cit. angegebenen Faktor) die von E. E. Levi (Rend. d. Pal. 24 (1907)) aufgestellte Fundamentallösung von  $L(z) = 0$  bedeutet und  $v$  durch  $L_y(v) = 0$ ;  $v = -\bar{K}$  für  $y$  auf  $O$  bestimmt ist. Also ist

$$\int_{\mathfrak{B}} \left| \frac{\partial K(y, \eta)}{\partial y_i} \right| d\eta \leq \int_{\mathfrak{B}} \left| \frac{\partial \bar{K}(y, \eta)}{\partial y_i} \right| d\eta + \int_{\mathfrak{B}} \left| \frac{\partial v(y, \eta)}{\partial y_i} \right| d\eta.$$

Aus den Ergebnissen von Levi und Sternberg ergibt sich aber unmittelbar, daß das erste rechts stehende Integral in  $\mathfrak{B}$ , das zweite in jedem abgeschlossenem Teilbereich von  $\mathfrak{B}$  beschränkt ist.



abgeschlossenen Bereiche (20) stetiger Lösungen von (1), (5) ist eine in dem genannten Bereich stetige Lösung von

$$L(u) = R \frac{\partial u}{\partial x}; \quad u = 0 \text{ für } x = 0; \quad u = 0 \text{ auf } \mathfrak{M}.$$

Ist  $c$  eine positive Konstante, so ist daher  $v = u e^{-cs}$  eine ebendort stetige Lösung von

$$(52) \quad L(v) = R \frac{\partial v}{\partial x} + v c R; \quad v = 0 \text{ für } x = 0; \quad v = 0 \text{ auf } \mathfrak{M}.$$

$v$  ist aber identisch 0 in (20). Andernfalls müßte  $v$  nämlich im Innern von (20) ein positives Maximum oder ein negatives Minimum annehmen. Im ersten Falle wäre an der betreffenden Stelle  $L(v) \leq 0$ ,<sup>18)</sup>  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  und wegen (19)  $v c R > 0$ . Das steht im Widerspruch mit (52). Ebenso beweist man die Unmöglichkeit des zweiten Falles. Daher ist in der Tat  $v$ , also auch  $u$  in (20), identisch 0.

#### Fehlerabschätzung.

Aus (41) folgt für  $i \rightarrow \infty$

$$|z(x, y) - w_{r_n}^{(n)}(y)| \leq h_n \frac{X L_2}{2m} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{X^2 L_2}{m} \quad (x = r_n, h_n < X).$$

Die Konstante  $L_2 : m$  läßt sich aus den gegebenen Funktionen bzw. ihren Ableitungen berechnen:  $m$  folgt aus (19) und zur Berechnung von  $L_2$  bestimme man zuerst  $K$  nach (21a), dann  $L_1$  nach (21b), dann  $L'_1$  nach (25), dann  $K_1$  nach (27).  $L_2$  wird dann durch (26) geliefert.

<sup>18)</sup> Vgl. etwa S. 74 der in Anm.<sup>8)</sup> zitierten Arbeit.

(Eingegangen am 5. 11. 1929.)

# Über die Wärmeleitungsgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten im räumlichen Falle.

## II. Mitteilung.

Von

Erich Rothe in Breslau.

In der ersten Mitteilung<sup>1)</sup> wurde die folgende Aufgabe behandelt:  
Es soll eine Lösung der Gleichung

$$(1) \quad L(z) = R(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial z}{\partial x} + S(x, y_1, y_2, y_3),$$

wobei

$$(2) \quad L(z) = \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ik} \frac{\partial z}{\partial y_k} \right) \quad (a_{ik} = a_{ki} = a_{ik}(y_1, y_2, y_3))$$

und die Form  $\sum a_{ik} \eta_i \eta_k$  positiv definit ist, gesucht werden, die den folgenden Randbedingungen genügt: Ist  $\mathfrak{B}$  ein einfach zusammenhängender, ganz im Endlichen liegender Bereich des  $(y_1, y_2, y_3)$ -Raumes,  $O$  seine Oberfläche,  $\mathfrak{C}$  der zylindrische, durch

$$(3) \quad y = (y_1, y_2, y_3) < \mathfrak{B}, \quad 0 \leq x \leq X,$$

gegebene Teil des vierdimensionalen  $(y_1, y_2, y_3, x)$ -Raumes und  $\mathfrak{M}$  sein durch

$$(4) \quad 0 \leq x \leq X, \quad y < O,$$

gegebener „Mantel“, so soll die gesuchte Lösung  $z$  von (1) im Innern von  $\mathfrak{C}$  regulär sein und die Randbedingungen

$$(5a) \quad z(0, y_1, y_2, y_3) = z_0(y_1, y_2, y_3),$$

$$(5b) \quad z = 0 \text{ auf } \mathfrak{M}^*)$$

<sup>1)</sup> Im folgenden mit I zitiert.

<sup>2)</sup> In I durfte  $R$  noch von  $x$  abhängen; in der vorliegenden Mitteilung setzen wir  $R$  unabhängig von  $x$  voraus; diese Voraussetzung ist bei der Anwendung auf die Theorie der Wärmeleitung im allgemeinen erfüllt, da hier  $x$  die Zeit bedeutet.

<sup>3)</sup> Wegen Verallgemeinerung der Bedingung (5b) siehe I, Anm. <sup>3)</sup>.

befriedigen, wobei  $z_0$  eine vorgegebene Funktion ist, über welche jedoch wegen (5b)

$$(6) \quad z_0 = 0 \text{ auf } O$$

vorausgesetzt wird.

Die Lösung dieser Aufgabe konnte in I nur unter Annahme gewisser Differenzierbarkeitseigenschaften von  $z_0$  sowie der beiden weiteren Voraussetzungen

$$(7) \quad L(z_0) = S(0, y) \text{ für } y \text{ auf } O,$$

$$(8) \quad L\left(\frac{1}{R} L(z_0)\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{x=0} + L\left(\frac{S}{R}\right)_{x=0} \text{ für } y < O$$

erbracht werden.

*In der vorliegenden zweiten Mitteilung soll nun (unter wesentlicher Benutzung von I) gezeigt werden, daß bei stetigem  $z_0$  eine Lösung unseres Problems auch ohne die Voraussetzungen (7), (8) gefunden werden kann. Bei diesem Nachweis kann man sich auf die Betrachtung der Gleichung*

$$(9) \quad L(z) = R \frac{\partial z}{\partial x}$$

an Stelle von (1) beschränken, wenn die Lösbarkeit des Problems (1), (5) unter den in I gemachten Voraussetzungen schon als bekannt angesehen wird<sup>4)</sup>.

Genauer gesprochen wollen wir also folgendes beweisen: Ist  $z_0$  in dem abgeschlossenen Bereiche  $\mathfrak{B}$  stetig und genügt der Bedingung (6), so existiert eine Funktion  $z(x, y)$ , die in jedem inneren Punkte von (3) die Differentialgleichung (9) erfüllt, die die Randbedingungen (5) befriedigt und in dem abgeschlossenen Bereiche (3) stetig ist<sup>5)</sup>. Die Koeffizienten  $a_{ik}$  und  $R$  werden hier als zweimal stetig differenzierbare Funktionen von  $y = (y_1, y_2, y_3)$  vorausgesetzt und die zweiten Ableitungen der  $a_{ik}$  sollen überdies einer Hölder'schen Bedingung genügen. Ferner gebe es eine Konstante  $m$ , so daß

$$(10) \quad R \geq m > 0.$$

<sup>4)</sup> Um nämlich (1), (5) zu lösen, betrachte man eine beliebige Funktion  $\bar{z}_0(y)$ , für welche  $L\left(\frac{1}{R} L\left(\frac{1}{R} L(z_0)\right)\right)$  existiert und stetig ist und die die Bedingungen (6), (7), (8) erfüllt (die Existenz einer solchen Funktion folgt aus der Lösbarkeit passender elliptischer Randwertaufgaben); die nach I dann existierende Lösung von (1), (5) (wobei in (5a)  $z_0$  durch  $\bar{z}_0$  ersetzt ist) sei  $\bar{z}(x, y)$ .  $\bar{z}(x, y)$  sei dann die Lösung von (9), (5), wenn  $z_0$  in (5a) durch  $z_0 - \bar{z}_0$  ersetzt wird. Dann ist  $\bar{z}(x, y) + \bar{z}(x, y)$  die gesuchte Lösung von (1), (5). — In den Fällen, in denen  $z_0$  nach den Eigenfunktionen von (11) entwickelt werden kann, ist die Methode der Partikularlösungen auf (9) anwendbar. Vgl. darüber die in I, Anm. <sup>1)</sup> erwähnte Arbeit von A. Hammerstein.

<sup>5)</sup> Es gibt auch nur eine in dem abgeschlossenen Bereiche (3) stetige Lösung. Der Beweis dafür ist wörtlich derselbe wie der Eindeutigkeitsbeweis in I, S. 353 f.

Der Beweis beruht auf der Konstruktion einer Folge gegen  $z_0$  konvergierender Funktionen  $U_0^{(m)}(y)$ , von denen jede die in I gemachten Voraussetzungen erfüllt. Von den zugehörigen Lösungen von (9) wird dann gezeigt, daß sie gegen eine Lösung von (9) konvergieren.

Um eine solche Folge zu konstruieren, betrachten wir die (in bezug auf  $R$ ) normierten und orthogonalen Eigenfunktionen  $u_k(y)$  und Eigenwerte  $\lambda_k$  des Problems

$$(11a) \quad L(u_k) + \lambda_k R u_k = 0,$$

$$(11b) \quad u_k = 0 \text{ auf } O.$$

Wegen der Stetigkeit von  $z_0$  gilt nun nach einem an anderer Stelle\*) bewiesenen Satze

$$(12) \quad z_0(y) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k u_k}{1 + \frac{1}{\lambda}} \quad \left( c_k = \int_{\mathfrak{B}} R(\eta) z_0(\eta) u_k(\eta) d\eta \right),$$

wobei die Konvergenz (auf Grund von (6)) gleichmäßig in dem abgeschlossenen Bereiche  $\mathfrak{B}$  ist. Da die Konvergenz der unendlichen Summe bei festem  $\lambda$  ebenfalls gleichmäßig ist, so folgt die Existenz linearer Kombinationen  $U_0^{(m)}$  der Eigenfunktionen  $u_k$ :

$$(13) \quad U_0^{(m)}(y) = \sum_1^m c_k^{(m)} u_k(y)$$

von der Eigenschaft, daß gleichmäßig in  $\mathfrak{B}$

$$(14) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} U_0^{(m)}(y) = z_0(y)$$

ist. Diese Näherungsfunktionen  $U_0^{(m)}$  erfüllen nun (7) und (8). Aus (11a) folgt nämlich wegen (11b)

$$(15) \quad L(u_k) = 0 \text{ auf } O.$$

Weiter folgt aus (11a)

$$L\left(\frac{1}{R} L(u_k)\right) + \lambda_k L(u_k) = 0,$$

also unter Berücksichtigung von (15)

$$L\left(\frac{1}{R} L(u_k)\right) = 0 \text{ auf } O,$$

so daß in der Tat nach (13), da bei uns  $S \equiv 0$  ist,  $U_0^{(m)}$  (7) und (8) erfüllt. Da  $U_0^{(m)}$  nach (11b) auch (6) erfüllt, so existiert daher nach dem in I bewiesenen Existenzsatze eine Lösung  $U^{(m)}(x, y)$  von (9), die die

\*) E. Rothe, Über die Approximation stetiger Funktionen durch Eigenfunktionen elliptischer Differentialgleichungen, Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges., 28. Jahrg., S. 72.

Randbedingungen

$$(16a) \quad U^{(m)}(0, y) = U_0^{(m)}(y),$$

$$(16b) \quad U^{(m)} = 0 \text{ auf } \mathfrak{M}$$

befriedigt.

Nehmen wir nun an, daß wir die folgenden Behauptungen beweisen können:

a) Die Folge  $U^{(m)}(x, y)$  konvergiert gleichmäßig in dem abgeschlossenen Bereiche (3).

b) Die Folge der Ableitungen  $\frac{\partial U^{(m)}}{\partial x}$  und  $\frac{\partial^2 U^{(m)}}{\partial x^2}$  konvergiert gleichmäßig für alle  $x, y$  aus (3), für die  $x \geq x_0 > 0$  ist.

c) Die Folge der Ableitungen  $\frac{\partial U^{(m)}}{\partial y_i}$  und  $\frac{\partial^2 U^{(m)}}{\partial y_i \partial x}$  konvergiert gleichmäßig in jedem abgeschlossenen, ganz im Innern von (3) gelegenen Teilbereich.

Als dann wird, wie wir behaupten,

$$U(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} U^{(m)}(x, y)$$

eine in dem abgeschlossenen Bereich (3) stetige Funktion sein, in jedem inneren Punkte von (3) die Differentialgleichung (9) erfüllen und die Randbedingungen (5) befriedigen. Letzteres folgt unmittelbar aus (16) und (14). Zum Beweise, daß (9) erfüllt ist, bemerken wir, daß  $U^{(m)}$  (9) und (16) erfüllt und daß daher

$$(17) \quad U^{(m)}(x, y) = \int_{\mathfrak{g}} K(y, \eta) R(\eta) \frac{\partial U^{(m)}(x, \eta)}{\partial x} d\eta$$

ist, wenn  $K(y, \eta)$  die zu der Randbedingung (11b) und dem Differentialausdruck  $L(z)$  gehörige Greensche Funktion ist. Da nun aus a) und b) offenbar die Existenz von  $\frac{\partial U}{\partial x}$  und die Gleichmäßigkeit der Konvergenz von  $\frac{\partial U^{(m)}}{\partial x}$  gegen  $\frac{\partial U}{\partial x}$  für  $x \geq x_0$  folgt, so ergibt sich aus (17) leicht

$$(18) \quad U = \int_{\mathfrak{g}} K(y, \eta) R(\eta) \frac{\partial U}{\partial x} d\eta.$$

Da aus c) Existenz und Stetigkeit von  $\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ R \frac{\partial U}{\partial x} \right]$  in jedem inneren Punkt von (3) folgt, so ergibt sich aus (18) das Bestehen von (9). Es sind also nur noch die Behauptungen a), b), c) zu beweisen.

Beweis von a). Die Differenz  $v = U^{(m+p)} - U^{(m)}$  ist eine Lösung von (9) und  $\tilde{v} = v e^{-cx}$ , wo  $c$  eine positive Konstante ist, ist eine Lösung von

$$L(\tilde{v}) = R \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + c R \tilde{v},$$

und kann daher in einem inneren Punkte von  $\mathfrak{U}$  weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum annehmen (vgl. I, Schluß des Eindeutigkeitsbeweises). Da nun  $\tilde{v}$  offenbar den Randbedingungen

$$\tilde{v} = 0 \text{ auf } \mathfrak{M},$$

$$\tilde{v}(0, y) = v(0, y) = U_0^{(m+p)} - U_0^{(m)}$$

genügt, so folgt

$$|\tilde{v}(x, y)| \leq \text{Max} |U_0^{(m+p)} - U_0^{(m)}|$$

oder

$$|v(x, y)| = |U^{(m+p)}(x, y) - U^{(m)}(x, y)| \leq e^{cX} \text{Max} |U_0^{(m+p)} - U_0^{(m)}|,$$

woraus wegen (14) die Behauptung a) folgt.

Beweis von b). Wegen (14) wird es genügen, für

$$(19) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial U^{(m+p)}}{\partial x} - \frac{\partial U^{(m)}}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U^{(m+p)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U^{(m)}}{\partial x^2}$$

eine nur von  $|U_0^{(m+p)} - U_0^{(m)}|$  (nicht von den Ableitungen dieser Differenz) abhängende Abschätzung zu geben. Da nach dem oben über  $U^{(m)}$  Gesagten die Randbedingungen, denen  $v = U^{(m+p)} - U^{(m)}$  genügt, allen für den Existenzsatz von I gemachten Voraussetzungen genügen, kann man  $v$  (unter Beachtung des in I bewiesenen Eindeigkeitssatzes) in der folgenden in I ausführlich geschilderten Weise erhalten:

Man setze

$$(20) \quad v_0(y) = U_0^{(m+p)} - U_0^{(m)}$$

und bestimme sukzessiv  $v_{r+1}$  durch Lösung der elliptischen Randwertaufgabe

$$(21_1) \quad L(v_{r+1}) - \lambda R v_{r+1} = -\lambda R v_r \quad \left( \lambda = \frac{1}{h_n} = \frac{2^n}{X} \right),$$

$$(21_2) \quad v_{r+1} = 0 \text{ auf } O.$$

Ist dann  $x$  eine Zahl der Form  $X \cdot q : 2^p$  ( $q, p$  positive ganze Zahlen), also für  $n \geq p$

$$(22) \quad x = v_n h = \frac{v_n X}{2^n}$$

mit ganzzahligem  $v_n$  und bezeichnen wir genauer die von  $\lambda$ , also von  $n$  abhängige Funktion  $v_r$  mit  $v_r^{(n)}$ , so ist

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_{v_n}^{(n)}(y) = v(x, y)$$

und (I, Gl. (46) und (48))

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{v_n+1}^{(n)} - v_{v_n}^{(n)}}{h_n} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta^2 v_{v_n}^{(n)}}{h_n^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

Für  $x$ -Werte, die nicht von der angegebenen Form sind, ist  $v$  durch die Forderung der Stetigkeit eindeutig bestimmt. Da überdies  $\frac{\partial v}{\partial x}$  und  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  nach I stetig sind, so erhalten wir wegen (24) eine Abschätzung für (19), wenn wir eine von  $n$  unabhängige Abschätzung für

$$(25) \quad \frac{v_{n+1}^{(n)} - v_n^{(n)}}{h_n} = \lambda(v_{n+1}^{(n)} - v_n^{(n)}) \quad \text{und} \quad \lambda^2 \Delta^2 v_n^{(n)}$$

geben. Um dies zu tun, denken wir uns  $n$  fest gewählt und lassen der Einfachheit halber den Index  $n$  vorläufig fort. Nach (21) ist nun

$$(26) \quad v_r(y) = \lambda \int_0^1 R(\eta) v_{r-1}(\eta) G(y, \eta, \lambda) d\eta,$$

wenn  $G(y, \eta, \lambda)$  die zu der Randbedingung (21<sub>2</sub>) gehörende Greensche Funktion des Differentialausdrucks  $L(v) - \lambda R v$  ist. Wir können nun  $v_r$  nach den Eigenfunktionen  $u_k$  des Problems (11) entwickeln. Da nämlich nach (11a)

$$L(u_k) - \lambda R u_k = -(\lambda + \lambda_k) R u_k$$

ist, so folgt

$$u_k = (\lambda + \lambda_k) \int_0^1 G(y, \eta) R(\eta) u_k(\eta) d\eta,$$

oder nach Multiplikation mit  $\sqrt{R(y)}$

$$(27) \quad \bar{u}_k(y) = (\lambda + \lambda_k) \int_0^1 \bar{G}(y, \eta, \lambda) \bar{u}_k(\eta) d\eta,$$

wenn

$$(28) \quad \bar{u}_k(y) = \sqrt{R(y)} u_k(y), \quad \bar{G}(y, \eta, \lambda) = \sqrt{R(y) R(\eta)} G(y, \eta, \lambda)$$

gesetzt ist. Da aus (26) die quellenmäßige Darstellung

$$(29) \quad \bar{v}_r(y) = \int_0^1 \lambda \bar{v}_{r-1}(\eta) \bar{G}(y, \eta, \lambda) d\eta \quad (\bar{v}_r = \sqrt{R} v_r)$$

folgt, so läßt sich in der Tat  $\bar{v}_r$  nach den Eigenfunktionen  $\bar{u}_k$  von (27) entwickeln:

$$(30) \quad \bar{v}_r(y) = \sum_1^\infty \bar{u}_k(y) [\bar{v}_r]_k,$$

wobei

$$[\bar{v}_r]_k = \int_0^1 \bar{v}_r(\eta) \bar{u}_k(\eta) d\eta = \int_0^1 R(\eta) v_r(\eta) u_k(\eta) d\eta$$

gesetzt ist. Da nun die Eigenwerte der Integralgleichung (27)  $\lambda + \lambda_k$  sind, so folgt in bekannter Weise aus der quellenmäßigen Darstellung (29)

$$[\bar{v}_r]_k = \frac{\lambda [\bar{v}_{r-1}]_k}{\lambda + \lambda_k}.$$

Sukzessive Anwendung dieser Formel liefert

$$[\bar{v}_r]_k = \left( \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_k} \right)^r [\bar{v}_0]_k,$$



so daß nach (30)

$$\bar{v}_\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_k} \right)^\nu \bar{u}_k(y) [\bar{v}_0]_k$$

ist. Folglich wird

$$\begin{aligned} (31) \quad \bar{v}_{\nu+1}(y) - \bar{v}_\nu(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k(y) [\bar{v}_0]_k \left( \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_k} \right)^\nu \left( \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_k} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k(y) [\bar{v}_0]_k \frac{\lambda_k}{\left( 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^{\nu+1}}. \end{aligned}$$

Wegen  $\lambda_k \geq 0$ ,  $\lambda > 0$  ist nun unter Berücksichtigung von  $\nu: \lambda = x$

$$\begin{aligned} (32) \quad \left( 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^{\nu+1} &= 1 + \binom{\nu+1}{1} \frac{\lambda_k}{\lambda} + \dots + \left( \frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^{\nu+1} \\ &> \binom{\nu+1}{2} \left( \frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^2 > \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{\lambda} \right)^2 \lambda_k^2 = \frac{1}{2} x^2 \lambda_k^2, \end{aligned}$$

also nach (31)

$$(33) \quad \lambda |\bar{v}_{\nu+1}(y) - \bar{v}_\nu(y)| \leq \frac{2}{x^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\bar{u}_k(y)}{\lambda_k} \right| [\bar{v}_0]_k \leq \frac{2}{x^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_k^2}{\lambda_k^2} \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{v}_0]_k^2}.$$

Bezeichnen wir nun wie früher mit  $K(y, \eta)$  die zu der Randbedingung (11b) gehörige Greensche Funktion des Differentialausdrucks  $L(x)$  und setzen  $\sqrt{R(y)} R(\eta) = \bar{K}(y, \eta)$ , so folgt aus (11)

$$\bar{u}_k(y) = \lambda_k \int_0^1 \bar{K}(y, \eta) \bar{u}_k(\eta) d\eta,$$

und es ist daher, wie bekannt,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\bar{u}_k(y)}{\lambda_k} \right)^2 \leq \int_0^1 \bar{K}(y, \eta)^2 d\eta.$$

Da ferner

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\bar{v}_0]_k^2 \leq \int_0^1 \bar{v}_0^2(\eta) d\eta$$

ist, so ergibt sich aus (33) unter Berücksichtigung von (24)

$$\sqrt{R} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq \frac{2}{x^2} \sqrt{\int_0^1 \bar{K}(y, \eta)^2 d\eta \cdot \int_0^1 \bar{v}_0^2(\eta) d\eta}$$

oder nach (19) und (20) unter Berücksichtigung von (10):

$$\begin{aligned} (34) \quad &\left| \frac{\partial U^{(m+p)}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial U^{(m)}(x, y)}{\partial x} \right| \\ &\leq \frac{2}{x^2 \sqrt{m}} \sqrt{\int_0^1 \bar{K}(y, \eta)^2 d\eta \cdot \int_0^1 R(\eta) [U_0^{(m+p)}(\eta) - U_0^{(m)}(\eta)]^2 d\eta}. \end{aligned}$$

Wegen (14) folgt hieraus offenbar die Behauptung b) bezüglich der Ableitung  $\frac{\partial U^{(m)}}{\partial x}$ .

Um die Behauptung b) auch für die zweiten Ableitungen nach  $x$  zu beweisen, bilden wir aus (31)

$$\begin{aligned} (\bar{v}_{r+2} - \bar{v}_{r+1}) - (\bar{v}_{r+1} - \bar{v}_r) &= -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k(y) [\bar{v}_0]_k \frac{\lambda_k}{\left(1 + \frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^{r+1}} \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda_k}{\lambda}} - 1\right) \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k(y) [\bar{v}_0]_k \frac{\lambda_k^2}{\left(1 + \frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^{r+2}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^2 U^{(m+p)}(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U^{(m)}(x, y)}{\partial x^2} \right| \\ &\leq \frac{3!}{x^3 \sqrt{m}} \sqrt{\int_{\mathfrak{B}} \bar{K}^2(y, \eta) d\eta} \int_{\mathfrak{B}} R(\eta) [U_0^{(m+p)}(\eta) - U_0^{(m)}(\eta)]^2 d\eta \end{aligned}$$

in genau der gleichen Weise, in welcher (34) aus (31) folgt. Nur hat man an Stelle von (32) die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^{r+2} \geq \binom{r+2}{3} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^3 > \frac{1}{3!} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^3 \lambda_k^3 = \frac{1}{3!} x^2 \lambda_k^3$$

zu benutzen. Aus (14) folgt daher der zweite Teil der Behauptung b).

Beweis von c). Aus (17) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(m)}(x, y)}{\partial y_i} &= \int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial K}{\partial y_i} R(\eta) U^{(m)}(x, \eta) d\eta, \\ \frac{\partial U^{(m)}(x, y)}{\partial x} &= \int_{\mathfrak{B}} K(y, \eta) R(\eta) \frac{\partial^2 U^{(m)}(x, \eta)}{\partial x^2} d\eta, \end{aligned}$$

und hieraus wieder

$$\frac{\partial^2 U^{(m)}(x, y)}{\partial y_i \partial x} = \int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial K(y, \eta)}{\partial y_i} R(\eta) \frac{\partial^2 U^{(m)}(x, \eta)}{\partial x^2} d\eta.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $U^{(m)}$  und  $\frac{\partial^2 U^{(m)}}{\partial x^2}$  für  $x \geq x_0$  und der Beschränktheit von  $\int_{\mathfrak{B}} \left| \frac{\partial K(y, \eta)}{\partial y} \right| d\eta$  in einem ganz im Innern von  $\mathfrak{B}$  gelegenen abgeschlossenen Bereich (vgl. I, Anm. <sup>17</sup>) folgt daher die Behauptung c).

(Eingegangen am 15. 2. 1930.)

# Über die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die in bezug auf die partiellen Differentialquotienten homogen sind und die Funktion nicht enthalten.

Von

Georg Pfeiffer in Kiew.

Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die in bezug auf die partiellen Differentialquotienten homogen sind und die Funktion nicht enthalten, haben die Gestalt

$$(1) \quad f\left(x_0, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Das sind die Gleichungen, welche aus den Gleichungen, die noch die unbekannte Funktion selbst enthalten, nach Anwendung der ersten Jacobi'schen Transformationsmethode erhalten werden.

Nehmen wir an, daß ein vollständiges Integral der Gleichung (1) mit einer additiven willkürlichen Konstante

$$(2) \quad z = \Phi(x_0, x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_n) + c,$$

$$(3) \quad \frac{D(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}, \Phi_{k+1}, \dots, \Phi_n)}{D(c_1, c_2, \dots, c_n)} \equiv 0,$$

$$(4) \quad k - \text{eine bestimmte Zahl der Reihe } 1, 2, \dots, n,$$

$$\Phi_r \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} \quad (r = 0, 1, \dots, n)$$

gefunden ist

$$(5) \quad \frac{D\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}, \dots, \frac{\Phi_l}{\Phi_0}, \dots, \frac{\Phi_n}{\Phi_0}\right)}{D(c_1, \dots, c_l, \dots, c_n)} \equiv 0.$$

In (4) wird angenommen  $k = 1, 2, \dots, n$  und nicht  $k = 0, 1, \dots, n$ ; denn, wäre die Determinante (3) für  $k = 1, 2, \dots, n$  Null, so verschwände sie entweder auch für  $k = 0$ , oder  $\Phi_0$  wäre eine Funktion der Veränderlichen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  allein:

$$(6) \quad \Phi_0 = \omega(x_0, x_1, \dots, x_n).^1)$$

Für das vollständige Integral (2) ist aber bei der Identität (5) der letzte Fall nicht möglich.

<sup>1)</sup> A. Forsyth, Theory of differential equations, Vol. V, Cambridge 1906, pp. 178—182.

Wenn zufällig ein vollständiges Integral der Gleichung (1) ohne additive willkürliche Konstante erhalten wäre, so wäre es leicht, wie wir gezeigt haben<sup>2)</sup>, von diesem Integrale zu einem Integrale mit additiver willkürlicher Konstante überzugehen.

Das Integral (2) führt zu einem allgemeineren Integrale

$$(7) \quad z = c_0 \Phi(x_0, x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_i, \dots, c_n) + c,$$

welches eine überzählige willkürliche Konstante  $c_0$  enthält.

Indem wir in dem Integrale (7) die willkürliche Konstante  $c_i$  durch eine willkürliche, bestimmt genommene, Größe  $d$  ersetzt haben, bekommen wir das Integral

$$(8) \quad z = c_0 \Phi(x_0, x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_{i-1}, d, c_{i+1}, \dots, c_n) + c$$

mit der normalen Zahl der willkürlichen Konstanten.

Es wird gefragt: Unter welchen Umständen ist das Integral (8) vollständig und gibt es überhaupt vollständige Integrale (8)?

Zu dieser Frage sind wir unter dem Einflusse eines Briefes von S. Lie an A. Mayer gekommen<sup>3)</sup>.

Damit das Integral (8) vollständig ist, ist notwendig, daß eine von den folgenden Bedingungen erfüllt ist

$$(9) \quad \frac{D(c_0 \Phi_0, c_0 \Phi_1, \dots, c_0 \Phi_{l-1}, c_0 \Phi_{l+1}, \dots, c_0 \Phi_n)}{D(c_0, c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)} \equiv 0,$$

$l$  — eine bestimmte Zahl der Reihe 1, 2, ...,  $n$ ,

oder was dasselbe ist

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \Phi_0, & \frac{\partial \Phi_0}{\partial c_1}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_0}{\partial c_{i-1}}, & \frac{\partial \Phi_0}{\partial c_{i+1}}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_0}{\partial c_n} \\ \Phi_1, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial c_1}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial c_{i-1}}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial c_{i+1}}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial c_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{l-1}, & \frac{\partial \Phi_{l-1}}{\partial c_1}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_{l-1}}{\partial c_{i-1}}, & \frac{\partial \Phi_{l-1}}{\partial c_{i+1}}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_{l-1}}{\partial c_n} \\ \Phi_{l+1}, & \frac{\partial \Phi_{l+1}}{\partial c_1}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_{l+1}}{\partial c_{i-1}}, & \frac{\partial \Phi_{l+1}}{\partial c_{i+1}}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_{l+1}}{\partial c_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_n, & \frac{\partial \Phi_n}{\partial c_1}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_n}{\partial c_{i-1}}, & \frac{\partial \Phi_n}{\partial c_{i+1}}, & \dots, & \frac{\partial \Phi_n}{\partial c_n} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$l$  — eine bestimmte Zahl der Reihe 1, 2, ...,  $n$ ,

<sup>2)</sup> G. Pfeiffer, Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui ne contiennent pas la fonction inconnue. Bull. des Sciences math., (2) 53 (1929), p. 268—278.

<sup>3)</sup> S. Lie, Gesammelte Abhandlungen 3, Erste Abteilung, Leipzig und Kristiania, herausgegeben von Fr. Engel, 1922, S. 787—788.

oder

$$(11) \quad \frac{D\left(\frac{\phi_1}{\phi_0}, \dots, \frac{\phi_{l-1}}{\phi_0}, \frac{\phi_{l+1}}{\phi_0}, \dots, \frac{\phi_n}{\phi_0}\right)}{D(c_1, \dots, c_{l-1}, c_{l+1}, \dots, c_n)} \neq 0,$$

 $l$  — eine bestimmte Zahl der Reihe  $1, 2, \dots, n$ .

Wenn für alle  $i$  die Determinante (10) gleich Null ist, so ist die Determinante

$$(12) \quad \frac{D(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{l-1}, \phi_{l+1}, \dots, \phi_n)}{D(c_1, c_2, \dots, c_n)}$$

Null; denn wäre die Determinante (10) für  $i = 1, 2, \dots, n$  Null, so wäre (12) Null, oder

$$(13) \quad \phi_0 = 0, \phi_1 = 0, \dots, \phi_{l-1} = 0, \phi_{l+1} = 0, \dots, \phi_n = 0, ^4)$$

aber da ist (12) wieder Null.

Daraus folgt: Wenn für alle  $i$  bei beliebigem  $l$  die Determinante (10) gleich Null wäre, so wäre ebenso die Determinante (3) bei beliebigem  $k$  Null, was der Voraussetzung über die Vollständigkeit des Integrals (2) widerspricht.

Wir kommen unmittelbar zum Schlusse, daß es in dem Falle, wo das Integral (2) vollständig und die Determinante (3) nicht gleich Null ist, stets ein oder eine Reihe von  $i$  gibt, für welche die Determinanten (9), (10), (11) bei  $l = k$  von Null verschieden sind.

Für solche  $i$  ist das Integral (8) vollständig

$$(14) \quad \frac{D\left(\frac{\phi_1}{\phi_0}, \dots, \frac{\phi_{k-1}}{\phi_0}, \frac{\phi_{k+1}}{\phi_0}, \dots, \frac{\phi_n}{\phi_0}\right)}{D(c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1}, \dots, c_n)} \neq 0,$$

 $k$  — dasselbe, wie in der Zeile (3).

Von ihnen werden wir sagen, daß sie mit  $k$  verbunden sind.

Gleichzeitig mit dem vollständigen Integrale der Gleichung (1)

$$(15) \quad z = \Phi(x_0, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n) + a,$$

$$(16) \quad \frac{D(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1}, \phi_{k+1}, \dots, \phi_n)}{D(a_1, a_2, \dots, a_n)} \neq 0,$$

 $k$  — eine bestimmte Zahl der Reihe  $1, 2, \dots, n$ ,

$$(17) \quad \frac{D\left(\frac{\phi_1}{\phi_0}, \dots, \frac{\phi_k}{\phi_0}, \dots, \frac{\phi_n}{\phi_0}\right)}{D(a_1, a_2, \dots, a_n)} \equiv 0,$$

$$(18) \quad \frac{D\left(\frac{\phi_1}{\phi_0}, \dots, \frac{\phi_{k-1}}{\phi_0}, \frac{\phi_{k+1}}{\phi_0}, \dots, \frac{\phi_n}{\phi_0}\right)}{D(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n)} \neq 0,$$

 $k$  — dasselbe, wie in der Zeile (16),

$i$  — eine bestimmte Zahl der Reihe  $1, 2, \dots, n$ , die mit  $k$  verbunden ist,

<sup>4</sup>) A. Forsyth, Theory of differential equations, Vol. V, Cambridge 1906, pp. 178—182.

gibt es stets ein vollständiges Integral der Gleichung (1), das die Form hat

$$(19) \quad z = b_0 \omega(x_0, x_1, \dots, x_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) + b,$$

$$(20) \quad \frac{D\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}, \dots, \frac{\omega_{g-1}}{\omega_0}, \frac{\omega_{g+1}}{\omega_0}, \dots, \frac{\omega_n}{\omega_0}\right)}{D(b_1, b_2, \dots, b_{n-1})} \equiv 0,$$

$g$  — eine bestimmte Zahl der Reihe  $1, 2, \dots, n$ ,

$$\omega_i = \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (\tau = 0, 1, \dots, n).$$

Wirklich, indem wir annehmen

$$g = k,$$

$b_0 = a_0, b_1 = a_1, \dots, b_{i-1} = a_{i-1}, b_i = a_{i+1}, \dots, b_{n-1} = a_n, b = a,$   
 $\omega(x_0, x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_{n-1}) \equiv \Phi(x_0, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{i-1}, d, a_{i+1}, \dots, a_n),$   
 erhalten wir das vollständige Integral

$$(21) \quad z = a_0 \Phi(x_0, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{i-1}, d, a_{i+1}, \dots, a_n) + a$$

der Gleichung (1).

Von dem vollständigen Integrale (19) spricht Mayer<sup>6)</sup>; wir wollen es als Mayersches Integral bezeichnen. Das Mayersche Integral spielt in vielen Fragen eine bedeutende Rolle<sup>6)</sup>.

Um im Folgenden Undeutlichkeit zu vermeiden, sei hier bemerkt, daß die Funktion  $\omega$  des Integrals (19) nicht eindeutig bestimmt ist: das Integral (19) kann in folgender Form

$$(22) \quad z = b_0 \{ \omega(x_0, x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_{n-1}) + \tilde{\omega}(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) \} + \{ b - b_0 \tilde{\omega}(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) \}$$

geschrieben werden, wo  $\tilde{\omega}$  eine willkürliche Funktion seiner Argumente ist.

Man könnte noch fragen, ob man von dem Integrale (15) zum Integrale (19) durch eine Transformation der willkürlichen Konstanten

$$(23) \quad a_i = \varphi_i(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$(24) \quad a = \varphi(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b),$$

$$\frac{D(a_1, a_2, \dots, a_n, a)}{D(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b)} \equiv 0$$

übergehen kann.

Diese Frage soll beantwortet werden und im Falle einer positiven Antwort soll gezeigt werden, wie der Übergang zu geschehen hat.

<sup>6)</sup> A. Mayer, Über die Jacobi-Hamiltonsche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Annalen 3 (1871), S. 451.

<sup>6)</sup> G. Pfeiffer, Zwei Notizen werden in Bull. de l'Acad. des Sciences de l'Ukraine und in Comm. Soc. Math. Kharkow, veröffentlicht werden.

Wir werden uns auf einen partiellen Fall des Pfaffschen Problems berufen. Die Überlegungen sind gewissen in dem Werke von Ed. Goursat<sup>7)</sup> ähnlich.

Der Übergang von dem Integrale (15) zum Integrale (19) mittelst der Formeln (23) und (24) fordert, daß das Differential

$$(25) \quad dz = \sum_{h=0}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_h} dx_h + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} da_i + da$$

bei der Transformation durch die Formeln (23) und (24)

$$(26) \quad dz = \sum_{h=0}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_h} \right) dx_h + \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_j} \right\} db_j + \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \right\} db \\ = \sum_{h=0}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_h} \right) dx_h + J_0 db_0 + \sum_{j=1}^{n-1} J_j db_j + J db, *)$$

$$(27) \quad J_0 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_0},$$

$$(28) \quad J_j = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_j} \quad (j = 1, 2, \dots, (n-1)),$$

$$(29) \quad J = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}$$

in das Differential

$$(30) \quad dz = b_0 \sum_{h=0}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_h} dx_h + \omega db_0 + b_0 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \omega}{\partial b_j} db_j + db$$

übergehe.

Die Vergleichung der Ausdrücke (26), (30) gibt die Relationen

$$(31) \quad \omega = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_0},$$

$$(32) \quad b_0 \frac{\partial \omega}{\partial x_h} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_h} \right) \quad (h = 0, 1, \dots, n),$$

$$(33) \quad b_0 \frac{\partial \omega}{\partial b_j} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_j} \quad (j = 1, 2, \dots, (n-1)),$$

$$(34) \quad 1 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}.$$

<sup>7)</sup> Ed. Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff, Paris 1922, S. 6—15.

<sup>8)</sup> Die Klammern zeigen an, daß die Transformation (23), (24) ausgeführt ist.







Soll der Übergang von dem Integrale (15) zum Integrale (19) durch Transformationen der willkürlichen Konstanten möglich sein, so ist notwendig, daß die Ausdrücke (50) — die einzige Lösung des bestimmten Systems (47) — von den Veränderlichen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  unabhängig und Funktionen nur der Konstanten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  seien. Ist diese Bedingung erfüllt, so erhalten wir die Relationen (40) der Transformationsformeln (40), (41) in folgender Weise: Wir integrieren das System

$$(51) \quad \frac{da_1}{S_1} = \frac{da_2}{S_2} = \dots = \frac{da_n}{S_n} = \frac{db_0}{b_0};$$

die Integrationskonstante, mit welcher  $b_0$  multipliziert wird, schließen wir in  $b_0$  ein; die übriggebliebenen  $(n-1)$  Integrationskonstanten nehmen wir als Konstanten  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  an; wir erhalten die Gleichungen (40):

$$(52) \quad a_i = \psi_i(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\frac{D(a_1, a_2, \dots, a_n)}{D(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})} \equiv 0.$$

Die Form (40), (41) der Transformationen (23), (24) sichert die Erfüllung der Identität (34). Die Unabhängigkeit der Lösung (50) des Systems (47) von den Veränderlichen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  erlaubt die Identitäten (32)–(43) zu befriedigen, indem wir die Relationen (40) in der oben angezeigten Weise aufstellen. Die Identitäten (33)–(44) sind bisweilen nicht erfüllt, aber zu unserer Verfügung haben wir die Funktion  $\psi$ .

Es sind noch die Umstände zu untersuchen, unter denen es eine solche Funktion  $\psi$  gibt, daß die Identitäten (33)–(44) befriedigt werden. Nach der Befriedigung der Identitäten (33)–(44) wird noch die Form der Funktionen  $\psi$  und  $\omega$  festzustellen sein.

Die Zeilen (42), (43), (44) geben die Relation:

$$(53) \quad d(b_0 \omega) = \omega db_0 + \sum_{h=0}^n b_0 \frac{\partial \omega}{\partial x_h} dx_h + \sum_{j=1}^{n-1} b_0 \frac{\partial \omega}{\partial b_j} db_j = d[(\Phi) + \psi],$$

$$(54) \quad (\Phi) \equiv \Phi(x_0, x_1, \dots, x_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n);$$

$$(55) \quad b_0 \omega = (\Phi) + \psi,$$

woraus folgt, daß die durch die Relationen (40) transformierte Funktion  $\Phi$  die Form

$$(56) \quad (\Phi) \equiv b_0 \omega(x_0, x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_{n-1}) - \psi(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$$

haben muß.

Bei Erfüllung der Bedingung (56) werden die Funktionen  $\psi$  und  $\omega$  unmittelbar gefunden. Sie werden nicht vollständig bestimmt, weil die

Identität (56) folgendermaßen umgeschrieben werden kann:

$$(57) \quad (\Phi) \equiv b_0 \{ \omega(x_0, x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_{n-1}) + \tilde{\omega}(b_1, \dots, b_{n-1}) \} \\ - \{ \psi(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) + b_0 \tilde{\omega}(b_1, \dots, b_{n-1}) \}.$$

Aus (57) folgt, daß die Funktionen  $\omega$  und  $\psi$  die willkürliche Funktion

$$(58) \quad \tilde{\omega}(b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$$

enthalten.

Nach der Zeile (56) ist leicht zu sehen, daß, wenn das Integral (15) bei der Bedingung (56) vollständig ist, auch das Integral (19) vollständig ist.

### Schluß.

In dem Falle, wo das Integral (2) der Gleichung (1) vollständig ist, existiert stets ein  $i$  oder eine Reihe von  $i$ , für welche das Integral (8) vollständig ist. Gleichzeitig mit dem vollständigen Integrale (15) der Gleichung (1) findet das vollständige Integral (19) statt. Das Integral (19) nennen wir das Mayersche Integral.

Vom Integrale (15) kann man durch die Transformation der willkürlichen Konstanten nur in dem Falle zum Integrale (19) übergehen, wenn die Formeln der Transformationen (23), (24) die Form (40) und (41) haben. Außerdem ist die Erfüllung der folgenden Bedingungen notwendig. Die einzige Lösung (50) des Systems der Gleichungen (47) darf nicht von den Veränderlichen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  abhängen. Die durch die Integration des Systems (51) mit bestimmt gewählten Integrationskonstanten gefundenen Relationen (52) müssen die Funktion  $\Phi$  des Integrals (15) in die Funktion ( $\Phi$ ) der Gestalt (56) transformieren.

Die obengenannten Bedingungen sind nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend.

Die Funktion  $\omega$  des Integrals (19) und die Funktion  $\psi$  der Transformationsformeln (40), (41) sind nicht ganz bestimmt. Sie enthalten die willkürliche Funktion (58).

### Beispiel.

Die Gleichung:

$$(59) \quad \frac{1}{4} \left( \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 = \frac{\partial z}{\partial x_0} \left( x_0 \frac{\partial z}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} \right)$$

hat das vollständige Integral (15):

$$(60) \quad z = \Phi(x_0, x_1, x_2, a_1, a_2) + a \\ = a_1 \log x_1 + 2a_2 x_2 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2^2 x_0} - a_1 \log(a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2^2 x_0}) + a,$$

welches in der Form (19) unmittelbar geschrieben werden kann:

$$(61) \quad z = b_0 \omega(x_0, x_1, x_2, b_1) + b \\ = b_0 \{ \log x_1 + b_1 x_2 + \sqrt{1 + b_1^2 x_0} - \log(1 + \sqrt{1 + b_1^2 x_0}) \} + b,$$

$$(62) \quad a_1 = b_0, \quad 2a_2 = b_0 b_1, \quad a = b + b_0 \log b_0.$$

Weil

$$\Phi_0 = \frac{2a_2^2}{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2^2 x_0}} = \frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2^2 x_0} - a_1}{2x_0}, \quad \Phi_1 = \frac{a_1}{x_1}, \quad \Phi_2 = 2a_2,$$

hat das System der Gleichungen (47) die Gestalt:

$$\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2^2 x_0}}{2x_0 \sqrt{a_1^2 + 4a_2^2 x_0}} S_1 + \frac{2a_2}{\sqrt{a_1^2 + 4a_2^2 x_0}} S_2 = \frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2^2 x_0} - a_1}{2x_0}, \\ \frac{1}{x_1} S_1 + 0 \cdot S_2 = \frac{a_1}{x_1}, \\ 0 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 = 2a_2$$

und gibt die Lösung (50):

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_2,$$

welche von den Veränderlichen  $x_0, x_1, x_2$  nicht abhängt.

Durch Integration des Systems (51):

$$\frac{da_1}{a_1} = \frac{da_2}{a_2} = \frac{db_0}{b_0}$$

kommen wir zu den Formeln (52):

$$(63) \quad a_1 = b_0, \quad 2a_2 = b_0 b_1.^*)$$

Die Identität (56):

$$b_0 \{ \log x_1 + b_1 x_2 + \sqrt{1 + b_1^2 x_0} - \log(1 + \sqrt{1 + b_1^2 x_0}) - \log b_0 \} \\ = b_0 \omega(x_0, x_1, x_2, b_1) - b_0 \log b_0$$

wird erfüllt; aus ihr finden wir

$$(64) \quad \psi = b_0 \log b_0,$$

und folglich

$$(65) \quad a = b + b_0 \log b_0.$$

Die Relationen (63), (65) sind mit den Relationen (62) identisch.

\*) Anstatt der Integrationskonstanten  $b_1$  ist  $\frac{b_1}{2}$  gesetzt.

## Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen zweier komplexen Veränderlichen.

### Die Starrheit der nicht überall pseudokonvexen Gebiete.

Von

Peter Thullen in Münster (Westf.) \*).

Die bisherigen Ergebnisse der Abbildungstheorie im Raume zweier komplexen Veränderlichen lassen vermuten, daß es nur bei sehr speziellen Bereichen gelingen wird, je zwei beliebig vorgegebene innere Punkte durch eine eindeutige analytische Abbildung des Bereiches auf sich ineinander überzuführen. So sind unter den Reinhardtschen Kreiskörpern die Hyperkugel:  $|w|^2 + |z|^2 < 1$  und der Dizylinder:  $|w| < 1, |z| < 1$  (und deren Bilder) die einzigen Körper der obigen Art, d. h. nur bei diesen läßt sich jeder innere Punkt in jeden anderen transformieren<sup>1)</sup>.

Doch waren allgemein die Bedingungen noch vollkommen unbekannt, denen diese „ausgezeichneten Bereiche“ — wie wir sie kurz nennen werden — genügen.

In dieser Arbeit wird auf einfachem Wege eine allgemeine notwendige Bedingung für ausgezeichnete Bereiche gewonnen werden, die unmittelbar zeigt, daß nur eine spezielle Klasse von Bereichen ausgezeichnet ist. Sie sagt insbesondere aus, daß es in einem nicht überall pseudokonvexen<sup>2)</sup> Bereiche unmöglich ist, zwei beliebige innere Punkte ineinander überzuführen. Die Starrheit gegen analytische Abbildungen ist also nicht nur eine Eigenschaft der Kreiskörper, sondern allgemein eine Eigenschaft auch

\*) Seminar Prof. Behnke.

<sup>1)</sup> Vgl. die in den Math. Annalen 104 (1931), S. 244–259 erschienene Arbeit des Verfassers: „Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern“. Hierin werden sämtliche möglichen eindeutigen analytischen Abbildungen der Reinhardtschen Körper auf sich und untereinander untersucht. Ferner siehe eine ebenfalls demnächst erscheinende Arbeit über die Abbildungen der übrigen kreissymmetrischen Bereiche (von Prof. Behnke gemeinsam mit dem Verfasser).

<sup>2)</sup> Über den Begriff „pseudokonvex“ siehe die Arbeit von H. Behnke, Über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen. II. Natürliche Grenzen, Hamb. Abh. 5, S. 290–312.

solcher Bereiche, die nicht auf diese oder andere Rotationskörper abbildbar sind.

Zugleich führt uns diese Bedingung auf eine neue interessante Beziehung zwischen zwei Teilen der Funktionentheorie mehrerer komplexen Veränderlichen. Sie verbindet die Theorie der Abbildungen mit der Theorie von G. Julia<sup>3)</sup> über die Existenzbereiche der normalen Familien analytischer Funktionen. Daß die Abbildungstheorie mit der Theorie normaler Funktionsfamilien zusammenhängt, ist durch die Arbeiten von Carathéodory<sup>4)</sup> bekannt geworden.

**Satz 1.** *Damit ein beschränktes Gebiet  $K$  ein ausgezeichneter Bereich ist, muß  $K$  notwendig genauer Existenzbereich einer normalen Familie analytischer Funktionen sein.* (Die Familie muß ferner auf dem Rande von  $K$  noch beschränkt sein.)

Nun hat Julia eine Reihe von Bedingungen aufgestellt, denen die Bereiche normalen Verhaltens analytischer Funktionsfamilien genügen. Dabei zeigte es sich, daß diese Bedingungen die gleichen sind, die für die Existenzbereiche analytischer Funktionen bisher bekannt sind<sup>5)</sup>. Die wesentlichste der Bedingungen ist die Pseudokonvexität jener Bereiche.

Man kann daher Satz 1 so abändern (doch nur unter der Voraussetzung, daß der Rand von  $K$ :  $\varphi(u, v, x, y) = 0$  noch stetige zweite partielle Ableitungen besitzt):

**Satz 1a.** *Damit  $K$  ein ausgezeichneter Bereich sei, muß der Rand von  $K$  notwendig in jedem Punkte pseudokonvex sein.*

Das heißt also: Der Rand von  $K$ :  $\varphi(u, v, x, y) = 0$  genügt überall der Levischen Ungleichung  $L(\varphi) \geq 0$  bzw.  $L(\varphi) \leq 0$  (falls im Innern von  $K$ :  $\varphi > 0$  bzw.  $\varphi < 0$ ).<sup>6)</sup>

**Beweis von Satz 1.** Das beschränkte Gebiet  $K$  sei ein ausgezeichneter Bereich.  $\mathcal{G}$  sei die Menge sämtlicher analytischen Transformationen von  $K$  in sich. Die Funktionen von  $\mathcal{G}$  bilden wegen ihrer Beschränktheit eine im Innern von  $K$  normale Familie.  $\tilde{K}$  sei der genaue Existenzbereich dieser Familie. Also  $K < \tilde{K}$ .

<sup>3)</sup> Bekanntlich hat G. Julia die von Montel zunächst für eine komplexe Veränderliche aufgestellte Theorie der normalen Funktionsfamilien auf zwei komplexe Veränderliche übertragen. Vgl. G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, Acta Math. 47 (1926), S. 53–115.

<sup>4)</sup> Vgl. Carathéodory, Math. Annalen 97 und Hamb. Abhandlungen 6.

<sup>5)</sup> Über die Existenzbereiche analytischer Funktionen vgl. die Arbeiten von Hartogs, Math. Annalen 62 (1906), Acta Math. 32 (1909), E. E. Levi, Annali di Matematica 17 (1910) und 18 (1911) und die unter <sup>3)</sup> zitierte Arbeit von H. Behnke.

<sup>6)</sup>  $L(\varphi)$  ist dabei ein gewisser, aus den 1. und 2. partiellen Ableitungen von  $\varphi(u, v, x, y)$  bestehender Ausdruck. Vgl. <sup>3)</sup> und die in <sup>5)</sup> zitierten Arbeiten.



Angenommen nun,  $\tilde{K}$  wäre größer als  $K$ . Dann existieren Randpunkte von  $K$ , die zugleich innere Punkte von  $\tilde{K}$  sind.  $P_0 = (w_0, z_0)$  sei ein solcher Punkt. Ferner seien  $P_n = (w_n, z_n)$  innere Punkte aus  $K$ , die sich gegen  $P_0$  häufen.

$$w' = f_n(w, z),$$

$$z' = g_n(w, z)$$

sei eine Transformation von  $K$  in sich, die den Punkt  $P_n$  in  $(0, 0)$  transformiert ( $(0, 0)$  liege im Innern von  $K$ ).

Also

$$0 = f_n(w_n, z_n),$$

$$0 = g_n(w_n, z_n).$$

Die  $f_n(w, z)$  und  $g_n(w, z)$  (bzw. eine geeignete Teilfolge) streben in  $\tilde{K}$  gleichmäßig gegen zwei analytische Grenzfunktionen  $f_0(w, z)$  und  $g_0(w, z)$ . Ferner sind die  $f_n(w, z)$  und  $g_n(w, z)$  wegen ihrer Beschränktheit dort gleichmäßig stetig<sup>7)</sup>.

Da nach Annahme  $P_0 = (w_0, z_0)$  im Innern von  $\tilde{K}$  liegt, ist

$$\begin{aligned} |f_n(w, z) - f_n(w_0, z_0)| < \varepsilon \quad \text{sobald nur} \quad \begin{cases} |w - w_0| < \delta_1(\varepsilon) \\ |z - z_0| < \delta_2(\varepsilon) \end{cases} \\ \text{bzw.} \quad |g_n(w, z) - g_n(w_0, z_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Nun gilt von einem gewissen  $N(\varepsilon)$  ab

$$\begin{aligned} |w_n - w_0| < \delta_1 \quad \text{für} \quad n \geq N, \\ |z_n - z_0| < \delta_2 \end{aligned}$$

d. h. also

$$\begin{aligned} |f_n(w_n, z_n) - f_n(w_0, z_0)| &= |f_n(w_0, z_0)| < \varepsilon \\ |g_n(w_n, z_n) - g_n(w_0, z_0)| &= |g_n(w_0, z_0)| < \varepsilon \end{aligned} \quad \text{für} \quad n \geq N$$

oder

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(w_0, z_0)| &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(w_0, z_0)| &= 0. \end{aligned}$$

Nun ist aber  $P_0$  Randpunkt von  $K$  und kann als solcher in keinen inneren Punkt übergehen. Bezeichnet man demnach mit  $d > 0$  den Minimalabstand von  $(0, 0)$  und dem Rande, so gilt

$$|f_n(w_0, z_0)|^2 + |g_n(w_0, z_0)|^2 \geq d^2 > 0 \quad \text{für alle } n.$$

Die Annahme also, daß Randpunkte von  $K$  im Innern von  $\tilde{K}$  liegen, führt zu einem Widerspruch. Es ist folglich  $K = \tilde{K}$  und somit Satz 1 (und 1a) bewiesen<sup>7a)</sup>.

<sup>7)</sup> Vgl. <sup>5)</sup>, S. 58 (3°).

<sup>7a)</sup> Der Beweis dieses Satzes läßt sich noch kürzer fassen, wenn man den von Carathéodory in seiner Arbeit *Math. Annalen* 101 (1929), S. 515–533 eingeführten Begriff der „Grenzschwankung“ benutzt.

Es wird zweckmäßig sein, den eben bewiesenen Satz etwas allgemeiner zu fassen.

Es sei  $\mathfrak{M}$  die Menge der Randpunkte  $P$ , die Häufungspunkte solcher Punkte aus  $K$  sind, die sich je in einen festen inneren Punkt  $Q(P)$  transformieren lassen. Wir nennen  $\mathfrak{M}$  die „ausgezeichnete Randmenge von  $K$ “. Dann gilt also

**Satz 2.** *Damit der beschränkte Bereich  $K$  eine nicht leere ausgezeichnete Randmenge  $\mathfrak{M}$  besitzt, ist notwendig die Existenz einer mindestens in  $K$  normalen (beschränkten) Funktionsfamilie, für die sämtliche Punkte aus  $\mathfrak{M}$  Grenzpunkte des normalen Verhaltens sind.*

**Satz 2a.** *In den zu einer ausgezeichneten Randmenge gehörigen Punkten verhält sich der Rand von  $K$  notwendig pseudokonvex (unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 1a).*

Daß die in Satz 1 und Satz 2 angegebenen Bedingungen nicht hinreichend sind, zeigen schon die Reinhardtschen Kreiskörper, unter denen ja nur Dizylinder und Hyperkugel ausgezeichnete Bereiche sind. Doch werden schon allein durch diese Bedingungen die meisten Bereiche als nichtausgezeichnete ausgeschaltet.

Nun zeigte Julia, daß das Gebiet normalen Verhaltens einer Familie analytischer Funktionen stets einfach zusammenhängend ist<sup>\*)</sup>. Hieraus und aus Satz 1 folgt sofort

**Satz 3.** *Alle ausgezeichneten Bereiche sind einfach zusammenhängend. Das heißt also: Es gibt kein mehrfach zusammenhängendes Gebiet<sup>\*)</sup>, in dem sich durch analytische Abbildungen des Gebietes auf sich jeder Punkt in jeden anderen transformieren läßt.*

<sup>\*)</sup> Siehe <sup>\*)</sup>, S. 79—80: „Si une famille de fonctions holomorphes est normale en tous les points d'une hypersurface fermée, elle est normale en tous les points intérieurs à cette hypersurface.“

<sup>\*)</sup> Unter einem mehrfach zusammenhängenden Bereich verstehe ich einen Bereich, in dem es mindestens eine ganz im Innern liegende geschlossene Hyperfläche gibt, die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

## Sur les propriétés-limites du module des fonctions entières d'ordre fini.

Von

M. Th. Subbotin in Leningrad.

Je m'occupe, dans le présent travail, de la croissance d'une fonction entière d'ordre fini  $g(z)$  sur les demi-droites  $\arg z = \varphi$  issues de l'origine.

Dans un Mémoire récent, M. Pólya a fait une étude systématique de la fonction  $h(\varphi)$  définie par

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \lg |g(re^{i\varphi})| = h(\varphi)$$

en supposant que la fonction  $g(z)$  est du type exponentiel, c'est-à-dire que

$$|g(z)| < A e^{|z|}.$$

Il a complété ainsi les résultats obtenus auparavant par MM. Borel, Lindelöf, Phragmén, Carlson et lui-même<sup>1)</sup>. On sait, d'après les recherches classiques de M. Borel, que pour les fonctions entières d'ordre un et du type moyen la fonction  $h(\varphi)$  est complètement déterminée par les points singuliers d'une certaine série de Taylor<sup>2)</sup>. M. Pólya remarque (loc. cit. p. 555) qu'il en résulte la possibilité de transformer chaque proposition relative aux points singuliers situés sur le cercle de convergence d'une série de Taylor en une proposition concernant les directions de la croissance la plus rapide d'une fonction entière. M. Pólya fait observer que «es ist von vornherein unwahrscheinlich, daß die Richtungen des stärksten Anwachsens für diese speziellen Funktionen besondere Qualitäten zeigen, und in der Tat liefert in vielen Fällen eine passende Wendung der Beweise Sätze über ganze Funktionen beliebiger Ordnung».

<sup>1)</sup> G. Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Zeitschrift 29 (1929), S. 549—640. Ce Mémoire contient les renseignements bibliographiques détaillés.

<sup>2)</sup> E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, 2<sup>e</sup> édition (1928).

Dans les nos 1—4 de ce Mémoire, je montre que les prévisions de M. Pólya sont justes pour toutes les fonctions d'ordre fini du type moyen. Ceci résulte d'une certaine transformation de la fonction auxiliaire

$$\Psi(z, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} p^{\tau-1} g(p^{\sigma} e^{\varphi i}) z^p.$$

Cette fonction, qui joue un grand rôle dans l'étude de la croissance de la fonction entière  $g(z)$  d'ordre  $\sigma^{-1}$  sur la demi-droite  $\arg z = \varphi$ , a été souvent étudiée par divers auteurs dans le cas particulier où  $\sigma = \tau = 1$ . Elle a été considérée par moi, dans le cas particulier  $\tau = 1$ , dans le Mémoire «Sur la détermination des points singuliers d'une fonction analytique»<sup>3)</sup>. Le point de départ a été le problème suivant: Étant donnée une fonction analytique  $f(z)$ , trouver une autre fonction  $F(z)$ , dont les points singuliers  $\eta$  soient liés aux points singuliers  $\xi$  de la fonction  $f(z)$  par une relation donnée  $\xi = \varphi(\eta)$ . La représentation conforme donne une solution évidente si la fonction  $\varphi(\eta)$  est holomorphe pour  $\eta = 0$ , mais le cas le plus intéressant peut-être est celui où cette fonction a une infinité de déterminations s'échangeant autour de  $\eta = 0$ . Dans le Mémoire cité je donne la solution de ce problème pour le cas où

$$\xi = e^{\varphi i} (-\lg \eta)^{-\sigma}.$$

J'ai été conduit à la considération de cette relation par les travaux de M. Braicev concernant la recherche des singularités d'une fonction analytique<sup>4)</sup>. Le point de départ de la méthode remarquable qu'il a développée était la détermination des points singuliers de la série

$$f_{\tau}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} z^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{pn}(p e^{\varphi i})^n}{n!}$$

en fonction des points singuliers de  $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

Dans le n° 5 je donne un exemple de l'application des résultats obtenus à la recherche des représentations asymptotiques des fonctions entières d'ordre fini.

#### 1. Considérons une fonction entière

$$(1) \quad g(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$$

<sup>3)</sup> Recueil Mathématique de la Société Math. de Moscou 30 (1915), p. 402—433.

<sup>4)</sup> I. R. Braicev, Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor, Recueil Math. de la Société Math. de Moscou 26 (1907). — Nouvelle méthode pour la détermination des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor, Izvestija Warszawskago Polytechn. Instituta, 1908—1909. — Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement de Taylor, ibid. 1913. — Tous ces Mémoires sont rédigés en russe.

d'ordre fini égal à  $\varrho = \sigma^{-1}$ . Nous supposons que cette fonction est du type moyen suivant la terminologie de Lindelöf et Pringsheim, c'est-à-dire qu'on a

$$\overline{\lim}_{n=\infty} n^{\sigma} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{A\epsilon}{\sigma}\right)^{\sigma},$$

avec  $0 < A < \infty$ .

Comme on peut passer de la valeur donnée de  $A$  à une autre valeur quelconque au moyen d'une substitution  $z|\alpha z$ , on peut, sans diminuer la généralité, supposer dans la suite qu'on a  $A = 1$ . On pourrait appeler les fonctions correspondantes fonctions *normales* d'ordre  $\varrho$ .

Pour étudier la croissance de la fonction (1) sur une demi-droite allant de l'origine à l'infini et faisant l'angle  $\varphi$  avec l'axe réel, il convient de considérer la fonction auxiliaire suivante

$$\Psi(z, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} \omega(p) g(p^{\sigma} e^{\varphi i}) z^p,$$

$$\text{où } \overline{\lim}_{p=\infty} |\omega(p)|^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Nous allons voir que cette fonction peut être représentée sous la forme d'une intégrale curviligne. D'abord on a

$$(2) \quad \Psi(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{n\varphi i} \sum_{p=0}^{\infty} p^{\sigma n} \omega(p) z^p.$$

Le changement de l'ordre des sommations est légitime, car la série double

$$\sum \sum |c_n \omega(p) z^p| p^{\sigma n}$$

est convergente. En effet, puisque

$$\sqrt[p]{\Gamma(\sigma n + 1)} \cong \sigma^{\sigma} e^{-\sigma} n^{\sigma},$$

on a

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \sqrt[p]{|c_n| \Gamma(\sigma n + 1)} = 1,$$

donc

$$|c_n| \Gamma(\sigma n + 1) < M(1 + \varepsilon)^n,$$

pour  $\varepsilon > 0$  et un nombre positif  $M$  convenablement choisi.

D'autre part,

$$|\omega(p)| < M_1(1 + \varepsilon)^p.$$

Il suffit, par conséquent, de s'assurer de la convergence de la série

$$(3) \quad \sum \sum (1 + \varepsilon)^p |z|^p \frac{(1 + \varepsilon)^n p^{\sigma n}}{\Gamma(\sigma n + 1)} = \sum_{p=0}^{\infty} E_{\sigma}(q) (1 + \varepsilon)^p |z|^p,$$

où nous avons posé

$$E_{\sigma}(q) = \sum_0^{\infty} \frac{q^n}{\Gamma(\sigma n + 1)}, \quad q = (1 + \varepsilon) p^{\sigma}.$$

Or, d'après les propriétés bien connues de la fonction de Mittag-Leffler, on a

$$\lim_{q \rightarrow \infty} e^{-q^{\vartheta}} E_{\sigma}(q) = q.$$

Il en résulte que la série (3) sera convergente, si l'on a

$$(1 + \varepsilon) |z| e^{\frac{q^{\vartheta}}{p}} < \vartheta < 1,$$

c'est-à-dire pour des valeurs de  $|z|$  suffisamment petites. La relation (2) est ainsi complètement démontrée.

Maintenant, la formule de Hankel donne

$$\frac{p^{\sigma n + \tau - 1}}{\Gamma(\sigma n + \tau)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{p^t} t^{-\sigma n - \tau} dt,$$

en supposant  $\tau > 0$ ; donc

$$(4) \quad \sum_{p=0}^{\infty} p^{\sigma n} \omega(p) z^p = \frac{1}{2\pi i} \Gamma(\sigma n + \tau) \int_L \Theta(e^t z) t^{-\sigma n - \tau} dt,$$

en posant

$$\Theta(z) = \sum_{p=0}^{\infty} p^{1-\tau} \omega(p) z^p.$$

Nous supposons le contour d'intégration  $L$  composé de deux droites parallèles à l'axe réel négatif et de l'arc du cercle (décrit de l'origine comme centre) joignant les extrémités  $-\delta i$  et  $+\delta i$  de ces droites. La démonstration de la formule (4) est immédiate si  $|z| < e^{-\delta}$ , car alors  $|e^t z| < \vartheta < 1$  pour tous les points du contour  $L$ .

Les égalités (2) et (4) donnent

$$(5) \quad \Psi(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Theta(e^t z) f(e^{p^t} t^{-\sigma}) t^{-\tau} dt,$$

où

$$(6) \quad f(z) = \sum_0^{\infty} \Gamma(\sigma n + \tau) c_n z^n.$$

La légitimité de la dernière transformation est évidente si  $\delta > 1$ , puisque le rayon de convergence de la série (6) est égal à l'unité.

2. Considérons le cas le plus simple, à savoir celui où l'on a  $\omega(p) = p^{\tau-1}$ . Alors

$$\Theta(e^t z) = (1 - e^t z)^{-1}.$$

Les points singuliers de cette fonction sont les pôles simples d'affixes

$$t = -\operatorname{Lg} z + 2\pi k i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

avec les résidus égaux à  $-1$ .

Considérons le contour  $C_h$  formé par les segments des droites

$$(7) \quad \Re(t) = A \pm h, \quad \Im(t) = -\operatorname{Arg} z \pm (2h + 1)\pi$$

et une partie du contour  $L$  (nous désignerons cette partie par  $L_h$ ). Le nombre positif  $A$  et le nombre entier positif  $h$  doivent être choisis de manière qu'on ait

$$e^{-1} > |z| > e^{-A-h}.$$

Alors il existera un nombre positif  $B$  tel qu'on aura, sur le contour  $C_h$ ,

$$|1 - e^z|^{-1} < B.$$

Ceci posé, l'application du théorème fondamental de Cauchy au contour  $C_h$  donne

$$\int_{L_h} \frac{f(e^{\nu'} t^{-\sigma}) dt}{t^{\nu'}(1 - e^z)} = \int_{M_h} \frac{f(e^{\nu'} t^{-\sigma}) dt}{t^{\nu'}(1 - e^z)} + \sum_{k=-h}^{k=h} \frac{2\pi i}{(-Lgz + 2\pi ki)^{\nu'}} f\left(\frac{e^{\nu'}}{(-Lgz + 2\pi ki)^{\sigma}}\right),$$

où nous avons désigné par  $M_h$  la partie du contour  $C_h$  composée des segments de droites (7).

En effet, le rayon de convergence de la série (6) étant égal à l'unité, les modules de tous les points singuliers de la fonction  $f(e^{\nu'} t^{-\sigma})$  ne surpasseront pas l'unité. Par conséquent, en prenant  $\delta > 1$  nous n'aurons pas, à l'intérieur du contour  $C_h$ , d'autres points singuliers que les pôles indiqués tout à l'heure.

Faisons tendre  $h$  vers  $\infty$ . Pour obtenir, dans le second membre de la dernière formule, une série convergente nous supposons que

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0,$$

$m$  étant un entier tel que  $\sigma m + \tau > 1$ .

On trouvera ainsi la formule définitive

$$(8) \quad \Psi(z, \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(-Lgz + 2\pi ki)^{\nu'}} f\left(\frac{e^{\nu'}}{(-Lgz + 2\pi ki)^{\sigma}}\right).$$

La validité de cette représentation de la fonction analytique définie par le développement

$$(9) \quad \Psi(z, \varphi) = \sum_0^{\infty} p^{\nu'-1} g(p^{\sigma} e^{\nu'}) z^{\nu'}$$

est démontrée par nous pour  $|z| < e^{-1}$  (quelle que soit la valeur de  $\varphi$ ). Mais il est évident que la série (8) représente la même fonction dans tout domaine connexe dont le cercle  $|z| = e^{-1}$  fait partie. Cette remarque nous permettra de trouver les points singuliers de la fonction (9) en étudiant ceux de l'expression (8).

3. Les points singuliers  $\eta_{\nu'}$  de la fonction (8) sont donnés par des équations telles que

$$(10) \quad \xi = e^{\nu'} (-Lg\eta_{\nu'} + 2\pi ki)^{-\sigma},$$



où nous avons désigné par  $\xi$  un des points singuliers de la fonction  $f(z)$ . En effet, on voit sans peine que la convergence de la série (8) est uniforme dans tout domaine fini ne comprenant pas les points singuliers de ses termes. D'autre part, chaque point  $z = \eta_\varphi$  ne peut être singulier que pour un seul terme de la série, car si l'on avait, à côté de (10), la relation

$$\xi' = e^{\varphi i} (-\operatorname{Lg} \eta_\varphi + 2\pi k' i)^{-\sigma},$$

$\xi$  étant un autre point singulier de  $f(z)$ , il en résulterait

$$|\xi|^{-\varepsilon} + |\xi'|^{-\varepsilon} \geq 2\pi,$$

ce qui est impossible. On peut remarquer, qu'il faut prendre, dans (10),  $k = 0$  — en désignant toujours par  $\operatorname{Lg} z$  la branche principale du logarithme.

Bien entendu, on doit prendre dans l'équation (10), ainsi que dans toutes les formules précédentes, la branche principale de la fonction  $z^\sigma$ . Cette condition suffit pour définir complètement la valeur de  $\eta_\varphi$  qui correspond aux valeurs considérées de  $\xi$  et de  $\varphi$ . En effet, puisque

$$(-\operatorname{Lg} \eta_\varphi)^\sigma = |\xi|^{-1} e^{i(\varphi - \theta)},$$

où nous avons posé

$$\xi = |\xi| e^{i\theta}, \quad |\theta| \leq \pi,$$

on doit avoir

$$(11) \quad \vartheta - \sigma\pi \leq \varphi \leq \vartheta + \sigma\pi.$$

C'est seulement pour les valeurs de  $\varphi$  satisfaisant à ces inégalités, qu'existera le point singulier  $\eta_\varphi$  correspondant au point considéré  $\xi$ . Le module du point ainsi défini est égal à

$$(12) \quad |\eta_\varphi| = \exp \left( -|\xi|^{-\varepsilon} \cos \frac{\varphi - \theta}{\sigma} \right).$$

Outre les points singuliers donnés par les équations (10) la fonction  $\Psi(z, \varphi)$  ne peut avoir qu'un seul point singulier, à savoir  $\eta_\varphi = 1$ . Ce point sera en général singulier, car la fonction  $\Psi(z, \varphi)$  est égale, dans le domaine du point  $z = 1$ , à la somme de l'expression

$$(13) \quad (-\operatorname{Lg} z)^{-1} f(e^{\varphi i} (-\operatorname{Lg} z)^{-\sigma})$$

et d'une fonction holomorphe.

Construisons maintenant une espèce d'étoile en marquant sur chaque demi-droite issue de l'origine celui des points d'intersection avec les diverses courbes (12), (11) (et le cercle  $R = 1$  si le point  $z = 1$  est singulier pour (13)) qui est le plus proche de l'origine. En désignant par

$(R_\varphi, \varphi)$  les coordonnées des points de cette étoile (que nous appellerons étoile  $\Sigma$ ) on aura

$$(14) \quad \overline{\lim}_{p=\infty} |g(p^\sigma e^{\varphi i})|^{\frac{1}{p}} = R_\varphi^{-1}.$$

La formule (14) est fondamentale pour la suite. Elle montre, en particulier, que, pour toutes les valeurs de  $\varphi$  telles que  $R_\varphi < 1$ , la fonction  $g(p^\sigma e^{\varphi i})$  ne peut pas tendre vers une limite différente de  $\infty$  lorsque  $p$  croît indéfiniment. Au contraire, si  $R_\varphi > 1$ , cette expression tendra régulièrement vers zéro. Les renseignements sur l'allure de la fonction sur la demi-droite considérée sont donc particulièrement précis dans ce dernier cas. Mais il y a peu de chances pour que nous puissions, en disposant convenablement du paramètre  $\tau$ , rendre ordinaire le point  $z=1$  pour la fonction (13), sans quoi notre étoile  $\Sigma$  ne sortira pas du cercle de rayon égal à 1.

4. D'après la formule (14), la croissance de la fonction entière  $g(z)$  (sur les divers rayons  $\arg z = \varphi$ ) est déterminée par la forme de l'étoile  $\Sigma$ , c'est-à-dire par la position des points singuliers de la fonction associée (6). Inversement, la connaissance de l'allure de  $g(z)$  pour  $z \rightarrow \infty$  rend possible la détermination des points singuliers de  $f(z)$  (voir mon Mémoire cité plus haut).

Donc, les considérations précédentes nous conduisent à une espèce de dualité entre les théorèmes qui fixent la position des points singuliers d'une fonction analytique et les théorèmes sur la croissance des fonctions entières d'ordre fini. Donnons-en quelques exemples.

1° On voit immédiatement que, pour  $\sigma > 2$ , c'est-à-dire pour les fonctions dont l'ordre est plus petit que  $\frac{1}{2}$ , la limite supérieure de  $|g(p^\sigma e^{\varphi i})|$  est égale à l'infini pour toutes les valeurs de  $\varphi$ .

Pour  $\sigma = 2$ , il peut exister une seule valeur de  $\varphi$ , telle que cette expression reste bornée. Il est nécessaire pour cela que l'étoile principale de la fonction  $f(z)$  n'ait qu'un seul sommet.

Enfin pour les fonctions d'ordre  $\sigma^{-1} > \frac{1}{2}$ , la limite supérieure de  $|g(p^\sigma e^{\varphi i})|$  est égale à l'infini dans un angle d'ouverture au moins égale à  $\sigma\pi$ .

On retrouve ainsi, de la manière la plus simple et la plus naturelle, le théorème suivant de MM. E. Phragmén et E. Lindelöf<sup>a)</sup>:

<sup>a)</sup> E. Phragmén et Ernst Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, Acta math. **31** (1908), p. 385.

Remarquons que notre raisonnement rend aussi intuitif cet autre résultat de ces auteurs (loc. cit., p. 406): Dans le cas où  $\sigma = \infty$ , la fonction  $h(\varphi)$  garde la valeur constante  $A$  pour toutes les valeurs de  $\varphi$ .

Si l'on sait que l'ordre d'une fonction entière donnée n'est pas supérieur à un nombre fini  $\rho$  et que son module reste au-dessous d'une limite finie sur certains rayons, disposés de telle manière que l'angle compris entre deux rayons consécutifs quelconques soit inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ , on peut affirmer que la fonction se réduit à une constante.

2° Supposons que le rapport  $n^{-\sigma} c_n c_{n+1}^{-1}$  tend, pour  $n \rightarrow \infty$ , vers une limite déterminée. Cette limite sera nécessairement de la forme  $\sigma^\sigma e^{i\theta}$  et l'on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\sigma n + \tau) c_n}{\Gamma(\sigma n + \sigma + \tau) c_{n+1}} = e^{i\theta}.$$

Par conséquent, d'après le théorème bien connu de M. Fabry<sup>6)</sup>, le point d'affixe  $e^{i\theta}$  est un point singulier de la fonction  $f(z)$ . Nous avons ainsi le résultat suivant:

Si, pour une fonction entière  $g(z) = \sum c_n z^n$  d'ordre  $\sigma^{-1}$  (la fonction étant supposée normale, c'est-à-dire du type 1) l'expression  $n^{-\sigma} c_n c_{n+1}^{-1}$  tend vers une limite déterminée dont l'argument est égal à  $\theta$ , on aura

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |g(p^\sigma e^{i\theta})|^{\frac{1}{p}} \geq e^{\cos \frac{\pi - \theta}{\sigma}}$$

pour

$$\theta - \sigma\pi \leq \varphi \leq \theta + \sigma\pi.$$

L'égalité doit avoir lieu au moins pour  $\varphi = \theta$ .

3° L'application du théorème de Vivanti-Borel-Dienes<sup>7)</sup> donne la proposition suivante<sup>8)</sup>:

Si les arguments des coefficients  $c_n$  d'une fonction entière  $g(z) = \sum c_n z^n$  (d'ordre  $\sigma^{-1}$  et du type 1) sont tous compris entre deux nombres  $\varphi'$  et  $\varphi''$ , tels que  $|\varphi'' - \varphi'| < \pi$ , on aura

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} |g(p^\sigma)|^{\frac{1}{p}} = e,$$

et

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} |g(p^\sigma e^{i\varphi})|^{\frac{1}{p}} \geq e^{\cos \frac{\pi}{\sigma}}$$

pour  $|\varphi| < \sigma\pi$ .

4° On sait que M. Pólya, en adaptant convenablement les notions de la théorie des ensembles, a pu préciser le sens de la proposition d'après

<sup>6)</sup> E. Fabry, Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans de cas très généraux, Ann. Éc. Norm. (3) 13 (1896), p. 107—114.

<sup>7)</sup> L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, 2 (1927), S. 280.

<sup>8)</sup> Cf. G. Pólya, Math. Zeitschr. 29 (1929), S. 617.

laquelle une série de rayon de convergence fini, « écrite au hasard », ne peut être prolongée au delà de son cercle de convergence<sup>9)</sup>.

En transformant, d'après le principe précédent, les résultats de M. Pólya, on a l'énoncé suivant :

*L'ensemble des fonctions entières  $g(z)$  d'ordre  $\sigma^{-1}$  et du type 1, pour lesquelles on a, quelle que soit la valeur de  $\varphi$ ,*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |g(p^\sigma e^{\varphi i})|^{\frac{1}{p}} = e,$$

*est « partout dense en toute direction » et ne contient que « des points intérieurs ».*

*L'ensemble des fonctions pour lesquelles cette condition n'est pas remplie n'est « jamais dense et parfait ».*

Nous nous contenterons de ces exemples, qu'on pourrait aisément multiplier.

5. Il est clair que les résultats du n° 3 donnent une méthode générale pour la détermination des représentations asymptotiques des fonctions entières d'ordre fini. En effet, la série (9) n'aura, en général, qu'un seul point singulier  $\eta_\varphi$  sur son cercle de convergence. Comme la nature analytique du point  $\eta_\varphi$  sera la même que celle du point  $\xi$  correspondant, l'application de la méthode bien connue de Darboux<sup>10)</sup> donnera la représentation asymptotique cherchée, dès que les points singuliers  $\xi$  de la fonction  $f(z)$  seront étudiés. Sans entrer ici dans les détails, je me contenterai d'un exemple bien simple qui suffira pour faire comprendre l'esprit de la méthode.

Prenons la fonction ( $\sigma > 0, \tau > 0$ )

$$E_{\sigma, \tau}(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\sigma n + \tau)}$$

un peu plus générale que la fonction de Mittag-Leffler. En désignant par  $m$  un entier positif tel que  $\sigma m + \tau > 1$ , et en mettant

$$g(z) = \sum_m^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\sigma n + \tau)},$$

nous aurons, d'après (6), la fonction associée  $f(z) = z^m(1-z)^{-1}$  avec un seul point singulier fini  $\xi = 1$ . Donc, pour  $|\varphi| < \frac{\sigma\pi}{2}$ , le point d'affixe

$$\eta_\varphi = \exp(-e^{-\varphi i}) \quad (\varrho = \sigma^{-1}),$$

<sup>9)</sup> G. Pólya, Über die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis natürliche Grenze ist, Acta math. 41, p. 99—118.

<sup>10)</sup> Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série, Journal de math. (3) 4 (1878).

sera un pôle simple de la fonction auxiliaire  $\Psi(z, \varphi)$ ; cette fonction n'aura pas, d'ailleurs, d'autres points singuliers sur son cercle de convergence.

La formule (8) donne

$$\Psi(z, \varphi) = \frac{\eta_\varphi e^{e^\varphi \varphi(1-\tau)^i}}{\eta_\varphi - z} + \chi(z),$$

où la fonction  $\chi(z)$  n'a d'autre point singulier fini que  $z=1$ .

Par conséquent, pour  $|\arg z| < \frac{1}{2}\sigma\pi$  et  $|z| = p^\sigma$  (en désignant toujours par  $p$  un nombre entier), nous aurons, d'après (9),

$$\lim_{|z|=\infty} e^{-\varepsilon|z|^\sigma} \{g(z) - e z e^{(1-\tau)} e^{z^\sigma}\} = 0,$$

quelque petit que soit le nombre positif  $\varepsilon$ .

On pourrait préciser ce résultat, puisque la partie principale de la fonction  $\chi(z)$  dans le voisinage de  $z=1$  nous est connue, d'après (13).

Mais je n'insisterai pas sur ce point, car il y a une autre méthode, en général plus commode, pour la détermination des représentations asymptotiques des fonctions entières d'ordre fini. En effet, les fonctions (1) et (6) sont liées par la relation suivante, facile à vérifier:

$$\int_0^\infty e^{-r^\sigma} r^{\tau-1} g(r^\sigma e^{\varphi i}) dr = u^{-\tau} f(e^{\varphi i} u^{-\sigma}),$$

où  $\Re(u) > 1$ . L'application à cette intégrale du procédé développé par M. Haar<sup>11)</sup> conduit immédiatement au but.

<sup>11)</sup> A. Haar, Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen, Math. Annalen 96 (1927), S. 69—107.

(Eingegangen am 3. 6. 1930.)

# Über die *C*-Summierbarkeit gewisser Reihen von Didon und Appell.

Von

Lothar Koschmieder in Brünn.

Gegenstand dieser Zeilen sind Reihen, die nach den Polynomen eines gewissen Biorthogonalsystems fortschreiten. Diese Polynome  $U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}, V_{m_1 \dots m_n}^{(s)}$  der  $n$  Veränderlichen  $x_h$  ( $h = 1, \dots, n$ ) werden von den Funktionen erzeugt

$$\left[ \left( 1 - \sum_h^{1,n} a_h x_h \right)^2 + X_n \sum_h^{1,n} a_h^2 \right]^{-\frac{s}{2}} = \sum_{m_1, \dots, m_n}^{0, \infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n),$$

$$\left( 1 - 2 \sum_h^{1,n} a_h x_h + \sum_h^{1,n} a_h^2 \right)^{-\frac{n+s-1}{2}} = \sum_{m_1, \dots, m_n}^{0, \infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} V_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n),$$

wobei  $s$  eine natürliche Zahl bedeutet und  $X_n = 1 - \sum_h^{1,n} x_h^2$  gesetzt ist. Sie werden von P. Appell und J. Kampé de Fériet in dem Werke „Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite“<sup>1)</sup> ausführlich behandelt<sup>2)</sup>; ihre für die Reihenentwicklung grundlegende Eigenschaft ist die folgende. Wird  $dy_1 \dots dy_n = dy$  und  $1 - \sum_h^{1,n} y_h^2 = Y_n$  gesetzt und die Gesamtheit der Unabhängigen  $x_h$  bzw.  $y_h$  durch  $\xi$  bzw.  $\eta$  abgekürzt, so ist<sup>3)</sup>

$$\int_{Y_n \geq 0}^{(n)} Y_n^{\frac{s-1}{2}} U_{l_1 \dots l_n}^{(s)}(\eta) V_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(\eta) dy = 0,$$

falls  $\sum_h^{1,n} (l_h - m_h)^2 > 0$ ; dagegen ist<sup>3)</sup>

$$\int_{Y_n \geq 0}^{(n)} Y_n^{\frac{s-1}{2}} U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(\eta) V_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(\eta) dy = \frac{2 \pi^{\frac{n}{2}}}{2 \mu + n + s - 1} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)} \frac{(\mu + s - 1)!}{(s - 1)!} \frac{1}{m_1! \dots m_n!},$$

<sup>1)</sup> Paris 1926. — Wir führen dieses Werk weiterhin mit A.-K. an.

<sup>2)</sup> Vgl. dort besonders S. 202—297.

<sup>3)</sup> A.-K. S. 263.

wo  $\mu = \sum_{\lambda}^{1, n} m_{\lambda}$ . Diese Biorthogonalität ordnet einer im Bereiche  $X_n \geq 0$  willkürlich gegebenen Funktion  $F(x_1, \dots, x_n) = F(\xi)$  die Reihen zu

$$(1) \quad \mathfrak{B}^{(s)} = \sum_{\mu}^{0, \infty} \sum_{m_1 + \dots + m_n = \mu} A_{m_1 \dots m_n}^{(s)} V_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n),$$

$$(2) \quad A_{m_1 \dots m_n}^{(s)} = \\ = \frac{2\mu + n + s - 1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \frac{(s-1)!}{(\mu+s-1)!} m_1! \dots m_n! \int_{Y_n \geq 0}^{(n)} Y_n^{\frac{s-1}{2}} F(\eta) U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(\eta) dy,$$

$$(3) \quad \mathfrak{U}^{(s)} = \sum_{\mu}^{0, \infty} \sum_{m_1 + \dots + m_n = \mu} B_{m_1 \dots m_n}^{(s)} U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n),$$

$$(4) \quad B_{m_1 \dots m_n}^{(s)} = \\ = \frac{2\mu + n + s - 1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \frac{(s-1)!}{(\mu+s-1)!} m_1! \dots m_n! \int_{Y_n \geq 0}^{(n)} Y_n^{\frac{s-1}{2}} F(\eta) V_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(\eta) dy.$$

Ich werde  $\mathfrak{U}^{(s)}$  und  $\mathfrak{B}^{(s)}$  als Appellsche, im Sonderfalle  $s=1$  als Didonsche Reihen bezeichnen<sup>4)</sup>; zur Abkürzung setze ich  $\mathfrak{U}^{(1)} = \mathfrak{U}$ ,  $U_{m_1 \dots m_n}^{(1)} = U_{m_1 \dots m_n}$  usw.

Über die Darstellung von  $F$  durch die Reihen  $\mathfrak{U}^{(s)}$ ,  $\mathfrak{B}^{(s)}$  läßt sich das Buch von Appell und Kampé de Fériet wie folgt vernehmen<sup>5)</sup>:

«Étant donnée une fonction  $F(x_1, \dots, x_n)$ , définie dans le domaine  $X_n \geq 0$ , supposons que l'on ait pu former l'un ou l'autre des deux développements

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum A_{m_1 \dots m_n}^{(s)} V_{m_1 \dots m_n}^{(s)},$$

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum B_{m_1 \dots m_n}^{(s)} U_{m_1 \dots m_n}^{(s)},$$

les coefficients  $A_{m_1 \dots m_n}^{(s)}$ ,  $B_{m_1 \dots m_n}^{(s)}$  étant calculés par les formules (2) ou (4).

On est naturellement conduit à se poser les questions suivantes:

1° A quelles conditions les séries (1) ou (3) convergent-elles dans le domaine  $X_n \geq 0$ ; convergent-elles uniformément?

2° Si ces séries convergent, à quelles conditions représentent-elles la fonction  $F(x_1, \dots, x_n)$  dont on est parti pour le calcul des coefficients?

On est loin de pouvoir même esquisser une réponse générale à ces deux questions, dans l'état actuel des connaissances sur les développements d'une fonction de plusieurs variables en série de polynômes par la méthode de Fourier.

<sup>4)</sup> Diese Namen wähle ich unter Bezugnahme auf die geschichtlichen Bemerkungen in A.-K. S. 224 f., S. 259 f.

<sup>5)</sup> A.-K. S. 296.



Tandis que pour le développement d'une fonction d'une variable en série de polynomes  $V_m^{(s)}(x)$ , et spécialement de polynomes de Legendre  $V_m(x)$ , des travaux approfondis (de Darboux, Heine, Burkhardt, la Vallée Poussin, Kogbetliantz, etc.) ont permis d'établir des critères extrêmement généraux de convergence et de construire des procédés de sommation de plus en plus puissants, on ne possède jusqu'à présent aucune indication un peu générale sur les conditions de convergence des séries de polynomes  $V_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}$  ou  $U_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}$ .

Indem ich die Konvergenzfrage einstweilen noch zurückstelle, beachtliche ich hier zu zeigen, wie man zu recht *allgemeinen Aussagen über die C-Summierbarkeit der Reihen* (1) und (3) gelangt<sup>6)</sup>. Dieses Ziel erreiche ich in zwei Schritten. Durch den ersten (I) führe ich die Appellsche Reihe  $\mathfrak{B}^{(s)}$  auf die Didonsche  $\mathfrak{B}$  zurück (§ 1). Dabei benutze ich die bemerkenswerte Formel (7), die mir anderwärts nicht begegnet ist; ich beweise sie in § 2. Die Reihe  $\mathfrak{U}^{(s)}$  erhalte ich (§ 3) aus  $\mathfrak{B}^{(s)}$  dadurch, daß ich mit Hilfe der Formel (13) die Summe der zu einem bestimmten Werte von  $\mu$  gehörigen Glieder in (1) auf die Summe der entsprechenden Glieder in (3) umrechne. Beim zweiten Schritte (II) nutze ich den Umstand aus, daß (§ 4) die Didonschen Reihen sich als Sonderfälle der Laplaceschen Reihe  $\mathfrak{Q}$  auf der  $(n+1)$ -stufigen Überkugel des  $(n+2)$ -stufigen Raumes ansehen lassen<sup>7)</sup>. Kampé de Fériet hat bei besonderen  $n, s$  selbst darauf hingewiesen<sup>8)</sup>, daß  $\mathfrak{U}^{(s)}, \mathfrak{B}^{(s)}$  dieselbe Konvergenz zeigen wie  $\mathfrak{Q}$ , ist aber auf die Konvergenz von  $\mathfrak{Q}$  nicht näher eingegangen. Ich untersuchte, indem ich mich auf gewisse von E. Kogbetliantz<sup>9)</sup> herrührende Abschätzungen bei Gegenbauerschen Reihen stützte, die *Summierbarkeits-Bedingungen* von  $\mathfrak{Q}$  und folgerte daraus diejenigen von  $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ . Über beides berichtete ich vor einiger Zeit mündlich<sup>10)</sup>; wenn ich hiermit meine damaligen Ergebnisse (II) zum Druck gebe, brauche ich jetzt mehrere wesentliche der auf  $\mathfrak{Q}$  bezüglichen Sätze (§ 5) nicht mehr zu beweisen, da sie sich in einer Abhandlung von Kien-Kwong Chen<sup>11)</sup> über die Summierbarkeit von  $\mathfrak{Q}$  hergeleitet finden, die um die Zeit meines Vortrages erschien. Während Kien-Kwong Chen die

<sup>6)</sup> Für  $n=2, s=1$  (den Hermiteschen Fall) habe ich die einfachsten Summierungssätze in einer früheren Arbeit aufgestellt (Math. Annalen 101 (1929), S. 120–125), als deren Fortsetzung die vorliegende anzusehen ist.

<sup>7)</sup> A.-K. S. 308f.

<sup>8)</sup> C. R. Acad. Sc. Paris 158 (1914), S. 381–385.

<sup>9)</sup> E. Kogbetliantz, Journ. math. pures appl. (9) 3 (1924), S. 107–187.

<sup>10)</sup> „Über die C-Summierbarkeit gewisser Verallgemeinerungen der Laplaceschen Reihe,“ Vortrag bei der Naturf.-Vers. in Hamburg am 20. 9. 1928.

<sup>11)</sup> Kien-Kwong Chen, Sc. Rep. of the Tôhoku Imp. Univers. (I) 17, S. 1073–1089; Septbr. 1928. — Die von uns behandelten Polynome mehrerer Veränderlichen kommen in dieser Arbeit nicht vor.

Reihe  $\mathfrak{Q}$  in der Richtung untersuchte wie T. H. Gronwall die gewöhnliche Laplacesche Reihe  $L$ , werde ich zum Schlusse (§ 6) die neuartigen Überlegungen, die L. Fejér<sup>12)</sup> über  $L$  angestellt hat, auf  $\mathfrak{Q}$  ausdehnen und die Anwendung auf  $\mathfrak{U}, \mathfrak{R}$  machen.

## I. Zurückführung der Reihen von Appell auf Reihen von Didon.

### § 1.

#### Appellsche Reihen als Didonsche Reihen von $n + s - 1$ Veränderlichen.

Wir betrachten die Didonsche Reihe von  $n + s - 1$  Veränderlichen

$$(5) \sum A_{m_1, \dots, m_n, m_{n+1}, \dots, m_{n+s-1}} V_{m_1, \dots, m_n, m_{n+1}, \dots, m_{n+s-1}}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+s-1}),$$

die der Funktion  $G(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+s-1})$  zugehöre, so daß sich die Beiwerte  $A$  nach der sinngemäß veränderten Formel (2) bestimmen. Jetzt sei im besonderen die Funktion  $G$  von den letzten  $s - 1$  Veränderlichen unabhängig; sie werde durch  $F(x_1, \dots, x_n) = F(\mathfrak{x})$  bezeichnet. Dann ist,

wenn man  $\sum_k^{1, n+s-1} m_k = M$  setzt und die Gesamtheit der Unabhängigen  $x_k$  bzw.  $y_k$  ( $k = 1, \dots, n + s - 1$ ) durch  $\mathfrak{X}$  bzw.  $\mathfrak{Y}$  abkürzt,

$$(6) A_{m_1, \dots, m_{n+s-1}} = \frac{2M + n + s - 1}{2\pi^{\frac{n+s-1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right) \frac{m_1! \dots m_{n+s-1}!}{M!} \\ \times \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(n)} F(\mathfrak{y}) d\mathfrak{y} \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} U_{m_1, \dots, m_{n+s-1}}(\mathfrak{Y}) d\mathfrak{y}_{n+1} \dots d\mathfrak{y}_{n+s-1}.$$

Ist auch nur einer der letzten  $s - 1$  Zeiger, etwa  $m_{n+s}$ , von 0 verschieden, so ist der zugehörige Beiwert  $A$  gleich 0; denn, von einem unwesentlichen Faktor abgesehen, hat er nach dem für die Polynome  $U$  gültigen Gegenstücke der Formel von O. Rodrigues<sup>13)</sup> den Wert

$$\int_{Y_n \geq 0}^{(n)} F(\mathfrak{y}) d\mathfrak{y} \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} \frac{\partial^M Y_{n+s-1}^M}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_{n+s-1}^{m_{n+s-1}}} d\mathfrak{y}_{n+1} \dots d\mathfrak{y}_{n+s-1}.$$

Die unter dem inneren Integralzeichen zuerst nach  $y_{n+s}$  ausgeführte Integration ergibt eine  $(M - 1)$ -te Ableitung des Ausdrucks  $Y_{n+s-1}^M$ , zu nehmen an den Grenzen  $\pm \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_{n+s-1}^2 - y_{n+s+1}^2 - \dots - y_{n+s-1}^2}$ ; an diesen beiden Grenzen aber verschwindet die genannte  $(M - 1)$ -te Ableitung als Polynom, das gewiß den Faktor  $Y_{n+s-1}$  enthält. Es bleiben also in

<sup>12)</sup> L. Fejér, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 267–284, bes. S. 277–280.

<sup>13)</sup> A.-K. S. 272, (30), (34).

der Reihe (5) mit den Beiwerten (6) nur die Glieder stehen, bei denen die letzten  $s-1$  Fußmarken an  $A$  und  $V$  die Werte 0 haben. Jetzt greift die Formel ein<sup>14)</sup>

$$V_{m_1 \dots m_n 0 \dots 0}(\mathfrak{X}) = V_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(\mathfrak{X});$$

ihr zufolge nimmt die letztgenannte Reihe die Gestalt an

$$\sum A_{m_1 \dots m_n 0 \dots 0} V_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(\mathfrak{X}).$$

So kommt in der Tat die Appellsche Reihe (1) von  $n$  Veränderlichen als Sonderfall einer Didonschen Reihe (5) von  $n+s-1$  Veränderlichen zustande, wenn man beweisen kann, daß

$$A_{m_1 \dots m_n 0 \dots 0} = A_{m_1 \dots m_n}^{(s)};$$

dies aber ergibt sich im Hinblick auf (2) sogleich aus der in § 2 zu beweisenden Hilfsformel

$$\begin{aligned} (7) \quad & \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} U_{m_1 \dots m_n 0 \dots 0}(\mathfrak{Y}) dy_{n+1} \dots dy_{n+s-1} \\ &= \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \frac{\mu!(s-1)!}{(\mu+s-1)!} Y_n^{\frac{s-1}{2}} U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(\mathfrak{Y}). \end{aligned}$$

## § 2.

### Beweis der Hilfsformel.

Mit Rücksicht auf die Formeln<sup>15)</sup> läßt sich (7) bei Gebrauch der Abkürzung  $dy_{n+1} \dots dy_{n+s-1} = d\eta$  so schreiben

$$(8) \quad \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} \frac{\partial^\mu Y_{n+s-1}^\mu}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} d\eta = \pi^{\frac{s-1}{2}} \frac{\mu!}{\Gamma\left(\mu + \frac{s+1}{2}\right)} \frac{\partial^\mu Y_n^{\mu + \frac{s-1}{2}}}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}}.$$

Diese Beziehung leiten wir bei festen  $n, s$  durch vollständige Induktion hinsichtlich der Ableitungsordnung z. B. in  $y_1$  her. Zunächst ist nämlich für  $\mu = 1, m_1 = 1$

$$\begin{aligned} \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} \frac{\partial Y_{n+s-1}}{\partial y_1} d\eta &= -2y_1 \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} d\eta = -2y_1 \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} Y_n^{\frac{s-1}{2}} \quad 16) \\ &= \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}\right)} \frac{\partial Y_n^{\frac{s+1}{2}}}{\partial y_1}. \end{aligned}$$

<sup>14)</sup> A.-K. S. 246.

<sup>15)</sup> Den Wert von (8) für  $\mu = 0$  übernehmen wir von A.-K. S. 251.

Jetzt bleibt zu zeigen, daß unter der Annahme (8) auch gilt

$$(9) \quad \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} \frac{\partial^{\mu+1} Y_{n+s-1}^{\mu+1}}{\partial y_1^{m_1+1} \partial y_2^{m_2} \dots \partial y_n^{m_n}} d\eta = \pi^{\frac{s-1}{2}} \frac{(\mu+1)!}{\Gamma\left(\mu + \frac{s+3}{2}\right)} \frac{\partial^{\mu+1} Y_{n+\frac{s+1}{2}}^{\mu+\frac{s+1}{2}}}{\partial y_1^{m_1+1} \partial y_2^{m_2} \dots \partial y_n^{m_n}}.$$

Für die linke Seite von (9) ergibt sich

$$(10) \quad -2(\mu+1) \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} \frac{\partial^{\mu}(y_1 Y_{n+s-1}^{\mu})}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} d\eta$$

$$= -2(\mu+1) \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} \frac{\partial^{\mu-m_1}}{\partial y_2^{m_2} \dots \partial y_n^{m_n}} \left( y_1 \frac{\partial^{m_1} Y_{n+s-1}^{\mu}}{\partial y_1^{m_1}} + m_1 \frac{\partial^{m_1-1} Y_{n+s-1}^{\mu}}{\partial y_1^{m_1-1}} \right) d\eta$$

$$= -2(\mu+1) \left( y_1 \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} \frac{\partial^{\mu} Y_{n+s-1}^{\mu}}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} d\eta + m_1 \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} \frac{\partial^{\mu-1} Y_{n+s-1}^{\mu}}{\partial y_1^{m_1-1} \partial y_2^{m_2} \dots \partial y_n^{m_n}} d\eta \right).$$

Aus der Annahme (8) folgt aber, daß auch

$$(11) \quad \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-1)} \frac{\partial^{\mu-1} Y_{n+s-1}^{\mu}}{\partial y_1^{m_1-1} \partial y_2^{m_2} \dots \partial y_n^{m_n}} d\eta = \pi^{\frac{s-1}{2}} \frac{\mu!}{\Gamma\left(\mu + \frac{s+1}{2}\right)} \frac{\partial^{\mu-1} Y_{n+\frac{s-1}{2}}^{\mu+\frac{s-1}{2}}}{\partial y_1^{m_1-1} \partial y_2^{m_2} \dots \partial y_n^{m_n}}.$$

Denn wenn man das Integral linker Hand in der Gestalt

$$(12) \quad \int_{-Y_{n+s-1}}^{+Y_{n+s-1}} dy_{n+1} \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-2)} \frac{\partial^{\mu-1} Y_{n+s-1}^{\mu}}{\partial y_1^{m_1-1} \partial y_2^{m_2} \dots \partial y_n^{m_n}} dy_{n+2} \dots dy_{n+s-1}$$

nach  $y_1$  ableitet, so verschwinden die beiden Glieder, die davon herrühren, daß die Grenzen des äußeren Integrals von  $y_1$  abhängen; jedes dieser Glieder hat nämlich ein Integral zum Faktor, dessen obere und untere Grenzen denselben Wert 0 haben. Es bleibt

$$\int_{-Y_{n+s-1}}^{+Y_{n+s-1}} dy_{n+1} \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-2)} \frac{\partial^{\mu-1} Y_{n+s-1}^{\mu}}{\partial y_1^{m_1-1} \partial y_2^{m_2} \dots \partial y_n^{m_n}} dy_{n+2} \dots dy_{n+s-1}.$$

Die Wiederholung dieses Schrittes führt zu dem Integral

$$\int_{Y_{n+s-1} \geq 0}^{(s-2)} dy_{n+1} \dots dy_{n+s-2} \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{-Y_{n+s-1}}^{+Y_{n+s-1}} \frac{\partial^{\mu-1} Y_{n+s-1}^{\mu}}{\partial y_1^{m_1-1} \partial y_2^{m_2} \dots \partial y_n^{m_n}} dy_{n+s-1};$$

weil der letzte Integrand den Faktor  $Y_{n+s-1}$  enthält, verschwinden wieder die Glieder, die davon herrühren, daß die Grenzen  $\pm \sqrt{Y_{n+s-1}}$  von  $y_1$  abhängen, und es bleibt genau die linke Seite von (8). — Zum Abschlusse

des Beweises von (11) genügt jetzt die Feststellung, daß linke und rechte Seite von (11) z. B. für den Wert  $y_1 = \sqrt{1 - y_2^2 - \dots - y_n^2}$  übereinstimmen. Setzt man ihn ein, so fallen untere und obere Grenze des Integrals (12) im Werte 0 zusammen, und die rechte Seite von (11) verschwindet wegen ihres Faktors  $Y_n^{\frac{s+1}{2}}$ .

Wenn man in den dritten Ausdruck (10) statt der beiden Integrale die Werte (8), (11) einführt, so erhält man

$$-2\pi^{\frac{s-1}{2}} \frac{(\mu+1)!}{\Gamma\left(\mu+\frac{s+1}{2}\right)} \left( y_1 \frac{\partial^\mu Y_n^{\mu+\frac{s-1}{2}}}{\partial y_1^{m_1} \partial y_2^{m_2} \dots \partial y_n^{m_n}} + m_1 \frac{\partial^{\mu-1} Y_n^{\mu+\frac{s-1}{2}}}{\partial y_1^{m_1-1} \partial y_2^{m_2} \dots \partial y_n^{m_n}} \right),$$

und von dieser Größe bestätigt man leicht, daß sie gleich der rechten Seite von (9) ist; man führt dazu die durch die drei Formen von (10) angedeutete Rechnung in umgekehrter Richtung durch. — Der Übergang von (8) zu (9) bleibt in Kraft, wenn  $\mu \geq 1$  und  $m_1 = 0$  ist.

## § 3.

Die Reihe  $U^{(s)}$ .

Die Reihe  $U^{(s)}$  (3) gewinnt man aus  $\mathfrak{B}^{(s)}$  (1) mit Hilfe der Beziehung

$$(13) \quad \sum_{m_1 + \dots + m_n = \mu} m_1! \dots m_n! U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(x) V_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(y) \\ = \sum_{m_1 + \dots + m_n = \mu} m_1! \dots m_n! U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(y) V_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(x),$$

die wir jetzt beweisen werden<sup>16)</sup>. Dazu benutzen wir die Darstellbarkeit der Polynome  $U^{(s)}$  durch die Polynome  $V^{(s)}$  gleichen Gesamtgrades  $\mu$ <sup>17)</sup>.

$$(14) \quad U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(x) = \sum_{m'_1 + \dots + m'_n = \mu} \mathfrak{A}_{m'_1 \dots m'_n} V_{m'_1 \dots m'_n}^{(s)}(x);$$

hierbei ist

$$m'_h = m_h + 2i_h, \quad \sum_h^{1,n} i_h = 0, \quad \sum_h^{1,n} m'_h = \mu.$$

Bildet man (2) mit  $F = U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}$  und bedient sich der Umformung<sup>18)</sup>

$$\int_{Y_n \geq 0}^{(n)} Y_n^{\frac{s-1}{2}} F(y) U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(y) dy \\ = \frac{1}{2^\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{s+1}{2}\right)} \frac{(\mu+s-1)!}{(s-1)!} \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \int_{Y_n \geq 0}^{(n)} Y_n^{\mu+\frac{s-1}{2}} \frac{\partial^\mu F(y)}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} dy,$$

<sup>16)</sup> Eine ähnliche Formel für ungerade  $s$ , die für  $s=1$  mit (13) übereinstimmt, geben A.-K. S. 313. Für  $n=2$ ,  $s=1$  vgl. ebenda S. 317.

<sup>17)</sup> A.-K. S. 285.

<sup>18)</sup> A.-K. S. 283.

so findet man

$$(15) \quad \mathfrak{A}_{m'_1 \dots m'_n} = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}} 2^\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu + \frac{s+1}{2}\right)} \left(\mu + \frac{n+s-1}{2}\right) \int_{Y_n \geq 0}^{(n)} Y_n^{\mu + \frac{s-1}{2}} b'_\mu dy,$$

wo

$$b'_\mu = \frac{\partial^\mu U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(y)}{\partial y_1^{m'_1} \dots \partial y_n^{m'_n}}.$$

Diese Größe ist fest, weil  $U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}$  ein Polynom vom Gesamtgrade  $\mu$  ist<sup>19)</sup>. Um den Wert von  $b'_\mu$  zu bestimmen, suchen wir den Beiwert  $c_{m'_1 \dots m'_n}$  des Potenzproduktes  $y_1^{m'_1} \dots y_n^{m'_n}$  in  $U_{m_1 \dots m_n}^{(s)}$ . In der Absicht, dazu die Formel (7) zu benutzen, ermitteln wir erst den entsprechenden Beiwert in

$$\begin{aligned} U_{m_1 \dots m_n 0 \dots 0}(y) &= \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^\mu (1 - y_1^2 - \dots - y_{n+s-1}^2)^\mu}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} \\ &= \frac{1}{2^\mu} \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^\mu}{\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_n^{m_n}} \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_{n+s-1} = \mu} \mu! \frac{(-1)^{\mu_1} y_1^{2\mu_1} \dots y_{n+s-1}^{2\mu_{n+s-1}}}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_{n+s-1}!} \end{aligned}$$

zu  $\frac{\mu!}{2^\mu} \prod_h^{1,n} \frac{(2m_h + 2i_h)!}{m_h! (m_h + i_h)! (m_h + 2i_h)!}$ . Es ergibt sich jetzt nach (7)

$$c_{m'_1 \dots m'_n} = \frac{(\mu + s - 1)!}{(s - 1)!} \frac{1}{2^\mu} \prod_h^{1,n} \frac{(2m_h + 2i_h)!}{m_h! (m_h + i_h)! (m_h + 2i_h)!},$$

ferner  $b'_\mu = m'_1! \dots m'_n! c_{m'_1 \dots m'_n}$ ; mithin erhält man aus (15) durch kurze Rechnung<sup>20)</sup>

$$(16) \quad \mathfrak{A}_{m'_1 \dots m'_n} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu + \frac{n+s-1}{2}\right)} \frac{(\mu + s - 1)!}{(s - 1)!} \frac{1}{2^{2\mu}} \prod_h^{1,n} \frac{(2m_h + 2i_h)!}{m_h! (m_h + i_h)!} \quad {}^{21)}$$

Nach (16) kann man die linke Seite von (13), abgesehen von den in (16) vor  $\prod_h$  stehenden Faktoren, schreiben

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1 + \dots + m_n = \mu} \sum_{i_1 + \dots + i_n = 0} \prod_h^{1,n} \frac{(2m_h + 2i_h)!}{(m_h + i_h)!} V_{m_1 + 2i_1, \dots, m_n + 2i_n}^{(s)}(\xi) V_{m_1 \dots m_n}^{(s)}(y) \\ &= \sum_{m'_1 + \dots + m'_n = \mu} \sum_{i_1 + \dots + i_n = 0} \prod_h^{1,n} \frac{(2m'_h - 2i_h)!}{(m'_h - i_h)!} V_{m'_1 \dots m'_n}^{(s)}(\xi) V_{m'_1 - 2i_1, \dots, m'_n - 2i_n}^{(s)}(y), \end{aligned}$$

und das ist bis auf den genannten Faktor die rechte Seite von (13).

<sup>19)</sup> A.-K. S. 268 f.

<sup>20)</sup> Sie verläuft ebenso wie die von A.-K. auf S. 287, Zeile 18 bis 22 durchgeführte Rechnung. Zum Schlusse benutzt man die Formel (30) des Textes.

<sup>21)</sup> Diese Formel ergänzt die vorliegenden Angaben über (16) insofern, als die ausdrücklichen Werte der  $\mathfrak{A}$  nach A.-K. S. 286, Fußnote, erst für  $s = 1$  berechnet sind.

## II. Summierbarkeit der Reihen von Didon.

## § 4.

## Die Didonschen Reihen als Sonderfälle der Laplaceschen Reihe auf der Überkugel.

Im  $R_{n+2}$  sei  $K$  die  $(n+1)$ -stufige Überkugel mit dem Halbmesser 1 um den Ursprung  $O$ ; es bedeute  $\Omega = \int_K^{(n+1)} d\omega$  ihre Oberfläche<sup>22)</sup>.  $P, Q$  seien Punkte auf  $K$ ; der Winkel der Strahlen  $OP$  und  $OQ$  heiße  $\gamma$ ,  $0 \leq \gamma \leq \pi$ , und es seien  $A_\mu(\cos \gamma)$  die aus der Entwicklung

$$(1 - 2b \cos \gamma + b^2)^{-\frac{n}{2}} = \sum_{\mu}^{0, \infty} b^\mu A_\mu(\cos \gamma)$$

entspringenden Gegenbauerschen Polynome. Ist dann  $f(Q)$  eine integrierbare eindeutige Funktion des Ortes  $Q$  auf  $K$ , so ist die ihr in  $P$  zugehörige Laplacesche Reihe<sup>23)</sup>

$$(17) \quad \Omega = \frac{2}{n\Omega} \sum_{\mu}^{0, \infty} \left(\mu + \frac{n}{2}\right) \int_K^{(n+1)} f(Q) A_\mu(\cos \gamma) d\omega.$$

Wir führen jetzt die zonalen Koordinaten<sup>24)</sup>  $\varrho, x_1, \dots, x_n, \varphi$  des Punktes  $P$  ein, die mit seinen cartesischen  $z_1, \dots, z_{n+2}$  wie folgt zusammenhängen:

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n+2}^2}, & z_h &= \varrho x_h, & h &= 1, \dots, n, & |x_h| &\leq 1, \\ z_{n+1} &= \varrho \sqrt{X_n} \cos \varphi, & z_{n+2} &= \varrho \sqrt{X_n} \sin \varphi, & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Entsprechend lauten die Beziehungen zwischen den beiden Arten von Koordinaten  $\sigma, y_1, \dots, y_n, \psi$  und  $w_1, \dots, w_{n+2}$  des Punktes  $Q$ .  $f(Q)$  ist dann auf  $K$  ( $\sigma=1$ ) Funktion der  $y_h$  und von  $\psi$ . Im besonderen sei  $f$  von  $\psi$  unabhängig, eine Funktion  $F(\Omega) = F(y)$  des Ortes  $\Omega(y)$  im Bereiche  $Y_n \geq 0$ . Dann geht, da

$$(18) \quad d\omega = dy d\psi$$

ist<sup>25)</sup>,  $\Omega$  über in

$$(19) \quad \Omega = \frac{2}{n\Omega} \sum_{\mu}^{0, \infty} \left(\mu + \frac{n}{2}\right) \int_{Y_n \geq 0}^{(n)} F(\Omega) dy \int_0^{2\pi} A_\mu(\cos \gamma) d\psi.$$

<sup>22)</sup> Es ist  $\Omega = 2\pi^{\frac{n}{2}+1} \left[\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]^{-1}$  nach A.-K. S. 203, Fußnote.

<sup>23)</sup> Vgl. Kien-Kwong Chen<sup>11)</sup>, S. 1073 f.

<sup>24)</sup> A.-K. S. 211.

<sup>25)</sup> A.-K. S. 212.



Nun besitzen aber die Polynome  $A_\mu$  ein Additionsgesetz: Es ist <sup>26)</sup>

$$A_\mu(\cos \gamma) = \frac{1}{\mu!} \sum_{m_1 + \dots + m_n = \mu} m_1! \dots m_n! U_{m_1 \dots m_n}(\xi) V_{m_1 \dots m_n}(\eta) \\ + 2 \sum_k \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(2k)!}{(\mu+k)! k!} X_n^{\frac{k}{2}} Y_n^{\frac{k}{2}} \sum_{j_1 + \dots + j_n = \mu - k} j_1! \dots j_n! U_{j_1 \dots j_n}^{(2k+1)}(\xi) V_{j_1 \dots j_n}^{(2k+1)}(\eta) \cos k(\varphi - \psi).$$

Integriert man nach  $\psi$  von 0 bis  $2\pi$ , so erhält man

$$(20) \quad \int_0^{2\pi} A_\mu(\cos \gamma) d\psi = \frac{2\pi}{\mu!} \sum_{m_1 + \dots + m_n = \mu} m_1! \dots m_n! U_{m_1 \dots m_n}(\xi) V_{m_1 \dots m_n}(\eta);$$

wegen der Symmetrie der linken Seite in  $\xi$  und  $\eta$  — oder wegen (13) — ist auch

$$(21) \quad \int_0^{2\pi} A_\mu(\cos \gamma) d\psi = \frac{2\pi}{\mu!} \sum_{m_1 + \dots + m_n = \mu} m_1! \dots m_n! U_{m_1 \dots m_n}(\eta) V_{m_1 \dots m_n}(\xi).$$

Nach (20), (21), <sup>27)</sup> entstehen aus (19) in der Tat die Didonschen Reihen  $U$ ,  $V$  als Sonderfälle von (17).

## § 5.

### Summierbarkeit an Stetigkeitsstellen.

Der einfachste Satz über die  $C$ -Summierung der Reihe (17) lautet:

*Ist  $\delta \geq n+1$ , so streben die  $(C, \delta)$ -Mittel der Reihe  $\mathfrak{L}$  einer auf der Überkugel  $K$  beschränkten, dort integrierbaren Funktion  $f(Q) = f(y_1, \dots, y_n, \psi)$  an jeder Stetigkeitsstelle  $P$  von  $f$  dem Werte  $f(P)$  zu. Alle diese Mittel liegen zwischen unterer und oberer Schranke der Funktionswerte.*

Diesen Satz gibt zwar Kien-Kwong Chen nicht an; ich brauche gleichwohl auf den Beweis nicht näher einzugehen, weil er genau so verläuft wie im Falle  $n=2$ , bei dem ich ihn in allen Einzelheiten durchgeführt habe <sup>27)</sup>. Wesentlich ist, daß nach E. Kogbetliantz <sup>28)</sup> die  $\mu$ -ten  $(C, \delta)$ -

Mittel <sup>29)</sup> der Kernreihe  $\sum_{\mu} \left(\mu + \frac{n}{2}\right) A_\mu(\cos \gamma)$

$$\mathfrak{S}_\mu^{(\delta)}(\cos \gamma) \geq 0$$

<sup>26)</sup> A.-K. S. 312.

<sup>27)</sup> A. a. O. <sup>26)</sup>. — Um zu unseren Bezeichnungen im  $R_{n+1}$  überzugehen, hat man a. a. O. <sup>26)</sup>, S. 122–124,  $n$  durch  $\mu$ ,  $s_n^{(\delta)}$  durch  $\mathfrak{S}_\mu^{(\delta)}$ , ferner den Nenner  $2\pi^n$  dort in (6) durch  $n\Omega/2$  zu ersetzen, welches auch der Wert des Integrals  $\int_K \mathfrak{S}_\mu^{(\delta)}(\cos \gamma) d\omega$  ist.

<sup>28)</sup> Kogbetliantz <sup>26)</sup>, S. 179.

<sup>29)</sup> Vgl. z. B. <sup>26)</sup>, S. 122. — Dort  $s_n^{(\delta)}(\cos \gamma)$  heißt hier  $\mathfrak{S}_\mu^{(\delta)}(\cos \gamma)$ .

sind im Bereiche  $0 \leq \gamma \leq \pi$ , wenn  $\delta \geq n+1$ ; dieser Umstand gestattet die Anwendung des ersten Mittelwertsatzes auf das Integral, durch welches das  $\mu$ -te  $(C, \delta)$ -Mittel der Reihe  $\Omega$  dargestellt wird. Die zweite Aussage des Satzes ergibt sich dadurch, daß man die vorausgesetzte Ungleichung  $m < f(Q) < M$  mit  $\Theta_{\mu}^{(\delta)}(\cos \gamma) \geq 0$  multipliziert und dann über  $K$  integriert.

Indem wir in einem Raume  $\mathfrak{R}_{n+1}$  den Bereich  $X_n \leq 1$  als  $n$ -stufige Überkugel  $\mathfrak{K}$  mit dem Halbmesser 1 um den Ursprung  $\Omega$  ansehen und unter  $\mathfrak{P}(\xi)$ ,  $\Omega(\eta)$  Punkte in  $\mathfrak{K}$  verstehen, erhalten wir aus dem Ergebnisse über  $\Omega$  für die Reihen  $\Omega^{(s)}$ ,  $\mathfrak{B}^{(s)}$  unmittelbar den Satz<sup>20)</sup>:

*Ist  $\delta \geq n+1$  bzw.  $\delta \geq n+s$ , so streben die  $(C, \delta)$ -Mittel der Didonschen bzw. Appellschen Reihen einer in der Überkugel  $\mathfrak{K}$  beschränkten, dort integrierbaren Funktion  $F(\Omega)$  an jeder Stetigkeitsstelle  $\mathfrak{P}$  von  $F$  dem Werte  $F(\mathfrak{P})$  zu. Alle diese Mittel liegen zwischen unterer und oberer Schranke der Funktionswerte.*

Der erste der von Kien-Kwong Chen<sup>21)</sup> über  $\Omega$  aufgestellten Sätze, welche die Ordnung  $\delta$  erniedrigen, besagt folgendes: Ist  $\delta \geq n$ , so streben die  $(C, \delta)$ -Mittel der Reihe  $\Omega$  einer auf  $K$  absolut integrierbaren Funktion  $f(Q)$  an jeder Stetigkeitsstelle  $P$  von  $f$  dem Werte  $f(P)$  zu. Sie streben ihm gleichmäßig zu in jedem Gebiete, das dem Innern des Stetigkeitsgebietes von  $f$  angehört. — Hieraus folgt:

*Ist  $\delta \geq n$  bzw.  $\delta \geq n+s-1$ , so streben die  $(C, \delta)$ -Mittel der Didonschen bzw. Appellschen Reihen einer in  $\mathfrak{K}$  absolut integrierbaren Funktion  $F(\Omega)$  an jeder Stetigkeitsstelle  $\mathfrak{P}$  von  $F$  dem Werte  $F(\mathfrak{P})$  zu. Sie streben ihm gleichmäßig zu in jedem Gebiete, das dem Innern des Stetigkeitsgebietes von  $F$  angehört.*

Der Hauptinhalt des zweiten der Sätze Kien-Kwong Chens ist folgender: Auch wenn  $\frac{n}{2} < \delta < n$  ist, streben die  $(C, \delta)$ -Mittel der Reihe  $\Omega$  einer auf  $K$  absolut integrierbaren Funktion  $f(Q)$  an jeder Stetigkeitsstelle  $P$  von  $f$  dem Werte  $f(P)$  zu, sofern die Gegenpolbedingung erfüllt, d. h. das Integral

$$(22) \quad C = \int_K \frac{|f(Q)| d\omega}{\sin^{\frac{n}{2}} \gamma}^{(n+1)}$$

vorhanden ist<sup>21)</sup>. — Der Übertragung dieses Satzes auf die Reihen  $\Omega^{(s)}$ ,  $\mathfrak{B}^{(s)}$

<sup>20)</sup> Die Sätze über die Appellschen Reihen folgen aus denen über die Didonschen durch den in I entwickelten Zusammenhang.

<sup>21)</sup> Das tritt ein, wenn  $T = \int_K |f(Q)| D^{-\frac{n}{2}} d\omega$  vorhanden ist, unter  $D$  den auf  $K$  gemessenen Abstand des Punktes  $Q$  vom Gegenpol  $\bar{P}(1, -x_1, \dots, -x_n, \varphi + \pi)$  des Punktes  $P(1, x_1, \dots, x_n, \varphi)$  verstanden.  $T$  ist vorhanden, wenn  $f$  beschränkt ist, oder wenn auch nur  $|f| < \text{const. } D^{-\nu}$  und  $\nu < \frac{n}{2} + 1$  ist.

sei folgendes vorausgeschickt.  $\bar{P}$  sei der Gegenpol<sup>31)</sup> von  $P$  auf  $K$ . Durch eine zu  $OP$  bzw.  $O\bar{P}$  senkrechte Überebene im Abstände  $\cos \varepsilon$  von  $O$  ( $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ) zerfällt  $K$  in die Hauben  $K_1$  bzw.  $K_2$ , die den Punkt  $P$  bzw.  $\bar{P}$  enthalten, und den Gürtel  $K_3 = K - K_1 - K_2$ . Wir behaupten, daß bei der besonderen Annahme  $f(Q) = F(\Omega)$

$$(23) \quad \int_{K_1}^{(n+1)} |f(Q)| \sin^{-\frac{n}{2}} \gamma \, d\omega < 2^{\frac{n}{4}+1} \pi \int_{\mathfrak{K}}^{(n)} |F(\Omega)| \mathfrak{D}^{-\frac{n}{2}} dy$$

ist, wo  $\mathfrak{D}$  den Abstand des Punktes  $\Omega$  vom Punkte  $\mathfrak{P}(-x_A)$  bedeutet. Es ist nämlich, wenn

$$(24) \quad \sum_A^{1,n} x_A^2 = r^2, \quad \sum_A^{1,n} y_A^2 = s^2$$

gesetzt wird und  $\zeta$  den Winkel der Strahlen  $\mathfrak{D}\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{D}\Omega$  bedeutet,

$$(25) \quad \begin{aligned} \cos \gamma &= \sum_A^{1,n} x_A y_A + \sqrt{X_n} \sqrt{Y_n} \cos(\varphi - \psi) \quad s^2 \\ &= r s \cos \zeta + \sqrt{1-r^2} \sqrt{1-s^2} \cos(\varphi - \psi); \end{aligned}$$

da

$$\mathfrak{D}^2 = \sum_A^{1,n} (x_A + y_A)^2 = r^2 + 2rs \cos \zeta + s^2$$

ist, gilt mithin

$$2(1 + \cos \gamma) - \mathfrak{D}^2 \geq (\sqrt{1-r^2} - \sqrt{1-s^2})^2, \quad \cos \frac{\gamma}{2} \geq \frac{\mathfrak{D}}{2}.$$

Für den auf  $K_3$  bezüglichen Teil  $C_3$  von  $C$  erhält man daher, weil dort  $\gamma > \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin \frac{\gamma}{2} > 2^{-\frac{1}{2}}$  ist, in der Tat

$$C_3 = \int_{K_3}^{(n+1)} |f(Q)| 2^{-\frac{n}{2}} \sin^{-\frac{n}{2}} \frac{\gamma}{2} \cos^{-\frac{n}{2}} \frac{\gamma}{2} \, d\omega < 2^{\frac{n}{4}+1} \pi \int_{\mathfrak{K}}^{(n)} |F(\Omega)| \mathfrak{D}^{-\frac{n}{2}} dy.$$

Im Hinblick auf (23) ergibt sich nunmehr für die Reihen  $\mathfrak{U}^{(s)}$ ,  $\mathfrak{P}^{(s)}$  der Satz<sup>41)</sup>:

Auch wenn  $\frac{n}{2} < \delta < n$  bzw.  $\frac{n+s-1}{2} < \delta < n+s-1$  ist, streben die  $(C, \delta)$ -Mittel der Didonschen bzw. Appellschen Reihen einer in  $\mathfrak{K}$  absolut integrierbaren Funktion an jeder Stetigkeitsstelle  $\mathfrak{P}$  von  $F$  dem Werte  $F(\mathfrak{P})$  zu, sofern das Integral

$$(26) \quad \mathfrak{U} = \int_{\mathfrak{K}}^{(n)} \frac{|F(\Omega)| \, dy}{\mathfrak{D}^{\frac{n}{2}}} \quad \text{bzw.} \quad (27) \quad \mathfrak{P}^{(s)} = \int_{\mathfrak{K}}^{(n)} \frac{|F(\Omega)| \, dy}{\mathfrak{D}^{\frac{n+s-1}{2}}}$$

vorhanden ist.

<sup>31)</sup> A.-K. S. 197, 220.

## § 6.

## Summierbarkeit an Unstetigkeitsstellen.

Kien-Kwong Chen hat durch seine Sätze die Ergebnisse Gronwalls über  $L$ , die sich auf Stetigkeitsstellen beziehen, auf  $\mathfrak{L}$  verallgemeinert. Wir werden jetzt Fejérs neue Untersuchung der Reihe  $L^{(12)}$ , die gewissen Unstetigkeiten der Funktion an der Entwicklungsstelle gilt, auf  $\mathfrak{L}$  und damit auf  $\mathfrak{U}^{(13)}$ ,  $\mathfrak{B}^{(14)}$  übertragen. Es gelingt, für  $\frac{n}{2} < \delta$  die  $(C, \delta)$ -Summierbarkeit der Reihe  $\mathfrak{L}$  einer auf  $K$  absolut integrierbaren Funktion  $f$  in  $P$  zum Werte  $\mathfrak{F}$  auch dann darzutun, wenn  $f$  dort unstetig ist, sofern nur

$$(28) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_\varepsilon} \int_{K_\varepsilon}^{(n+1)} |f(Q) - \mathfrak{F}| d\omega = 0$$

ist, wo  $\Omega_\varepsilon$  den Inhalt der Haube  $K_\varepsilon = K_1$  bedeutet. Für  $\frac{n}{2} < \delta < n$  ist diesen Voraussetzungen die weitere (22) hinzuzufügen.

Um aus (28) eine bequemere Aussage zu folgern, wählen wir  $P$  als Pol eines Systems sphärischer Polarkoordinaten<sup>23)</sup>  $\tau_1, \dots, \tau_n, \psi$ , so daß  $\tau_1 = 0$  in  $P$ . Dann ist<sup>24)</sup>  $\cos \gamma = \cos \tau_1$ . Aus

$$(29) \quad d\omega = \sin^n \tau_1 \sin^{n-1} \tau_2 \dots \sin \tau_n d\tau_1 \dots d\tau_n d\psi$$

ergibt sich

$$\Omega_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \sin^n \tau_1 d\tau_1 \int_0^\pi \sin^{n-1} \tau_2 d\tau_2 \dots \int_0^\pi \sin \tau_n d\tau_n \int_0^{2\pi} d\psi;$$

mit Hilfe der Formel

$$(30) \quad \int_0^\pi \sin^h \tau d\tau = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{h+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{2}+1\right)}$$

erhält man daher

$$(31) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega_\varepsilon}{\varepsilon^{n+1}} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}.$$

Es bedeute  $d\xi$  das Flächenelement und  $\Xi$  die Oberfläche<sup>25)</sup> der  $n$ -stufigen Überkugel  $H$  vom Halbmesser 1, und es sei

$$(32) \quad \int_H^{(n)} f(Q) d\xi = \Xi \Psi(\tau_1);$$

<sup>23)</sup> A.-K. S. 202 f.

<sup>24)</sup> Vgl. Kien-Kwong Chen <sup>11)</sup>, S. 1074, 1076.

<sup>25)</sup> Es ist  $d\omega = \sin^n \tau_1 d\tau_1 d\xi$  und  $\Xi = \int_H^{(n)} d\xi = 2\pi^{\frac{n+1}{2}} \left[ \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right]^{-1}$  nach <sup>22)</sup>.

man findet mit Hilfe der Ungleichung

$$(33) \quad \sin \tau \geq \frac{2}{\pi} \tau, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2},$$

daß

$$(34) \quad \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int_{K_\varepsilon}^{(n+1)} |f(Q) - \mathfrak{F}| d\omega \geq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int_0^\varepsilon \sin^n \tau d\tau \left| \int_H^{(n)} (f(Q) - \mathfrak{F}) d\xi \right| \\ \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \varepsilon \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int_0^\varepsilon \tau^n |\Psi(\tau) - \mathfrak{F}| d\tau.$$

Bei dem in der letzten Zeile angeschriebenen Ausdrucke, der nach (28), (31) mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen 0 strebt, machen wir uns folgende Bemerkung von Fejér<sup>26)</sup> zunutze: Strebt für irgendeinen Wert von  $\nu$ ,  $\nu \geq 1$ , die Größe  $\nu \varepsilon^{-\nu} \int_0^\varepsilon |\chi(\tau)| \tau^{\nu-1} d\tau$  gegen  $\alpha$ , wenn  $\varepsilon \rightarrow 0$ , so gilt dasselbe für jedes reelle  $\nu \geq 1$ . Wenn man im Vordersatze  $\Psi(\tau) - \mathfrak{F} = \chi(\tau)$ ,  $n+1 = \nu$ ,  $0 = \alpha$  setzt, erhält man aus dem Nachsatze für  $\nu = 1$

$$(35) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = 0, \quad \text{wo} \quad \Phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |\chi(\tau)| d\tau;$$

fortan wollen wir (28) durch (35) ersetzen.

Jetzt betrachten wir das  $\mu$ -te  $(C, \delta)$ -Mittel der Reihe  $\mathfrak{Q}$

$$J_\mu = S_\mu^{(\delta)}(\cos \tau_1) = \frac{2}{nD} \int_K^{(n+1)} f(Q) \mathfrak{S}_\mu^{(\delta)}(\cos \tau_1) d\omega \quad {}^{27)}$$

Zum Nachweise, daß

$$(36) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} J_\mu = \mathfrak{F},$$

zerlegen wir  $J_\mu$  in drei Posten  $J'_\mu, J''_\mu, J'''_\mu$  entsprechend der Zerlegung der Kugel in  $K_1, K_2, K_3$ . Wir können dann die von Kien-Kwong Chen<sup>28)</sup> geführten Beweise dafür, daß

$$(37) \quad \lim J''_\mu = 0, \quad (38) \quad \lim J'''_\mu = 0$$

ist, unverändert übernehmen. Um zu zeigen, daß

$$(39) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} J'_\mu = \mathfrak{F},$$

schreiben wir  $J'_\mu$  auf Grund von (29), (32) in der Gestalt

$$J'_\mu = \frac{2\varepsilon}{nD} \int_0^\varepsilon \chi(\tau) \mathfrak{S}_\mu^{(\delta)}(\cos \tau) \sin^n \tau d\tau + \mathfrak{F} \frac{2}{nD} \int_{K_1}^{(n+1)} \mathfrak{S}_\mu^{(\delta)}(\cos \tau_1) d\omega = Z_1 + Z_2.$$

<sup>26)</sup> Fejér <sup>15)</sup>, S. 282 f., Fußnote <sup>15)</sup>.

<sup>27)</sup> Wegen der Bedeutung der Zeichen vgl. <sup>27)</sup>, <sup>28)</sup>.

<sup>28)</sup> Kien-Kwong Chen <sup>11)</sup>, S. 1082 ff.

In

$$Z_3 = \Im \frac{2}{n\Omega} \int_K^{(n+1)} \Im_\mu^{(d)}(\cos \tau_1) d\omega - \Im \frac{2}{n\Omega} \int_{K_1+K_2}^{(n+1)} \Im_\mu^{(d)}(\cos \tau_1) d\omega = Z_3 - Z_4$$

ist  $Z_3 = \Im$  nach <sup>37)</sup>;  $Z_4$  strebt für  $\mu \rightarrow \infty$  aus denselben Gründen <sup>38)</sup> wie  $J''_\mu, J'''_\mu$  dem Werte 0 zu. Nun zu  $Z_1$ ! Wir verstehen unter  $\beta$  eine beliebige kleine positive Größe und wählen  $\varepsilon$  so, daß  $0 < \Phi(t) < \beta$ , wenn  $0 < t \leq \varepsilon$ ; das ist nach (35) möglich. Unter der Annahme  $\mu > \varepsilon^{-1}$  zerlegen wir  $Z_1$  in

$$\frac{2\varepsilon}{n\Omega} \int_0^{\frac{1}{\mu}} \chi(\tau) \Im_\mu^{(d)}(\cos \tau) \sin^n \tau d\tau + \frac{2\varepsilon}{n\Omega} \int_{\frac{1}{\mu}}^{\varepsilon} \chi(\tau) \Im_\mu^{(d)}(\cos \tau) \sin^n \tau d\tau = Z_5 + Z_6.$$

Bei  $Z_5$  benutzen wir die Abschätzung <sup>39)</sup>

$$|\Im_\mu^{(d)}(\cos \tau)| < c_1 \mu^{n+1};$$

$c_1$  und weiterhin  $c_2, \dots$  bedeuten positive, von  $\mu$  unabhängige Festwerte. Weil  $\sin \tau < \mu^{-1}$ , finden wir mit Rücksicht auf (35)

$$|Z_5| < c_1 \mu^{n+1} \cdot \frac{1}{\mu^n} \int_0^{\frac{1}{\mu}} |\chi(\tau)| d\tau = c_2 \Phi\left(\frac{1}{\mu}\right) < c_2 \beta,$$

sobald  $\mu$  hinreichend groß. Bei  $Z_6$  bedienen wir uns der Abschätzung <sup>40)</sup>

$$|\Im_\mu^{(d)}(\cos \tau)| \leq c_3 \sin^{-(\delta+1)} \frac{\tau}{2} \sin^{-\frac{n}{2}} \tau \mu^{\frac{n}{2}-\delta} + c_4 \sin^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)} \frac{\tau}{2} \sin^{-\frac{n}{2}} \tau \mu^{-1};$$

wir erhalten unter Heranziehung von (33)

$$|Z_6| < c_3 \mu^{\frac{n}{2}-\delta} \int_{\frac{1}{\mu}}^{\varepsilon} |\chi(\tau)| \tau^{\frac{n}{2}-\delta-1} d\tau + c_4 \mu^{-1} \int_{\frac{1}{\mu}}^{\varepsilon} |\chi(\tau)| \tau^{-2} d\tau,$$

ferner mit Rücksicht auf (35) durch Teilintegrationen

$$\begin{aligned} |Z_6| &< c_3 \mu^{\frac{n}{2}-\delta} \left\{ \tau^{\frac{n}{2}-\delta} \Phi(\tau) \Big|_{\tau=\frac{1}{\mu}}^{\tau=\varepsilon} + \left( \delta + 1 - \frac{n}{2} \right) \int_{\frac{1}{\mu}}^{\varepsilon} \Phi(\tau) \tau^{\frac{n}{2}-\delta-1} d\tau \right\} \\ &\quad + c_4 \mu^{-1} \left\{ \tau^{-1} \Phi(\tau) \Big|_{\tau=\frac{1}{\mu}}^{\tau=\varepsilon} + 2 \int_{\frac{1}{\mu}}^{\varepsilon} \Phi(\tau) \tau^{-2} d\tau \right\} \\ &< c_5 (\mu \varepsilon)^{\frac{n}{2}-\delta} \Phi(\varepsilon) + c_5 \Phi\left(\frac{1}{\mu}\right) + c_7 (\mu \varepsilon)^{\frac{n}{2}-\delta} \beta + c_7 \beta \\ &\quad + c_8 (\mu \varepsilon)^{-1} \Phi(\varepsilon) + c_8 \Phi\left(\frac{1}{\mu}\right) + c_9 (\mu \varepsilon)^{-1} \beta + c_9 \beta < c_9 \beta \end{aligned}$$

<sup>39)</sup> Kogbetliantz <sup>9)</sup>, S. 134.

<sup>40)</sup> Kogbetliantz <sup>9)</sup>, S. 129.

für hinlänglich große  $\mu$ . Damit ist (39) und also wegen (37) und (38) auch (36) nachgewiesen, und es kommt folgender Satz zustande:

Ist  $\delta \geq n$ , so streben unter der Bedingung (28) die  $(C, \delta)$ -Mittel der Reihe  $\mathfrak{Q}$  einer auf  $K$  absolut integrierbaren Funktion  $f(Q)$  an der Stelle  $P$  dem Werte  $\mathfrak{F}$  zu. Dasselbe gilt sogar auch für  $\frac{n}{2} < \delta < n$ , wenn zu den vorstehenden Bedingungen die weitere hinzutritt, daß das Integral (22) vorhanden ist.

Bei der Anwendung des Satzes auf die Reihen  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{B}$ , also auf den Fall  $f(Q) = F(\Omega)$  nehmen wir an, daß, wenn  $\mathfrak{R}_\epsilon$  im  $\mathfrak{R}_{n+1}$  eine ganz in  $\mathfrak{R}$  gelegene  $n$ -stufige Überkugel um  $\mathfrak{P}$  mit dem Halbmesser  $\epsilon$  und  $\mathfrak{I}_\epsilon$  ihr Rauminhalt ist,

$$(40) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mathfrak{I}_\epsilon} \int_{\mathfrak{U}_\epsilon}^{(n)} |F(\Omega) - \mathfrak{F}| dy = 0$$

ist. Nun ist

$$(41) \quad \int_{K_\epsilon}^{(n+1)} |f(Q) - \mathfrak{F}| d\omega \leq 2\pi \int_{\mathfrak{R}_\epsilon}^{(n)} |F(\Omega) - \mathfrak{F}| dy.$$

Bei der Annahme  $0 \leq \gamma \leq \epsilon$  leitet man nämlich aus (24) für das Quadrat des Abstandes  $A = \mathfrak{P}\Omega$

$$A^2 = \sum_{h=1}^{1,n} (x_h - y_h)^2 = r^2 - 2r\delta \cos \zeta + \delta^2$$

leicht her, daß

$$2(1 - \cos \gamma) - A^2 \geq 0, \quad 0 \leq A \leq 2 \sin \frac{\gamma}{2} \leq 2 \sin \frac{\epsilon}{2}$$

ist. Hieraus folgt

$$\int_{K_\epsilon}^{(n+1)} |f(Q) - \mathfrak{F}| d\omega \leq \int_{A \leq 2 \sin \frac{\epsilon}{2}}^{(n+1)} |F(\Omega) - \mathfrak{F}| d\omega \leq 2\pi \int_{\mathfrak{R}_\epsilon}^{(n)} |F(\Omega) - \mathfrak{F}| dy.$$

Gilt also (40), so nach (41) auch (28) und mithin der Satz<sup>41)</sup>:

Ist  $\delta \geq n$  bzw.  $\delta \geq n + s - 1$ , so streben unter der Bedingung (40) die  $(C, \delta)$ -Mittel der Didonschen bzw. Appellschen Reihen einer in  $\mathfrak{R}$  absolut integrierbaren Funktion  $F(\Omega)$  an der Stelle  $\mathfrak{P}$  dem Werte  $\mathfrak{F}$  zu. Dasselbe gilt sogar auch für  $\frac{n}{2} < \delta < n$  bzw.  $\frac{n+s-1}{2} < \delta < n + s - 1$ , wenn zu den vorstehenden Bedingungen die weitere hinzutritt, daß das Integral (26) bzw. (27) vorhanden ist.

<sup>41)</sup> Man leitet aus (27), (40) leicht die den Annahmen (26), (40) entsprechenden Bedingungen für Didonsche Reihen von  $n + s - 1$  Veränderlichen<sup>40)</sup> her.



# Über den Zusammenhang zwischen Abelscher und Borelscher Summabilität.

Von

Gustav Doetsch in Stuttgart.

Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , deren Partialsummen  $a_0 + \dots + a_n$  mit  $s_n$  bezeichnet seien, heißt nach dem *Abelschen* (oder auch *Poissonschen*) *Verfahren* summierbar (*A*-summabel) zum Werte  $l$ , falls die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  für  $|x| < 1$  konvergent ist und die dargestellte Funktion  $g(x)$  einen Grenzwert  $l$  hat, wenn  $x$  durch reelle Werte von links gegen 1 strebt. Sie heißt nach dem *Borelschen Verfahren* summierbar (*B*-summabel) zum Werte  $l$ , falls  $\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{t^n}{n!} = F(t)$  eine ganze transzendente Funktion ist und  $\Phi(t) = e^{-t} F(t)$  den Grenzwert  $l$  hat, wenn  $t$  durch positive Werte gegen  $\infty$  strebt. Es gibt Reihen, die zwar *B*-, aber nicht *A*-summabel sind (z. B.  $a_n = (-2)^n$ ), und umgekehrt (z. B.  $a_n = (-1)^n n$  für  $n = k^3$ , sonst 0). Im folgenden sollen Bedingungen angegeben werden, unter denen man von der einen Summierungsmöglichkeit auf die andere schließen kann.

## § 1.

### Abelsche und Borelsche Summabilität.

In diesem Paragraphen werden die  $a_n$  als *reell* vorausgesetzt.

Satz 1. Ist die Reihe  $\sum_0^{\infty} a_n$  *B*-summabel zur Summe  $l$  und  $\sum_0^{\infty} a_n x^n$  für  $|x| < 1$  konvergent, so ist die Reihe auch *A*-summabel zur gleichen Summe.

Vorbemerkungen. 1. Die zweite Voraussetzung kann auch in die Form einer direkten Bedingung für die  $a_n$  gekleidet werden:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1,$$

oder auch: von einer Stelle  $n_0 = n_0(\delta)$  an ist für jedes  $\delta > 0$

$$|a_n| < (1 + \delta)^n.$$

2. Wenn  $\sum_0^\infty a_n x^n$  für  $|x| < 1$  konvergiert, so gilt dasselbe für

$\sum_0^\infty s_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_0^\infty a_n x^n$ . Hieraus folgt aber, daß  $\sum_0^\infty s_n \frac{t^n}{n!}$  überall konvergiert, also eine ganze transzendente Funktion ist, so daß diese für die Anwendbarkeit des Borelschen Verfahrens notwendige Voraussetzung von selbst erfüllt ist.

Beweis. Wir wollen zunächst zu der Funktion  $\Phi(t)$  die Laplace-Transformierte<sup>1)</sup>

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} \Phi(t) dt = \mathfrak{L}(\Phi)$$

berechnen, die für  $s > 0$  sicher existiert, da  $\Phi$  für  $t \rightarrow \infty$  einen Grenzwert hat, also beschränkt bleibt. Es ist

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-(s+1)t} \sum_0^\infty s_n \frac{t^n}{n!} dt = \sum_0^\infty \frac{s_n}{n!} \int_0^\infty e^{-(s+1)t} t^n dt = \sum_0^\infty \frac{s_n}{(s+1)^{n+1}},$$

da nämlich für  $s > 0$  die sich ergebende Reihe absolut konvergiert (vgl. Vorbemerkung 2) und deshalb die Vertauschung von Summe und Integral gerechtfertigt werden kann<sup>2)</sup>. Nun benutzen wir folgende Eigenschaft der Laplace-Transformation<sup>3)</sup>:

Hilfssatz 1. Existiert das Laplace-Integral der Funktion  $\Phi$  für jedes  $s > 0$  und gilt<sup>4)</sup>

$$\Phi(t) \sim A t^{\alpha-1} \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad (A \text{ beliebig, } \alpha > 0),$$

so ist

$$\mathfrak{L}(\Phi) = \varphi(s) \sim A \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \quad \text{für } s \rightarrow 0.$$

Nach der Voraussetzung unseres zu beweisenden Satzes 1 ist  $\Phi(t) \rightarrow l$  für  $t \rightarrow \infty$ ; Hilfssatz 1 mit  $\alpha = 1$  liefert also:

$$\varphi(s) \sim \frac{l}{s} \quad \text{für } s \rightarrow 0,$$

<sup>1)</sup> Die Integrale sind entweder als eigentliche Lebesguesche oder als absolut konvergente uneigentliche Riemannsche anzusehen.

<sup>2)</sup> Bromwich, An introduction to the theory of infinite series. Second edition, London 1926, S. 500.

<sup>3)</sup> G. Doetsch, Sätze von Tauberschem Charakter im Gebiet der Laplace- und Stieltjes-Transformation, Sitzungsber. d. preuß. Akad., Phys.-math. Kl. 1930, S. 144–157 [S. 145].

<sup>4)</sup>  $\Phi(t) \sim A \Psi(t)$  bedeutet:  $\frac{\Phi}{\Psi} \rightarrow A$ . Im Falle  $A = 0$  ist also zu lesen:  $\Phi(t) = o(\Psi)$ .

d. h.

$$s \sum_0^{\infty} \frac{s_n}{(s+1)^{n+1}} \rightarrow l \quad \text{für } s \rightarrow 0.$$

Setzen wir

$$\frac{1}{s+1} = x, \quad \text{also } s = \frac{1-x}{x},$$

so steht da:

$$\frac{1-x}{x} \sum_0^{\infty} s_n x^{n+1} = (1-x) \sum_0^{\infty} s_n x^n = \sum_0^{\infty} a_n x^n \rightarrow l \quad \text{für } x \rightarrow 1,$$

d. h.  $\sum_0^{\infty} a_n$  ist  $A$ -summabel.

Satz 2. Ist die Reihe  $\sum_0^{\infty} a_n$   $A$ -summabel zur Summe  $l$  und ist  $\sum_0^{\infty} a_{n+1} \frac{t^n}{n!} = O_L\left(\frac{e^t}{t}\right)$ , so ist die Reihe auch  $B$ -summabel zur gleichen Summe<sup>4a)</sup>.

Beweis. Da  $\sum_0^{\infty} a_n x^n$  und damit auch  $\sum_0^{\infty} s_n x^n$  für  $|x| < 1$  konvergiert, so ist  $\sum_0^{\infty} s_n \frac{t^n}{n!}$  eine ganze transzendente Funktion. Wir bilden die Ableitung von  $\Phi(t) = e^{-t} \sum_0^{\infty} s_n \frac{t^n}{n!}$ :

$$\Phi'(t) = -e^{-t} \sum_0^{\infty} s_n \frac{t^n}{n!} + e^{-t} \sum_1^{\infty} s_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-t} \sum_0^{\infty} a_{n+1} \frac{t^n}{n!}.$$

Da nach Vorbemerkung 1 S. 403 für ein festes  $\delta > 0$  von einer Stelle an  $|a_n| < (1+\delta)^n$ , also durchweg  $|a_n| < K(1+\delta)^n$ , wo  $K > 0$  von  $\delta$  abhängt, gilt, so ist  $\sum_0^{\infty} a_{n+1} \frac{t^n}{n!} = O(e^{(1+\delta)t})$ . Folglich konvergiert das Laplace-Integral  $\mathfrak{L}(\Phi')$  für jedes  $s > 0$ , und das gleiche gilt daher<sup>5)</sup> auch für  $\mathfrak{L}(\Phi) = \varphi$ . Ferner schließen wir aus  $\sum_0^{\infty} a_n x^n \rightarrow l$  für  $x \rightarrow 1$ , daß  $s \sum_0^{\infty} \frac{s_n}{(s+1)^{n+1}}$  für  $s \rightarrow 0$  gilt, indem wir die Deduktion bei Satz 1 rückwärts durchlaufen. Das bedeutet aber (vgl. wieder beim Beweis von Satz 1):  $\varphi(s) \sim \frac{l}{s}$ . Nun machen wir Gebrauch von folgendem<sup>6)</sup>

<sup>4a)</sup> Die Abkürzung  $U(t) = O_L(V(t))$  mit positiver Funktion  $V(t)$  bedeutet in üblicher Weise  $U(t) > -cV(t)$ , wo  $c$  irgendeine positive Konstante ist.

<sup>5)</sup> G. Doetsch, Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus, Math. Annalen 89 (1923), S. 192–207 [S. 198].

<sup>6)</sup> Hilfssatz 2 ist ein Korollar (siehe loc. cit. 5), S. 148) des später zu benutzenden Hilfssatzes 3, der für den oben benötigten Spezialfall von mir (Ein Konvergenzkriterium für Integrale, Math. Annalen 82 (1920), S. 68–82), allgemein von Hardy und

(Fortsetzung der Fußnote 5) auf nächster Seite.)

Hilfssatz 2.  $\Phi(t)$  sei für  $t \geq 0$  differenzierbar und das Laplace-Integral für  $\Phi'(t)$  existiere für jedes  $s > 0$ . Ist

$$\mathfrak{L}(\Phi) = \varphi(s) \sim A s^{-(\alpha+1)} \quad \text{für } s \rightarrow 0 \quad (A \text{ beliebig, } \alpha \geq 0)$$

und

$$\Phi'(t) = O_L(t^{\alpha-1}),$$

so gilt

$$\Phi(t) \sim \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind mit  $\alpha = 0$  für die Funktion  $\Phi(t) = e^{-t} \sum s_n \frac{t^n}{n!}$  sämtlich erfüllt, also folgt

$$\Phi(t) \rightarrow l \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Bemerkung. Die Funktion  $\sum_0^\infty a_{n+1} \frac{t^n}{n!}$  spielt gerade eine Rolle bei einer anderen Definition der Borelschen Summabilität, die so lautet: Eine Reihe  $\sum_0^\infty b_n$  heißt  $B'$ -summabel zur Summe  $l'$ , wenn  $\sum_0^\infty b_n \frac{t^n}{n!} = G(t)$  eine ganze transzendente Funktion ist und  $\int_0^\infty e^{-t} G(t) dt$  konvergiert und den Wert  $l'$  hat. Die beiden Methoden sind nicht ganz äquivalent, sondern hängen so zusammen<sup>7)</sup>: Das Tilgen eines Gliedes kann die Borelsche Summierbarkeit der Reihe zerstören; jedoch ist, falls  $a_0 + a_1 + \dots$   $B$ -summabel zur Summe  $l$  ist, die verstümmelte Reihe  $a_1 + a_2 + \dots$   $B'$ -summabel zur Summe  $l - a_0$ , und umgekehrt. Unser Satz 2 hat also die  $B'$ -Summabilität von  $a_1 + a_2 + \dots$  bewiesen. Bildet man für diese Reihe die Funktion  $G(t)$ , so erhält man gerade  $\sum_0^\infty a_{n+1} \frac{t^n}{n!}$ . Da die Abelsche Summabilität durch Tilgung eines Gliedes nicht gestört wird, so kann man den Satz 2 auch so aussprechen: Ist  $\sum_0^\infty b_n$   $A$ -summabel und  $\sum_0^\infty b_n \frac{t^n}{n!} = O_L\left(\frac{e^t}{t}\right)$ , so ist die Reihe auch  $B'$ -summabel.

Littlewood (Notes on the theory of series (XI): On Tauberian theorems, Proc. of the Lond. math. soc. (2) 30 (1929), S. 23–37) bewiesen wurde. Sätze dieser Art (sogenannte Taubersche  $O_L$ -Theoreme) konnte man früher nur mit den von Hardy und Littlewood geschaffenen, sehr komplizierten Methoden beweisen. Vor kurzem hat nun J. Karamata eine äußerst einfache Beweismethode entdeckt und zunächst für Potenzreihen in einem Spezialfall dargestellt (Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 319, 320). Eine Arbeit von Karamata, die auch die obigen allgemeineren Sätze über die Laplace-Transformation erfaßt, erscheint demnächst im Journal f. d. reine u. angew. Math.

<sup>7)</sup> G. H. Hardy, Researches in the theory of divergent series and divergent integrals, The Quarterly Journal of pure and appl. math. 35 (1904), S. 22–66 [S. 34].

Daß man in der Voraussetzung des Satzes 1 die  $B$ -Summabilität ohne weiteres durch die  $B'$ -Summabilität ersetzen kann, ist evident. Denn wenn  $a_0 + a_1 + \dots$   $B'$ -summabel ist, so ist  $0 + a_0 + a_1 + \dots$   $B$ -summabel. Die Abelsche Summe dieser Reihe stimmt aber mit der von  $a_0 + a_1 + \dots$  überein.

Die Sätze 1 und 2 zeigen: Wenn eine Reihe  $B$ -summabel ist und überhaupt prinzipiell die Möglichkeit zur Anwendung des  $A$ -Verfahrens vorliegt, so ist die Reihe sicher  $A$ -summabel. Aber nicht umgekehrt: Ist die Reihe  $A$ -summabel (womit die prinzipielle Möglichkeit der Anwendung des  $B$ -Verfahrens gegeben ist), so kann man auf ihre  $B$ -Summabilität nur schließen, wenn eine gewisse Zusatzbedingung erfüllt ist.

## § 2.

### Funktionentheoretische Anwendungen.

Will man die Sätze 1 und 2 auf Reihen mit *komplexen* Gliedern anwenden, so braucht man diese nur in ihre reellen und imaginären Bestandteile zerlegt zu denken.

#### I. Potenzreihen.

Das Funktionselement  $\sum_0^{\infty} a_n x^n = \sum_0^{\infty} a_n e^{n i \theta} r^n$  habe den Konvergenzradius 1. Ist die dadurch erzeugte Funktion in einem Punkte  $e^{i \theta}$  des Einheitskreises regulär, so ist die Potenzreihe dort sowohl nach Abel als nach Borel summierbar ( $e^{i \theta}$  liegt dann im Innern des Borelschen Summabilitätspolygons). Ist der Punkt aber ein singulärer, so braucht weder das eine noch das andere der Fall zu sein. Satz 1 sagt nun aus: Ist die Potenzreihe in einem Punkte des Konvergenzkreises  $B$ -summabel, so existiert sicher der Abelsche radiale Limes, d. h. wenn dieser nicht existiert, so kann die Reihe auch nicht nach Borel summiert werden. Aus Satz 2 dagegen folgt: Existiert in dem (singulären) Punkte  $e^{i \theta}$  der Abelsche Limes und ist  $\sum_1^{\infty} \Re(a_n e^{n i \theta}) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = O_L\left(\frac{e^t}{t}\right)$  und  $\sum_1^{\infty} \Im(a_n e^{n i \theta}) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = O_L\left(\frac{e^t}{t}\right)$ , so ist die Potenzreihe in dem Punkte  $e^{i \theta}$   $B$ -summabel.

#### II. Dirichletsche Reihen.

Wir betrachten eine Dirichletsche Reihe vom Typus  $\sum_1^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ , deren Koeffizienten für ein gewisses reelles  $\mu$  der Bedingung genügen:  $c_n = O(n^\mu)$ , so daß sie ein Konvergenzgebiet besitzt. Für solche Reihen hat Hardy<sup>a)</sup>

<sup>a)</sup> G. H. Hardy, a) The application to Dirichlet's series of Borel's exponential method of summation, Proc. of the Lond. math. soc. (2) 8 (1910), S. 277–294; b) The application of Abel's method of summation to Dirichlet's series, The Quarterly Journal of pure and appl. math. 47 (1916), S. 176–192.

festgestellt, daß der Bereich der  $A$ - und der  $B$ -Summabilität je eine Halbebene  $\Re s > \gamma$  ist (die natürlich in die ganze Ebene ausarten kann).

Bei ihnen ist immer  $\sum_1^{\infty} \frac{c_n}{n^s} x^{n-1}$  für jedes beliebige, aber feste  $s$  im

Kreise  $|x| < 1$  konvergent. Aus Satz 1 folgt also, daß bei den betrachteten Reihen die  $B$ -Summabilität in einem Punkte  $s$  unweigerlich die  $A$ -Summabilität nach sich zieht; für diese Reihen ist also die Abelsche Methode potenter, die  $B$ -Summabilitäts-Halbebene ist in der  $A$ -Summabilitäts-Halbebene enthalten. Ein Beispiel, wo sie wirklich ein echtes Teilgebiet ausmacht, läßt sich aus den Hardyschen Untersuchungen entnehmen. Hardy hat gezeigt<sup>9)</sup>, daß die Dirichletsche Reihe mit den Koeffizienten

$$c_n = (-1)^{n-1} \quad \text{für } n = k^3, \text{ sonst } 0,$$

also  $\frac{1}{1^s} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - \frac{1}{8^s} + 0 + 0 + \dots$ , die übrigens die Funktion  $(1 - 2^{1-3s}) \zeta(3s)$  darstellt, nur dort  $B$ -summabel ist, wo sie konvergiert, d. h. für  $\Re s > 0$ , während sie für  $\Re s > -\frac{k}{3}$  Cesàro-summabel  $k$ -ter Ordnung ist. Da aber die Cesàrosche Summabilität bekanntlich die Abelsche involviert, so ist die Reihe in der ganzen Ebene  $A$ -summabel.

— Dagegen ist die Reihe  $0 + \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s}$ , die die Funktion  $(1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$  darstellt, in der ganzen Ebene  $B$ -summabel, wie Hardy an derselben Stelle bewiesen hat. Man kann dies aber auch aus Satz 2 schließen, denn die Reihe ist, wie schon Bohr<sup>10)</sup> zeigte, für  $\Re s > -k$  Cesàro-summabel  $k$ -ter Ordnung, also in der ganzen Ebene  $A$ -summabel. Betrachten wir die Dirichletsche Reihe in einem reellen Punkte  $s = -p$ , wo  $p$  eine positive ganze Zahl ist, so hat die in Satz 2 zu bildende Summe

$\sum_0^{\infty} a_{n+1} \frac{t^n}{n!}$  hier den Wert  $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} n^p \frac{t^n}{n!}$ . Nun ist aber

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} n \frac{t^n}{n!} = -t \frac{d}{dt} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} = -t \frac{d}{dt} e^{-t} = t e^{-t},$$

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 \frac{t^n}{n!} = t \frac{d}{dt} \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} n \frac{t^n}{n!} = t \frac{d}{dt} (t e^{-t}) = t(1-t) e^{-t}$$

usw., also

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} n^p \frac{t^n}{n!} = g_p(t) e^{-t},$$

<sup>9)</sup> loc. cit. \*) a).

<sup>10)</sup> H. Bohr, Bidrag til de Dirichlet'ske Rækkers Theori, Dissertation Kopenhagen 1910, S. 78.

wo  $g_p(t)$  ein Polynom  $p$ -ten Grades ist. Diese Funktion ist sogar  $O(t^\nu e^{-t})$ , woraus nach Satz 2 die  $B$ -Summabilität für  $s = -p$  folgt. Da aber  $p$  beliebig groß sein kann und die Reihe, wenn in  $-p$ , so auch für  $\Re s > -p$   $B$ -summabel ist, so ergibt sich die  $B$ -Summabilität in der ganzen Ebene.

Betrachten wir noch das Beispiel  $0 + \sum_1^\infty n^{-s} = 0 + \zeta(s)$ . Für diese Reihe ist  $\sum_0^\infty a_n x^n = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^s} = f(x, s)$ . Die Funktion  $f(x, s)$  hat bei  $x = 1$  eine Singularität, und zwar ergibt sich ihr Verhalten aus der von Mellin und Lindelöf<sup>11)</sup> gegebenen Darstellung

$$f(x, s) = \Gamma(1-s) \lg \left( \frac{1}{x} \right)^{s-1} + \sum_{\nu=0}^\infty \zeta(s-\nu) \frac{(\lg x)^\nu}{\nu!},$$

die für alle komplexen  $s$  außer  $s = 1, 2, \dots$  gültig ist. Man ersieht aus ihr, daß die Reihe  $0 + \sum_1^\infty n^{-s}$  sich nur für  $\Re s > 1$ , wo sie auch konvergiert, nach Abel summieren läßt. Nach der oben gezogenen Folgerung aus Satz 1 reicht die Kraft der Borelschen Methode auch nicht weiter. — Hat man umgekehrt zuerst bewiesen, daß  $0 + \sum_1^\infty n^{-s}$  auf der Geraden  $\Re s = 1$  nicht  $B$ -summierbar ist<sup>12)</sup>, so zeigt Satz 2, daß hier auch die Abelsche Methode versagt, denn bei dieser Reihe ist für  $s = 1 + i\tau$

$$\sum_0^\infty a_{n+1} \frac{t^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{1}{(n+1)^{1+i\tau}} \frac{t^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{t^n}{(n+1)!} n^{-i\tau},$$

also

$$\left| \sum_0^\infty a_{n+1} \frac{t^n}{n!} \right| \leq \sum_0^\infty \frac{t^n}{(n+1)!} < \sum_0^\infty \frac{t^{n-1}}{n!} = \frac{e^t}{t},$$

so daß aus der  $A$ -Summabilität auch die  $B$ -Summabilität folgen würde.

### § 3.

#### Abelsche und $(B-C, k)$ -Summabilität.

Die folgenden Sätze werden Verallgemeinerungen der vorigen sein und sich auf eine Summierungsmethode beziehen, die ich in meiner Dissertation durch Verschmelzung der Borelschen mit der Cesàroschen gewonnen habe<sup>13)</sup>, und die sich folgendermaßen definieren läßt: Ist  $\Phi(t) = e^{-t} \sum_0^\infty s_n \frac{t^n}{n!}$  eine

<sup>11)</sup> E. Lindelöf, Le calcul des résidus (Collection Borel). Paris 1905, S. 139.

<sup>12)</sup> Siehe Hardy, loc. cit. \*) a).

<sup>13)</sup> G. Doetsch, Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen. Dissertation Göttingen 1920.



ganze transzendente Funktion und  $k$  eine feste reelle Zahl  $> 0$ , so betrachten wir den „Mittelwert“

$$\mu_k(t) = \begin{cases} k t^{-k} \int_0^t \Phi(\tau) (t-\tau)^{k-1} d\tau & \text{für } t > 0 \\ \Phi(0) & \text{für } t = 0, \end{cases}$$

der sich für ganzzahliges  $k$  bekanntlich durch ein  $k$ -fach iteriertes Integral ausdrücken läßt. Ergänzend setzen wir für  $k = 0$

$$\mu_0(t) = \Phi(t).$$

Hat  $\mu_k(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  einen Grenzwert  $l$ , so heißt die Reihe  $(B-C, k)$ -summabel zum Werte  $l$ <sup>14</sup>). Die  $(B-C, 0)$ -Methode ist identisch mit der Borelschen. Ist  $\mu_k(t)$  einseitig beschränkt, so heißt die Reihe einseitig  $(B-C, k)$ -beschränkt.

Satz 1a. Ist die Reihe  $\sum_0^\infty a_n$   $(B-C, k)$ -summabel zur Summe  $l$  ( $k \geq 0$ ) und konvergiert  $\sum_0^\infty a_n x^n$  für  $|x| < 1$ , so ist die Reihe auch  $A$ -summabel zur gleichen Summe.

Beweis. Den Fall  $k = 0$  können wir ausschalten, da er durch Satz 1 erledigt ist. — Wir betrachten das „Faltungsintegral“

$$\sigma_k(t) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^t \Phi(\tau) (t-\tau)^{k-1} d\tau$$

und bilden seine Laplace-Transformierte, die für  $s > 0$  existiert, weil, wie sich aus der Voraussetzung ergibt,  $\sigma_k(t) = O(t^k)$  ist. Nach einem in der Theorie der Laplace-Transformation oft benutzten Satz<sup>15</sup>) ist

$$\mathfrak{L}(\sigma_k) = \frac{1}{\Gamma(k)} \mathfrak{L}(\Phi) \cdot \mathfrak{L}(t^{k-1}),$$

vorausgesetzt, daß die beiden Faktoren rechts existieren. Bei  $\mathfrak{L}(t^{k-1}) = \frac{\Gamma(k)}{s^k}$  ist das für  $s > 0$  der Fall, aber auch bei  $\mathfrak{L}(\Phi)$ , denn wegen der Konvergenz von  $\sum_0^\infty a_n x^n$  und damit von  $\sum_0^\infty s_n x^n$  für  $|x| < 1$  ist  $\sum_0^\infty s_n \frac{t^n}{n!} = O(e^{(1+\delta)t})$  für jedes  $\delta > 0$  (vgl. S. 405). Nun ist aber wie S. 404  $\mathfrak{L}(\Phi) = \sum_0^\infty \frac{s_n}{(s+1)^{n+1}}$  für  $s > 0$ , also

$$\mathfrak{L}(\sigma_k) = s^{-k} \sum_0^\infty \frac{s_n}{(s+1)^{n+1}}.$$

<sup>14</sup>) Wie loc. cit. <sup>13</sup>) gezeigt wird, ist damit gleichbedeutend, daß die  $k$ -ten Cesàro-Mittel einen Borelschen Grenzwert haben.

<sup>15</sup>) Vgl. loc. cit. <sup>3</sup>).

Wir wenden jetzt unseren Hilfssatz 1 auf die Funktion  $\sigma_k(t)$  an. Aus der Voraussetzung

$$\sigma_k(t) \sim \frac{l}{\Gamma(k+1)} t^k \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

folgt dann

$$\mathfrak{L}(\sigma_k) \sim l s^{-(k+1)} \quad \text{für } s \rightarrow 0,$$

d. h.

$$s \sum_0^\infty \frac{s_n}{(s+1)^{n+1}} \rightarrow l \quad \text{für } s \rightarrow 0.$$

Nach S. 405 bedeutet das aber:  $\sum_0^\infty a_n x^n \rightarrow l$  für  $x \rightarrow 1$ .

Für Potenzreihen besagt dieser Satz, daß in einem singulären Punkte des Konvergenzkreises auch die  $(B-C, k)$ -Methode nur dann zu einer Summe führen kann, wenn der Abelsche radiale Limes existiert.

**Satz 2a.** Ist die Reihe  $\sum_0^\infty a_n$   $A$ -summabel zur Summe  $l$  und einseitig  $(B-C, k)$ -beschränkt ( $k \geq 0$ ), so ist sie  $(B-C, k+1)$ -summabel zur gleichen Summe.

**Beweis.** Zunächst schließen wir wie bei Satz 1a, daß  $\mathfrak{L}(\Phi)$  für  $s > 0$  existiert und gleich  $\sum_0^\infty \frac{s_n}{(s+1)^{n+1}}$  ist, woraus für  $k > 0$  folgt, daß auch  $\mathfrak{L}(\sigma_k)$  für  $s > 0$  existiert und gleich  $\frac{1}{\Gamma(k)} \mathfrak{L}(\Phi) \cdot \mathfrak{L}(t^{k-1}) = s^{-k} \sum_0^\infty \frac{s_n}{(s+1)^{n+1}}$  ist. Da aber  $\sum_0^\infty a_n x^n \rightarrow l$  für  $x \rightarrow 1$  und daher  $s \sum_0^\infty \frac{s_n}{(s+1)^{n+1}} \rightarrow l$  für  $s \rightarrow 0$  ist, so ergibt sich:

$$\mathfrak{L}(\sigma_k) \sim l s^{-(k+1)} \quad \text{für } s \rightarrow 0.$$

Weiterhin ist  $\mu_k(t) = O_L(1)$ , also

$$\sigma_k = O_L(t^k).$$

Im Falle  $k=0$  ist  $\mathfrak{L}(\Phi) \sim l s^{-1}$  für  $s \rightarrow 0$  und  $\Phi(t) = O_L(1)$ . Nun stützen wir uns auf folgenden<sup>19)</sup>

**Hilfssatz 3.** Das Laplace-Integral der Funktion  $\Psi(t)$  existiere für jedes  $s > 0$ . Ist

$$\mathfrak{L}(\Psi) \sim A s^{-\alpha} \quad \text{für } s \rightarrow 0 \quad (A \text{ beliebig, } \alpha \geq 0)$$

und

$$\Psi(t) = O_L(t^{\alpha-1}),$$

so gilt

$$\int_0^t \Psi(\tau) d\tau \sim \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

<sup>19)</sup> Vgl. Anm. 9).

Dieser Satz ergibt, mit  $\alpha = k + 1$  auf  $\sigma_k$  angewendet ( $k > 0$ ):

$$\int_0^t \sigma_k(\tau) d\tau \sim \frac{l}{\Gamma(k+2)} t^{k+1} \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

und im Falle  $k = 0$ , mit  $\alpha = 1$  auf  $\Phi$  angewendet:

$$\int_0^t \Phi(\tau) d\tau \sim \frac{l}{\Gamma(2)} t \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Nun ist aber für  $k > 0$ <sup>17)</sup>:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma_k(\tau) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^t \int_0^\tau \Phi(z) (\tau - z)^{k-1} dz d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^t \Phi(z) (t - z)^k dz = \sigma_{k+1}(t) \end{aligned}$$

und für  $k = 0$ :

$$\int_0^t \Phi(\tau) d\tau = \sigma_1(t).$$

Also läßt sich das obige Ergebnis so schreiben ( $k \geq 0$ ):

$$\sigma_{k+1}(t) \sim \frac{l}{\Gamma(k+2)} t^{k+1} \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

d. h.

$$\mu_{k+1}(t) \rightarrow l \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Bemerkungen. 1. Für die  $(B-C, k)$ -Summabilität gilt, wie früher<sup>18)</sup> gezeigt wurde, der Satz: Ist eine Reihe einseitig  $(B-C, k)$ -beschränkt und überhaupt von irgendeiner Ordnung  $q$   $(B-C, q)$ -summabel, so ist sie  $(B-C, k+1)$ -summabel. Der neue Satz 2a zeigt, daß die Voraussetzung „von irgendeiner Ordnung  $(B-C, q)$ -summabel“ ersetzt werden kann durch die Voraussetzung „ $A$ -summabel“.

2. Indem man den Satz 2a für  $k = 0$  aufschreibt und ihn dann statt auf die Folge  $s_n$  auf deren  $k$ -tes Cesàrosches Mittel anwendet, sieht man leicht, daß in der Voraussetzung von Satz 2a an die Stelle der  $A$ -Summabilität die  $(A-C, k)$ -Summabilität treten darf, die durch Verschmelzung

<sup>17)</sup> Unter Benutzung der Faltungssymbolik  $\int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau = F_1 * F_2$  ergibt sich diese Umformung übersichtlich so:

$$(\Phi * t^{k-1}) * 1 = \Phi * (t^{k-1} * 1) = \Phi * \frac{t^k}{k}.$$

<sup>18)</sup> loc. cit. <sup>19)</sup> S. 41.

der Abelschen und der Cesàroschen Methode entsteht und von A. Zygmund<sup>19)</sup> näher studiert worden ist.

3. Der Satz 2a gibt auch für  $k=0$  gegenüber Satz 2 etwas Neues. Das kommt daher, daß wir jetzt den Hilfssatz 3, früher dagegen den Hilfssatz 2 angewandt haben. Natürlich könnte auch Hilfssatz 2 zur Ableitung eines allgemeinen Satzes benutzt werden, doch fällt dessen Wortlaut nicht so prägnant aus wie der des Satzes 2a.

#### § 4.

##### Verallgemeinerungen.

Die bei dem Abelschen und Borelschen Summationsverfahren benutzten Ausdrücke  $g(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_0^{\infty} s_n x^n$  und  $\Phi(t) = e^{-t} \sum_0^{\infty} s_n \frac{t^n}{n!}$  stellen lineare Transformationen der Reihe  $\sum a_n$  oder der Folge  $s_n$  dar, durch welche der von der ganzzahligen Variablen  $n$  abhängigen Funktion  $s_n$  die Funktion  $g(x)$  bzw.  $\Phi(t)$  zugeordnet wird. Man kann daher  $g(x)$  und  $\Phi(t)$  als Abel- und Borel-Transformierte von  $s_n$  bezeichnen. In der Summabilitätstheorie handelt es sich um den Fall, daß diese Transformaten für  $x \rightarrow 1$  bzw.  $t \rightarrow \infty$  Grenzwerte besitzen. Vom Standpunkt der Funktionalanalysis, d. h. der allgemeinen Theorie der Funktionaltransformationen, ist dies ein ganz spezieller Fall. Mindestens ebenso interessant ist es, die Transformaten mit gewissen einfachen Funktionen, wie z. B. den Potenzen, in Vergleich zu setzen<sup>20)</sup>, woraus Verallgemeinerungen der in den Paragraphen 1 und 3 bewiesenen Sätze resultieren. Wir wollen uns darauf beschränken, die Verallgemeinerungen der Sätze 1 und 2 anzugeben, die analog wie diese selbst aus den Hilfssätzen 1 und 2 abgeleitet werden können, indem man diese nicht wie vorhin nur für spezielle Fälle, sondern in ihrer Allgemeinheit ausnutzt.

Satz 1b. Besteht für die Borel-Transformierte  $\Phi(t)$  einer Reihe die Vergleichsrelation

$$\Phi(t) \sim l t^x \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad (x > -1),$$

so gilt für ihre Abel-Transformierte

$$g(x) \sim \Gamma(x+1) \frac{l}{(1-x)^{x+1}}.$$

Bemerkungen. 1. Man sieht, wie zufällig der Umstand ist, daß die Abelsche und die Borelsche Summe, falls sie existieren ( $x=0$ ), gleich sind.

<sup>19)</sup> A. Zygmund, Über einige Sätze aus der Theorie der divergenten Reihen, Bull. de l'Acad. polon. des sc. et des lettres, classe des sc. math. et nat., sér. A, 1927, S. 309–331 [S. 320 f.].

<sup>20)</sup> Vgl. loc. cit. <sup>9)</sup> S. 144, Anm. 2.

2. Wie aus einem Ergebnis von Pincherle<sup>21)</sup> zu entnehmen ist, gilt der Hilfssatz 1 sogar für alle reellen  $\alpha$ , die weder 0 noch eine negative ganze Zahl sind. Dementsprechend ist der Satz 1b richtig für alle reellen  $\alpha$ , die keine negative ganze Zahl sind.

3. Für negative  $\alpha$  ist der Satz 1b eine Verschärfung von Satz 1.

Satz 2b. *Besteht für die in  $|x| < 1$  als konvergent vorausgesetzte Abel-Transformierte einer Reihe die Vergleichsrelation*

$$g(x) \sim \frac{1}{(1-x)^\alpha} \quad \text{für } x \rightarrow 1 \quad (\alpha \geq 0),$$

*so gilt für ihre Borel-Transformierte*

$$\Phi(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

*falls*

$$\Phi'(t) = e^{-t} \sum_0^\infty a_{n+1} \frac{t^n}{n!} = O_L(t^{\alpha-1})$$

*ist.*

<sup>21)</sup> S. Pincherle, Sur les fonctions déterminantes, Ann. scientif. de l'Éc. Norm. sup. (3) 22 (1905), S. 9—68 [S. 20, 21].

(Eingegangen am 20. 9. 1930.)

# Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

A. Kolmogoroff in Moskau.

---

## Zusammenfassung.

Ein physikalischer Prozeß (die Änderung eines physikalischen Systems) heißt stochastisch-definit, wenn aus der Kenntnis des Zustandes  $X_0$  des Systems in einem gewissen Zeitmoment  $t_0$  die Kenntnis der Verteilungsfunktion der Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Zustände  $X$  des Systems in einem Zeitmoment  $t > t_0$  folgt.

Der Verfasser betrachtet systematisch die einfachsten Fälle der stochastisch-definiten Prozesse und in erster Linie solche, die nach der Zeit stetig sind (darin besteht die wesentliche Neuheit der Methode: Bis jetzt betrachtete man gewöhnlich einen stochastischen Prozeß als eine Reihe von diskreten „Ereignissen“).

Wenn die Menge  $\mathfrak{M}$  der möglichen verschiedenen Zustände des Systems endlich ist, so läßt sich der stochastisch-definite Prozeß durch gewöhnliche lineare Differentialgleichungen charakterisieren (Kap. II). Wenn der Zustand des Systems durch einen oder mehrere stetige Parameter definiert ist, so wird der analytische Apparat durch parabolische partielle Differentialgleichungen gegeben (Kap. IV). Man kommt dabei zu verschiedenen Verteilungsfunktionen, unter denen die Laplacesche Normalverteilung als natürlicher einfachster Fall erscheint.

## Einleitung.

### I.

Wenn man Natur- oder Sozialereignisse mathematisch behandeln will, muß man zuerst diese Ereignisse *schematisieren*; man kann nämlich die mathematische Analysis zur Betrachtung eines Änderungsprozesses eines Systems nur dann anwenden, wenn man voraussetzt, daß jeder mögliche Zustand dieses Systems sich mit Hilfe eines bestimmten mathematischen Apparats vollständig beschreiben läßt, z. B. durch die Werte einer bestimmten Anzahl von Parametern; ein solches mathematisch-definier-

bares System ist überhaupt nicht die Wirklichkeit selbst, sondern nur ein *Schema*, welches zur Beschreibung der Wirklichkeit dienen kann.

Die klassische Mechanik gebraucht nur solche Schemata, in welchen der Zustand  $y$  des Systems in einem Zeitmoment  $t$  durch den Zustand  $x$  in einem beliebigen vorigen Moment  $t_0$  eindeutig definiert ist; der mathematische Ausdruck dieser Tatsache ist durch die Formel

$$y = f(x, t_0, t)$$

gegeben. Wenn eine solche eindeutige Funktion  $f$  existiert, wie es immer in der klassischen Mechanik vorausgesetzt wird, so sagen wir, daß unser Schema ein *Schema eines wohldeterminierten Prozesses* ist. Man könnte überdies noch solche Prozesse als wohldeterminierte hinzulassen, in welchen der Zustand  $y$  durch den Zustand  $x$  in einem einzigen Zeitmoment  $t$  nicht vollständig definiert ist, sondern von der Art der Änderung des Zustandes  $x$  vor dem Augenblick  $t$  wesentlich abhängt. Aber man zieht gewöhnlich vor, diese Abhängigkeit von der Vorgeschichte des Systems dadurch zu vermeiden, daß man den Begriff des Zustandes des Systems im Zeitmoment  $t$  erweitert und dementsprechend neue Parameter einführt<sup>1)</sup>.

Außerhalb des Gebietes der klassischen Mechanik betrachtet man oft neben den Schemata der wohldeterminierten Prozesse solche Schemata, in welchen der Zustand  $x$  des Systems in einem Zeitmoment  $t_0$  nur eine gewisse Wahrscheinlichkeit für den jeweils möglichen Zustand  $y$  in einem folgenden Moment  $t > t_0$  definiert. Wenn bei beliebig gegebenen  $t_0$ ,  $t > t_0$  und  $x$  eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion für die Zustände  $y$  existiert, so sagen wir, daß unser Schema ein *Schema eines stochastisch-definiten Prozesses* ist. Im allgemeinen Falle wird diese Verteilungsfunktion in der Form

$$P(t_0, x, t, \mathfrak{E})$$

gegeben, wobei  $\mathfrak{E}$  eine Menge von Zuständen  $y$  ist und  $P$  die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, einen Zustand  $y$  aus dieser Menge im Moment  $t$  zu erhalten. Dabei erhebt sich eine Schwierigkeit, welche darin besteht, daß es allgemein unmöglich ist, diese Wahrscheinlichkeit für alle Mengen  $\mathfrak{E}$  zu definieren. Eine strenge Definition des stochastisch-definiten Prozesses, welche diese Schwierigkeit vermeidet, ist im § 1 gegeben.

Man könnte auch hier, wie im Falle der wohldeterminierten Prozesse noch solche Schemata betrachten, in welchen die Wahrscheinlichkeit  $P$  von der ganzen Vorgeschichte des Systems und nicht nur von dem Zustande  $x$

<sup>1)</sup> Ein wohlbekanntes Beispiel für diese Methode wird dadurch gegeben, daß man in der Beschreibung des Zustandes eines mechanischen Systems nicht nur die Koordinaten seiner Punkte, sondern auch die Komponenten ihrer Geschwindigkeiten einführt.



wesentlich abhängt. Man kann aber diesen Einfluß der Vorgeschichte mit Hilfe derselben Methoden vermeiden wie im Falle der wohl determinierten Schemata.

Es sei noch bemerkt, daß die Möglichkeit bei der Behandlung irgendeines reellen Prozesses die Schemata der wohl determinierten oder nur stochastisch-definiten Prozesse anzuwenden, in keinem Zusammenhang mit der Frage steht, ob dieser wirkliche Prozeß selbst determiniert oder zufällig sei.

## II.

Man untersucht gewöhnlich in der Wahrscheinlichkeitstheorie nur solche Schemata, in welchen die Änderungen des Systems nur in den Zeitmomenten einer diskreten Folge  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  stattfinden. Bachelier<sup>2)</sup> war unseres Wissens der erste, welcher systematisch Schemata untersuchte, in denen die Wahrscheinlichkeiten  $P(t_0, x, t, \mathfrak{E})$  mit der Zeit  $t$  sich stetig ändern. Auf die Fälle, welche von Bachelier untersucht wurden, werden wir im § 16 und in der Schlußbemerkung zurückkommen. Es sei hier nur noch erwähnt, daß die Bachelierschen Betrachtungen jeder mathematischen Strenge gänzlich entbehren.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir vom zweiten Kapitel an hauptsächlich die oben erwähnten nach der Zeit stetigen Schemata. Mathematisch hat man dabei den großen Vorteil, daß man für  $P$  Differentialgleichungen nach der Zeit einführen kann und dann die einfachen analytischen Formeln erhält, welche in der gewöhnlichen Theorie nur als asymptotische Formeln auftreten. Was die Anwendungen betrifft, so kann man erstens die neuen Schemata unmittelbar auf die realen Prozesse anwenden, zweitens aus den Lösungen der Differentialgleichungen der nach der Zeit stetigen Prozesse neue asymptotische Formeln für diskrete Schemata ableiten, wie es im § 12 gezeigt wird.

## III.

Wir gehen nicht von einem vollständigen Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitstheorie aus, geben aber schon jetzt alle Voraussetzungen an, welche weiter gebraucht werden. Über die Menge  $\mathfrak{A}$  von möglichen Zuständen  $x$  machen wir keine speziellen Voraussetzungen: mathematisch kann man  $\mathfrak{A}$  als eine beliebige Menge von beliebigen Elementen betrachten. Alle Voraussetzungen über das Mengensystem  $\mathfrak{X}$  und die Funktion  $P(t_0, x, t, \mathfrak{E})$  sind in § 1 gegeben. Weiter entwickelt sich die ganze Theorie als eine reinmathematische.

<sup>2)</sup> I. Théorie de la spéculation. Ann. de l'École norm. 17 (1900), p. 21.

II. Les probabilités à plusieurs variables, ibid. 27 (1910), p. 339.

III. Calcul des probabilités 1912.

## Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel. Allgemeine Betrachtungen.	Seite
§ 1. Allgemeines Schema des stochastisch-definiten Prozesses .	418
§ 2. Der Operator $F_1(x, \mathfrak{E}) * F_2(x, \mathfrak{E})$ . . . . .	421
§ 3. Klassifikation der Spezialfälle . . . . .	422
§ 4. Das Ergodenprinzip . . . . .	424
Zweites Kapitel. Endliche Systeme von Zuständen.	
§ 5. Einleitende Betrachtungen . . . . .	427
§ 6. Differentialgleichungen des kontinuierlichen stochastischen Prozesses . . . . .	428
§ 7. Beispiele . . . . .	431
Drittes Kapitel. Abzählbare Systeme von Zuständen.	
§ 8. Einleitende Betrachtungen, diskrete Schemata . . . . .	433
§ 9. Differentialgleichungen des nach der Zeit kontinuierlichen Prozesses . . . . .	435
§ 10. Eindeutigkeit und Berechnung der Lösungen im nach der Zeit homogenen Falle . . . . .	436
Viertes Kapitel. Kontinuierliche Systeme von Zuständen, einpara- metriger Fall.	
§ 11. Einleitende Betrachtungen . . . . .	438
§ 12. Die Lindebergsche Methode. Übergang von den diskreten zu den kontinuierlichen Schemata . . . . .	441
§ 13. Die erste Differentialgleichung für die nach der Zeit kon- tinuierlichen Prozesse . . . . .	445
§ 14. Die zweite Differentialgleichung . . . . .	448
§ 15. Fragestellungen über Eindeutigkeit und Existenz der Lösungen für die zweite Differentialgleichung . . . . .	451
§ 16. Der Bacheliersche Fall . . . . .	452
§ 17. Eine Transformation . . . . .	453
§ 18. Die stabilen Verteilungsfunktionen . . . . .	455
§ 19. Andere Möglichkeiten . . . . .	456
Schlußbemerkung . . . . .	458

## Erstes Kapitel.

## Allgemeine Betrachtungen.

## § 1.

## Allgemeines Schema des stochastisch-definiten Prozesses.

Es sei  $\mathfrak{S}$  ein System, welches sich in den Zuständen  $x, y, z, \dots$  befinden kann, und  $\mathfrak{F}$  ein System der Mengen  $\mathfrak{E}$  der Zustände  $x, y, z, \dots$ ;

wir sagen, daß der Prozeß der Veränderung des Systems  $\mathfrak{S}$  stochastisch-definit in bezug auf  $\mathfrak{F}$  ist, wenn bei beliebiger Wahl des Zustandes  $x$ , der Menge  $\mathfrak{E}$  und der Zeitmomente  $t_1$  und  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) die Wahrscheinlichkeit  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ , daß — unter der Hypothese des Zustandes  $x$  in dem Zeitmoment  $t_1$  — einer der Zustände aus  $\mathfrak{E}$  im Zeitmoment  $t_2$  stattfindet, bestimmt ist. Wenn die Wahrscheinlichkeit  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$  nur für  $t_2 > t_1 \geq t_0$  bestimmt ist, so sagen wir, daß der Prozeß der Veränderung für  $t \geq t_0$  stochastisch definit ist.

Was das System  $\mathfrak{F}$  betrifft, so setzen wir voraus, daß es erstens additiv ist (d. h. alle Differenzen sowie die endlichen und abzählbaren Summen seiner Elemente enthält), zweitens die leere Menge, die Menge  $\mathfrak{A}$  aller möglichen Zustände  $x, y, z, \dots$  und alle aus je einem Element bestehenden Mengen  $\mathfrak{E}$  enthält. Wenn die Menge  $\mathfrak{A}$  endlich oder abzählbar ist, so besteht offensichtlich  $\mathfrak{F}$  aus allen Untermengen von  $\mathfrak{A}$ . Aber in dem wichtigsten Fall einer nicht abzählbaren Menge  $\mathfrak{A}$  ist die Voraussetzung, daß  $\mathfrak{F}$  alle Untermengen von  $\mathfrak{A}$  umfaßt, in keinem bis jetzt bekannten wohldefinierten Schema erfüllt.

Wir setzen natürlich voraus, daß

$$(1) \quad P(t_1, x, t_2, \mathfrak{A}) = 1$$

und für die leere Menge  $\mathfrak{R}$

$$P(t_1, x, t_2, \mathfrak{R}) = 0$$

ist. Ferner wird vorausgesetzt, daß  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$  als Funktion der Menge  $\mathfrak{E}$  additiv ist, d. h. für jede Zerlegung der Menge  $\mathfrak{E}$  in endlich oder abzählbar vielen disjunkte Summanden  $\mathfrak{E}_n$

$$(2) \quad \sum_n P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E}_n) = P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$$

gilt. Um weitere wichtigere Voraussetzungen über  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$  zu formulieren, bedürfen wir des Begriffs der Meßbarkeit der Funktion  $f(x)$  in bezug auf das System  $\mathfrak{F}$  und der Definition des abstrakten Stieltjesschen Integrals. Wir wollen diese Begriffe in einer Form darstellen, welche unseren Zwecken angepaßt ist<sup>a)</sup>.

Man nennt die Funktion  $f(x)$  meßbar, in bezug auf das System  $\mathfrak{F}$ , wenn bei jeder Wahl der reellen Zahlen  $a$  und  $b$  die Menge  $\mathfrak{E}$  ( $a < f(x) < b$ ) derjenigen  $x$ , für welche  $f(x)$  der eingeklammerten Ungleichung genügt, zum System  $\mathfrak{F}$  gehört. Man zeigt leicht, daß, wenn das System  $\mathfrak{F}$  additiv und  $f(x)$  in bezug auf  $\mathfrak{F}$  meßbar ist, auch die Menge  $\mathfrak{E}$  derjenigen  $x$ ,

<sup>a)</sup> Über diese Begriffe sowie über die additiven Mengensysteme usw. siehe z. B.: M. Fréchet, Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait, Bull. de la Soc. Math. de France 43 (1915), p. 248.

für welche  $f(x)$  einer im Borelschen Sinne meßbaren Menge gehört, im System  $\mathfrak{F}$  vorkommt.

Es sei nun  $f(x)$  in bezug auf das System  $\mathfrak{F}$  meßbar und beschränkt und  $\varphi(\mathfrak{E})$  eine auf  $\mathfrak{F}$  definierte, nicht-negative und additive Mengenfunktion; bekanntlich konvergiert sodann die Summe

$$\sum_m \frac{m}{n} \varphi \left( \frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m+1}{n} \right)$$

mit  $n \rightarrow \infty$  gegen einen festen Limes. Dieser Limes soll das *Integral*

$$\int_{\mathfrak{A}} f(x) \varphi(d\mathfrak{A})$$

genannt werden. Letztere Bezeichnung weicht von der allgemein gebräuchlichen nur dadurch ab, daß die Integrationsvariable speziell bezeichnet ist und das Differentialzeichen eingeklammert ist.

Es wird im folgenden vorausgesetzt, daß  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$  als Funktion des Zustandes  $x$  in bezug auf das System  $\mathfrak{F}$  meßbar ist.  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$  soll endlich für beliebige  $t_1, t_2, t_3$  ( $t_1 < t_2 < t_3$ ) der *fundamentalen Gleichung*

$$(3) \quad P(t_1, x, t_3, \mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{A}_y} P(t_2, y, t_3, \mathfrak{E}) P(t_1, x, t_2, d\mathfrak{A})$$

genügen. Wenn die Menge  $\mathfrak{A}$  aus endlich oder abzählbar vielen Elementen  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  besteht, so ist

$$\int_{\mathfrak{A}_y} P(t_2, y, t_3, \mathfrak{E}) P(t_1, x, t_2, d\mathfrak{A}) = \sum_n P(t_2, x_n, t_3, \mathfrak{E}) P(t_1, x, t_2, x_n),$$

und rechts steht die volle Wahrscheinlichkeit  $P(t_1, x, t_3, \mathfrak{E})$ , damit ist in diesem Falle die Formel (3) bewiesen. Wenn aber  $\mathfrak{A}$  un abzählbar ist, nehmen wir die Relation (3) als ein neues Axiom an.

Die bis jetzt ausgesprochenen Forderungen charakterisieren vollständig den Begriff des stochastisch-definiten Prozesses: die Elemente  $x, y, z, \dots$  einer beliebigen Menge  $\mathfrak{A}$  können als Merkmale der Zustände eines Systems, und eine beliebige Funktion  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$ , die den erwähnten Forderungen genügt, als die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion betrachtet werden.

Wir nennen die nicht-negative Funktion  $F(\mathfrak{E})$ , welche über das System  $\mathfrak{F}$  definiert und additiv ist, und überdies der Gleichung

$$(4) \quad F(\mathfrak{A}) = 1$$

genügt, die *normale Verteilungsfunktion*. Alle Forderungen bezüglich  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$  können wir jetzt folgendermaßen aussprechen:  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$  ist als Funktion von  $\mathfrak{E}$  eine normale Verteilungsfunktion, als Funktion

von  $x$  in bezug auf das System  $\mathfrak{F}$  meßbar und genügt endlich der Integralgleichung (3).

Es sei nun für ein Zeitmoment  $t = t_0$  eine normale Verteilungsfunktion  $Q(t_0, \mathfrak{E})$  für die Wahrscheinlichkeit, daß das System  $\mathfrak{S}$  sich im Moment  $t_0$  im Zustande aus  $\mathfrak{E}$  befindet. Um die Verteilungsfunktion  $Q(t, \mathfrak{E})$  für die Zeitmomente  $t > t_0$  zu definieren, bedienen wir uns der zweiten Fundamentalgleichung

$$(5) \quad Q(t, \mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{N}_x} P(t_0, x, t, \mathfrak{E}) Q(t_0, d\mathfrak{X}).$$

Man hat offenbar

$$(6) \quad Q(t, \mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}} Q(t_0, d\mathfrak{X}) = Q(t_0, \mathfrak{A}) = 1,$$

$$\begin{aligned} (7) \quad & \int_{\mathfrak{N}_x} P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E}) Q(t_1, d\mathfrak{X}) \\ &= \int_{\mathfrak{N}_x} P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E}) \int_{\mathfrak{N}_y} P(t_0, y, t_1, d\mathfrak{X}) Q(t_0, d\mathfrak{X}') \\ &= \int_{\mathfrak{N}_y} \int_{\mathfrak{N}_x} P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E}) P(t_0, y, t_1, d\mathfrak{X}) Q(t_0, d\mathfrak{X}') \\ &= \int_{\mathfrak{N}_y} P(t_0, y, t_2, \mathfrak{E}) Q(t_0, d\mathfrak{X}') = Q(t_2, \mathfrak{E}). \end{aligned}$$

Wir betrachten die Formel (5) als Definition von  $Q(t, \mathfrak{E})$  und nicht als eine neue Forderung bezüglich des Systems  $\mathfrak{S}$ ; es sei jedoch bemerkt, daß (5) die Relation (3) als Spezialfall enthält.

## § 2.

### Der Operator $F_1(x, \mathfrak{E}) * F_2(x, \mathfrak{E})$ .

Es seien  $F_1(x, \mathfrak{E})$  und  $F_2(x, \mathfrak{E})$  zwei normale Verteilungsfunktionen, welche als Funktionen von  $x$  in bezug auf das System  $\mathfrak{F}$  meßbar sind. Wir setzen dann

$$(8) \quad F(x, \mathfrak{E}) = F_1(x, \mathfrak{E}) * F_2(x, \mathfrak{E}) = F_1 * F_2(x, \mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{N}_y} F_2(y, \mathfrak{E}) F_1(x, d\mathfrak{X}');$$

wie leicht ersichtlich, genügt  $F(x, \mathfrak{E})$  denselben Bedingungen über Meßbarkeit und Additivität wie  $F_1(x, \mathfrak{E})$  und  $F_2(x, \mathfrak{E})$ ; die Gleichung (4) ist ebenfalls erfüllt:

$$F(x, \mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{N}_y} F_2(y, \mathfrak{A}) F_1(x, d\mathfrak{X}') = \int_{\mathfrak{N}_y} F_1(x, d\mathfrak{X}') = 1;$$

folglich ist auch  $F(x, \mathfrak{E})$  eine normale Verteilungsfunktion.

Ferner genügt der Operator  $F_1 * F_2$  dem assoziativen Gesetze

$$(9) \quad F_1 * (F_2 * F_3) = (F_1 * F_2) * F_3,$$

wie man aus der folgenden leichten Rechnung schließt:

$$\begin{aligned} F_1 * (F_2 * F_3)(x, \mathfrak{E}) &= \int_{\mathfrak{N}_y} \int_{\mathfrak{N}_z} F_3(z, \mathfrak{E}) F_2(y, d\mathfrak{A}') F_1(x, d\mathfrak{A}) \\ &= \int_{\mathfrak{N}_z} F_3(z, \mathfrak{E}) \int_{\mathfrak{N}_y} F_2(y, d\mathfrak{A}') F_1(x, d\mathfrak{A}) = (F_1 * F_2) * F_3(x, \mathfrak{E}). \end{aligned}$$

Dagegen gilt das Kommutativgesetz für unseren Operator im allgemeinen nicht.

Wir wollen jetzt eine solche *Einheitsfunktion*  $\mu(x, \mathfrak{E})$  definieren, welche für eine beliebige  $F(x, \mathfrak{E})$  der Gleichung

$$(10) \quad \mu * F(x, \mathfrak{E}) = F * \mu(x, \mathfrak{E}) = F(x, \mathfrak{E})$$

genügt.

Es ist zu diesem Zweck hinreichend,  $\mu(x, \mathfrak{E}) = 1$ , wenn  $\mathfrak{E}$  den Zustand  $x$  enthält, und  $\mu(x, \mathfrak{E}) = 0$  im entgegengesetzten Fall zu setzen; es ist dann in der Tat

$$\begin{aligned} \mu * F(x, \mathfrak{E}) &= \int_{\mathfrak{N}_y} F(y, \mathfrak{E}) \mu(x, d\mathfrak{A}) = F(x, \mathfrak{E}), \\ F * \mu(x, \mathfrak{E}) &= \int_{\mathfrak{N}_y} \mu(y, \mathfrak{E}) F(x, d\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{E}} F(x, d\mathfrak{E}) = F(x, \mathfrak{E}). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$  war bis jetzt nur für  $t_2 > t_1$  definiert; wir setzen nun für jedes  $t$

$$(11) \quad P(t, x, t, \mathfrak{E}) = \mu(x, \mathfrak{E}).$$

Diese neue Definition widerspricht wegen (10) der fundamentalen Gleichung (3) nicht, da man dieselbe in der Form

$$(12) \quad P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E}) * P(t_2, x, t_3, \mathfrak{E}) = P(t_1, x, t_3, \mathfrak{E})$$

schreiben kann.

### § 3.

#### Klassifikation der Spezialfälle.

Wenn die Änderungen des Zustandes des Systems  $\mathfrak{S}$  nur in den Zeitmomenten einer diskreten Folge

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots \rightarrow +\infty$$

stattfinden, so ist offenbar

$$(13) \quad P(t', x, t'', \mathfrak{E}) = P(t_m, x, t_n, \mathfrak{E})$$

für alle Zeitmomente  $t'$  und  $t''$ , welche die Ungleichungen

$$t_m \leq t' < t_{m+1}, \quad t_n \leq t'' < t_{n+1}$$

erfüllen. Setzt man

$$(14) \quad P(t_n, x, t_n, \mathfrak{E}) = P_{nn}(x, \mathfrak{E}),$$

$$(15) \quad P_{n-1,n}(x, \mathfrak{E}) = P_n(x, \mathfrak{E}),$$

so ist

$$(16) \quad P_{mn}(x, \mathfrak{E}) = P_{m+1} * P_{m+2} * \dots * P_n(x, \mathfrak{E}).$$

Folglich ist in diesem Falle der Prozeß der Veränderung des Systems  $\mathfrak{E}$  durch die elementaren Verteilungsfunktionen  $P_n(x, \mathfrak{E})$  vollständig definiert.

Es seien  $P_1(x, \mathfrak{E}), P_2(x, \mathfrak{E}), \dots, P_n(x, \mathfrak{E}), \dots$  willkürliche normale Verteilungsfunktionen, welche als Funktionen von  $x$  meßbar sind, und  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$  eine Folge der Zeitmomente; wenn man  $P_{mn}(x, \mathfrak{E})$  und  $P(t', x, t'', \mathfrak{E})$  durch (16), (14) und (13) definiert, so erhält man die ebenfalls normalen Verteilungsfunktionen, welche den Gleichungen

$$(17) \quad P_{mn}(x, \mathfrak{E}) * P_{np}(x, \mathfrak{E}) = P_{mp}(x, \mathfrak{E}), \quad m < n < p,$$

und folglich auch der Gleichung

$$P(t', x, t'', \mathfrak{E}) * P(t'', x, t''', \mathfrak{E}) = P(t', x, t''', \mathfrak{E}), \quad t' < t'' < t''',$$

genügen; die letzte Gleichung ist aber nichts anderes als die Fundamentalgleichung (12) oder (3). So sieht man, daß willkürliche normale Verteilungsfunktionen  $P_n(x, \mathfrak{E})$ , wenn sie nur als Funktionen von  $x$  meßbar sind, einen stochastisch-definiten Prozeß charakterisieren.

Nur die oben definierten *Schemata mit diskreter Zeit* betrachtet man gewöhnlich in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wenn alle Verteilungsfunktionen  $P_n(x, \mathfrak{E})$  identisch sind:

$$(18) \quad P_n(x, \mathfrak{E}) = P(x, \mathfrak{E}),$$

so haben wir ein *homogenes Schema mit diskreter Zeit*; in diesem Falle erhält man wegen (16)

$$(19) \quad P_{n, n+p}(x, \mathfrak{E}) = \underbrace{P(x, \mathfrak{E}) * P(x, \mathfrak{E}) * \dots * P(x, \mathfrak{E})}_{p\text{-mal}} \\ = [P(x, \mathfrak{E})]_*^p = P^p(x, \mathfrak{E}).$$

Schon 1900 hat L. Bachelier die nach der Zeit kontinuierlichen stochastischen Prozesse betrachtet<sup>4)</sup>, und es bestehen alle Gründe dafür, daß die *Schemata mit kontinuierlicher Zeit* eine zentrale Stellung in der Wahrscheinlichkeitstheorie erhalten sollen. Die wichtigsten sind hier die *nach der Zeit homogenen Schemata*, in welchem  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$  nur von der Differenz  $t_2 - t_1$  abhängt:

$$(20) \quad P(t, x, t + \tau, \mathfrak{E}) = P(\tau, x, \mathfrak{E}).$$

<sup>4)</sup> Siehe <sup>2)</sup> I.



Die Fundamentalgleichung schreibt man in diesem Falle so:

$$(21) \quad P(\tau_1, x, \mathfrak{E}) * P(\tau_2, x, \mathfrak{E}) = P(\tau_1 + \tau_2, x, \mathfrak{E}).$$

Eine andere Reihe von Spezialfällen erhalten wir mit der Spezialisierung der Menge  $\mathfrak{M}$  der elementaren Zustände  $x$ . Man unterscheidet hier die Fälle der endlichen oder abzählbaren Mengen  $\mathfrak{M}$ ; im kontinuierlichen Falle wird nach der Zahl der den Zustand des Systems charakterisierenden Parameter unterschieden usw. Auf diesen Unterscheidungen beruht die Einteilung des weiteren Stoffes.

#### § 4.

##### Das Ergodenprinzip.

Ohne Spezialisierung der Menge  $\mathfrak{M}$  aller möglichen Zustände  $x$  können wir nur wenige allgemeine Sätze beweisen, nämlich die Sätze über das Ergodenprinzip. Man sagt, daß ein stochastisch-definitiver Prozeß dem *Ergodenprinzip* gehorcht, wenn für beliebige  $t^{(0)}$ ,  $x$ ,  $y$  und  $\mathfrak{E}$

$$(22a) \quad \lim [P(t^{(0)}, x, t, \mathfrak{E}) - P(t^{(0)}, y, t, \mathfrak{E})] = 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

gilt. Für das Schema mit diskreter Zeit ist (22a) mit

$$(22b) \quad \lim [P_{mn}(x, \mathfrak{E}) - P_{mn}(y, \mathfrak{E})] = 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

offensichtlich äquivalent; in diesem Falle gilt der folgende

**Satz I.** Wenn für beliebige  $x$ ,  $y$  und  $\mathfrak{E}$

$$(23) \quad P_n(x, \mathfrak{E}) \geq \lambda_n P_n(y, \mathfrak{E}), \quad \lambda_n \geq 0,$$

ist und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

divergiert, so ist das Ergodenprinzip (22b) erfüllt und die Konvergenz von (22b) gleichmäßig in  $x$ ,  $y$ ,  $\mathfrak{E}$ .

**Beweis.** Es sei

$$\sup [P_{kn}(x, \mathfrak{E})] = M_{kn}(\mathfrak{E}),$$

$$\inf [P_{kn}(x, \mathfrak{E})] = m_{kn}(\mathfrak{E}).$$

Man hat offenbar für  $i < k$

$$(25) \quad P_{in}(x, \mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{M}_y} P_{kn}(y, \mathfrak{E}) P_{ik}(x, d\mathfrak{M}) \leq M_{kn}(\mathfrak{E}) \int_{\mathfrak{M}_y} P_{ik}(x, d\mathfrak{M}) = M_{kn}(\mathfrak{E})$$

und in analoger Weise

$$(26) \quad P_{in}(x, \mathfrak{E}) \geq m_{kn}(\mathfrak{E}).$$

Für beliebige  $x$  und  $y$  hat man wegen (23)

$$P_k(x, \mathbb{E}) - \lambda_k P_k(y, \mathbb{E}) \geq 0,$$

$$\begin{aligned} P_{k-1,n}(x, \mathbb{E}) &= \int_{\mathbb{R}_x} P_{kn}(z, \mathbb{E}) P_k(x, d\mathbb{A}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_x} P_{kn}(z, \mathbb{E}) [P_k(x, d\mathbb{A}) - \lambda_k P_k(y, d\mathbb{A})] + \lambda_k \int_{\mathbb{R}_x} P_{kn}(z, \mathbb{E}) P_k(y, d\mathbb{A}) \\ &\geq m_{kn}(\mathbb{E}) \int_{\mathbb{R}_x} [P_k(x, d\mathbb{A}) - \lambda_k P_k(y, d\mathbb{A})] + \lambda_k P_{k-1,n}(y, \mathbb{E}) \\ &= m_{kn}(\mathbb{E}) (1 - \lambda_k) + \lambda_k P_{k-1,n}(y, \mathbb{E}), \end{aligned}$$

$$P_{k-1,n}(y, \mathbb{E}) - P_{k-1,n}(x, \mathbb{E}) \leq (1 - \lambda_k) [P_{k-1,n}(y, \mathbb{E}) - m_{kn}(\mathbb{E})]$$

und wegen (25)

$$(27) \quad P_{k-1,n}(y, \mathbb{E}) - P_{k-1,n}(x, \mathbb{E}) \leq (1 - \lambda_k) [M_{kn}(\mathbb{E}) - m_{kn}(\mathbb{E})].$$

Da (27) für beliebige  $x$  und  $y$  gilt, ist auch

$$(28) \quad M_{k-1,n}(\mathbb{E}) - m_{k-1,n}(\mathbb{E}) \leq (1 - \lambda_k) [M_{kn}(\mathbb{E}) - m_{kn}(\mathbb{E})].$$

Setzt man in (28)  $k = m+1, m+2, \dots, n$ , so erhält man nach Multiplikation der so gewonnenen Ungleichungen

$$(29) \quad M_{mn}(\mathbb{E}) - m_{mn}(\mathbb{E}) \leq \prod_{k=m+1}^{k=n} (1 - \lambda_k).$$

Die rechte Seite von (29) konvergiert mit  $n \rightarrow \infty$  gegen Null, und damit ist unser Satz bewiesen.

In dem homogenen Falle mit diskreter Zeit gilt folgender

Satz II. Wenn für beliebige  $x, y$  und  $\mathbb{E}$

$$(30) \quad P(x, \mathbb{E}) \geq \lambda P(y, \mathbb{E}), \quad \lambda > 0,$$

ist, konvergiert  $P^n(x, \mathbb{E})$  gleichmäßig gegen eine feste Verteilungsfunktion  $Q(\mathbb{E})$ .

Beweis. Im gegenwärtigen Falle ist

$$M_{n,n+p}(\mathbb{E}) = \sup [P^p(x, \mathbb{E})] = M_p(\mathbb{E}),$$

$$m_{n,n+p}(\mathbb{E}) = \inf [P^p(x, \mathbb{E})] = m_p(\mathbb{E}),$$

$$\lambda_n = \lambda$$

und wegen (29)

$$(31) \quad M_p(\mathbb{E}) - m_p(\mathbb{E}) \leq (1 - \lambda)^p.$$

Da wegen (25) und (26) für  $q > p$  die Formeln

$$(32) \quad P^q(x, \mathbb{E}) = P_{0,q}(x, \mathbb{E}) \leq M_{q-p,q}(\mathbb{E}) = M_p(\mathbb{E}),$$

$$(33) \quad P^q(x, \mathbb{E}) \geq m_p(\mathbb{E})$$

gelten, so ist

$$(34) \quad M_p(\mathfrak{E}) \geq M_q(\mathfrak{E}) \geq m_q(\mathfrak{E}) \geq m_p(\mathfrak{E}).$$

Aus (31) und (34) folgt unmittelbar unser Satz.

Wichtige Spezialfälle des Satzes II wurden von Hostinsky und Hadamard bewiesen<sup>5)</sup>. Die Verteilungsfunktion  $Q(\mathfrak{E})$  genügt, wie in den erwähnten Spezialfällen Hadamard gezeigt hat, der Integralgleichung

$$(35) \quad Q(\mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{N}_x} P(x, \mathfrak{E}) Q(d\mathfrak{N}).$$

In dem Falle des allgemeinsten stochastisch-definiten Schema gilt  
Satz III. Wenn für eine Folge

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots \rightarrow +\infty$$

und beliebige  $x, y$  und  $\mathfrak{E}$

$$(36) \quad P(t_{n-1}, x, t_n, \mathfrak{E}) \geq \lambda_n P(t_{n-1}, y, t_n, \mathfrak{E}), \quad \lambda_n \geq 0,$$

ist, und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

divergiert, so ist das Ergodenprinzip (22a) erfüllt und die Konvergenz von (22a) gleichmäßig in  $x, y, \mathfrak{E}$ .

Beweis. Es sei bei festem  $t^{(0)}$

$$\sup [P(t^{(0)}, x, t, \mathfrak{E})] = M(t, \mathfrak{E}),$$

$$\inf [P(t^{(0)}, x, t, \mathfrak{E})] = m(t, \mathfrak{E}).$$

Wenn

$$t^{(0)} \leq t_m \leq t_n \leq t < t_{n+1}$$

ist, erhält man wie beim Beweis des Satzes I als Analogon zu (29) die Formel

$$(37) \quad M(t, \mathfrak{E}) - m(t, \mathfrak{E}) \leq \prod_{k=m+1}^{k=n} (1 - \lambda_k).$$

Da  $n$  mit  $t$  unendlich groß wird, konvergiert die Differenz  $M(t, \mathfrak{E}) - m(t, \mathfrak{E})$  mit  $t$  gegen Null, womit unser Satz bewiesen ist.

Im Falle des nach der Zeit homogenen Schemas gilt endlich der dem Satz II analoge

Satz IV. Wenn es ein solches  $\sigma$  gibt, das für beliebige  $x, y, \mathfrak{E}$

$$(37) \quad P(\sigma, x, \mathfrak{E}) \geq \lambda P(\sigma, y, \mathfrak{E}), \quad \lambda > 0,$$

ist, konvergiert  $P(\tau, x, \mathfrak{E})$  mit  $\tau \rightarrow +\infty$  gleichmäßig gegen eine feste Verteilungsfunktion  $Q(\mathfrak{E})$ .

<sup>5)</sup> Comptes rendus 186 (1928), S. 59, 189, 275.

## Zweites Kapitel. Endliche Systeme von Zuständen.

### § 5.

#### Einleitende Betrachtungen.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Menge  $\mathfrak{A}$  aus endlich vielen Elementen

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

besteht. In diesem Falle setzt man

$$(38) \quad P(t_1, x_i, t_2, x_j) = P_{ij}(t_1, t_2).$$

Da offenbar für eine beliebige Menge  $\mathfrak{E}$

$$(39) \quad P(t_1, x_i, t_2, \mathfrak{E}) = \sum_{x_k \in \mathfrak{E}} P_{ik}(t_1, t_2)$$

ist, braucht man nur die Wahrscheinlichkeiten  $P_{ij}(t_1, t_2)$  zu betrachten. Die Fundamentalgleichung (3) erhält sodann die Gestalt

$$(40) \quad \sum_j P_{ij}(t_1, t_2) P_{jk}(t_2, t_3) = P_{ik}(t_1, t_3),$$

während die Gleichung (1) die Form

$$(41) \quad \sum_j P_{ij}(t_1, t_2) = 1$$

bekommt. Beliebige nicht-negative Funktionen  $P_{ij}(t_1, t_2)$ , welche (40) und (41) genügen, definieren einen stochastisch-definiten Prozeß der Veränderung des Systems  $\mathfrak{S}$ .

Man definiert jetzt den Operator  $*$  folgendermaßen:

$$(42) \quad F_{ik} = F_{ik}^{(1)} * F_{ik}^{(2)} = \sum_j F_{ij}^{(1)} F_{jk}^{(2)},$$

wodurch die Fundamentalgleichung (40) sich in

$$(43) \quad P_{ik}(t_1, t_2) * P_{ik}(t_2, t_3) = P_{ik}(t_1, t_3)$$

verwandelt.

Im Falle des Schemas mit diskreter Zeit setzt man

$$P_{pq}(x_i, x_j) = P_{ij}^{(p,q)}, \quad P_p(x_i, x_j) = P_{ij}^{(p)}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten  $P_{ij}^{(p)}$  genügen dabei der Gleichung

$$(44) \quad \sum_j P_{ij}^{(p)} = 1,$$

umgekehrt, wenn willkürliche nicht-negative Größen  $P_{ij}^{(p)}$  die letzte Gleichung erfüllen, können diese Größen als die entsprechenden Wahrscheinlichkeitswerte in einem stochastisch-definiten Prozesse betrachtet werden. Die Wahrscheinlichkeiten  $P_{ij}^{(p,q)}$  berechnet man dabei nach der Formel

$$(45) \quad P_{ij}^{(p,q)} = P_{ij}^{(p+1)} * P_{ij}^{(p+2)} * \dots * P_{ij}^{(q)}.$$

Im Falle des homogenen Schemas mit diskreter Zeit hat man

$$P_{ij}^{(p)} = P_{ij}, \quad P_{ij}^{(pq)} = [P_{ij}]_n^{q-p} = P_{ij}^{q-p}.$$

Wenn alle Größen  $P_{ij}$  positiv sind, so sind offensichtlich die Bedingungen des Satzes II des § 5 erfüllt, und  $P_{ij}^{(q)}$  konvergiert folglich mit  $q \rightarrow \infty$  gegen einen festen Limes  $Q_j$ . Die Integralgleichung (35) verwandelt sich in unserem Falle in das System von Gleichungen

$$(46) \quad Q_i = \sum_j Q_j P_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Diese Resultate wurden von Hostinsky und Hadamard erhalten<sup>6)</sup>.

### § 6.

#### Differentialgleichungen des kontinuierlichen stochastischen Prozesses.

Es ist wegen (11)

$$(47) \quad \begin{cases} P_{ii}(t, t) = 1, \\ P_{ij}(t, t) = 0, \quad i \neq j. \end{cases}$$

Wenn die Änderungen unseres Systems  $\mathfrak{S}$  in jedem Zeitmoment  $t$  möglich sind, ist es natürlich vorauszusetzen, daß

$$(47a) \quad \begin{cases} \lim [P_{ii}(t, t + \Delta)] = 1, \\ \lim [P_{ij}(t, t + \Delta)] = 0, \quad \Delta \rightarrow 0, \quad i \neq j, \end{cases}$$

ist, d. h. daß für kleine Zeitintervalle die Wahrscheinlichkeit der Änderung des Zustandes des Systems klein ist. Diese Voraussetzung ist in der Hypothese der Stetigkeit der Funktionen  $P_{ij}(t_1, t_2)$  nach  $t_1$  und  $t_2$  enthalten.

Man nehme jetzt an, daß die Funktionen  $P_{ij}(s, t)$  stetig und für  $t \neq s$  nach  $t$  und  $s$  differenzierbar sind. Für  $t = s$  fordern wir die Differenzierbarkeit nicht. Es wäre a priori unvorsichtig, in diesen singulären Stellen die Existenz der Ableitung vorauszusetzen<sup>7)</sup>.

Es ist für  $t > s$

$$(48) \quad \begin{aligned} \frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t} &= \lim_{\Delta} \frac{P_{ik}(s, t + \Delta) - P_{ik}(s, t)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta} \frac{1}{\Delta} \left[ \sum_j P_{ij}(s, t) P_{jk}(t, t + \Delta) - P_{ik}(s, t) \right] \\ &= \lim_{\Delta} \left[ \sum_{j \neq k} P_{ij}(s, t) \frac{P_{jk}(t, t + \Delta)}{\Delta} + P_{ik}(s, t) \frac{P_{kk}(t, t + \Delta) - 1}{\Delta} \right], \quad \Delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

<sup>6)</sup> Siehe <sup>2)</sup>.

<sup>7)</sup> Vgl. mit den im Kap. IV betrachteten Funktionen  $F(s, x, t, y)$ , welche für  $t = s$  notwendig Unstetigkeitspunkte besitzen.

Wenn die Determinante

$$\Xi = |P_{ij}(s, t)|$$

von Null verschieden ist, so kann man die Gleichungen

$$\sum_{j \neq k} P_{ij}(s, t) \frac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta} + P_{ik}(s, t) \frac{P_{kk}(t, t+\Delta) - 1}{\Delta} = \alpha_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

lösen:

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{P_{kk}(t, t+\Delta) - 1}{\Delta} = \frac{A_{kk}}{\Xi}, \\ \frac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta} = \frac{A_{jk}}{\Xi}, \quad j \neq k. \end{cases}$$

Da wegen (48)  $\alpha_{ik}$  mit  $\Delta \rightarrow 0$  gegen  $\frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t}$  konvergieren, so konvergieren die Größen (49) ebenfalls gegen bestimmtes Limites:

$$(50a) \quad \lim \frac{P_{kk}(t, t+\Delta) - 1}{\Delta} = A_{kk}(t),$$

$$(50b) \quad \lim \frac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta} = A_{jk}(t), \quad j \neq k.^5)$$

Daß die Determinante  $\Xi$  für ein passendes  $s < t$  wirklich von Null verschieden sein kann, sieht man aus der Relation

$$(51) \quad \lim \Xi = 1, \quad s \rightarrow t,$$

welche vermöge der Stetigkeit von  $\Xi$  und der Formeln (47) erfüllt ist.

Aus (48) und (50) folgt unmittelbar *das erste System der Differentialgleichungen* für die Funktionen  $P_{ik}(s, t)$ :

$$(52) \quad \frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t} = \sum_j A_{jk}(t) P_{ij}(s, t) = P_{ik}(s, t) * A_{ik}(t).$$

Dabei ist wegen (47) und (50)

$$(53) \quad A_{jk}(t) = \left[ \frac{\partial P_{jk}(t, u)}{\partial u} \right]_{u=t},$$

$$(54) \quad A_{jk} \geq 0, \quad j \neq k, \quad A_{kk} \leq 0,$$

und wegen (41) und (50)

$$(55) \quad \sum_k A_{jk} = 0.$$

Die Gleichungen (52) wurden nur in der Hypothese  $s < t$  festgesetzt, aber wegen (47) und (53) sieht man, daß sie auch für  $t = s$  erfüllt sind.

<sup>5)</sup> Man könnte auch umgekehrt (47a) und (50) a priori voraussetzen und daraus die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit von  $P_{ij}(s, t)$  nach  $t$  beweisen.

Es ist ferner für  $s < t$

$$\begin{aligned}
 (56) \quad \frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial s} &= \lim_{\Delta} \frac{P_{ik}(s + \Delta, t) - P_{ik}(s, t)}{\Delta} \\
 &= \lim_{\Delta} \frac{1}{\Delta} [P_{ik}(s + \Delta, t) - \sum_j P_{ij}(s, s + \Delta) P_{jk}(s + \Delta, t)] \\
 &= -\lim_{\Delta} \left[ \frac{P_{ii}(s, s + \Delta)}{\Delta} P_{ik}(s + \Delta, t) + \sum_{j \neq i} \frac{P_{ij}(s, s + \Delta)}{\Delta} P_{jk}(s + \Delta, t) \right], \quad \Delta \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

und wegen (50) erhält man das zweite System der Differentialgleichungen

$$(57) \quad \boxed{\frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial s} = -\sum_j A_{ij}(s) P_{jk}(s, t) = -A_{ik}(s) * P_{ik}(s, t)}. }$$

Wenn die Funktionen  $A_{ij}(s)$  stetig sind, so gelten offensichtlich die Gleichungen (57) auch für  $s = t$ .

Es sei jetzt für ein Zeitmoment  $t_0$  eine Verteilungsfunktion

$$Q(t_0, x_k) = Q_k(t_0), \quad \sum_k Q_k(t_0) = 1$$

gegeben für die Wahrscheinlichkeit, daß das System  $\Xi$  sich im Moment  $t_0$  im Zustande  $x_k$  befindet. Die Gleichung (5) verwandelt sich jetzt in die folgende:

$$Q_k(t) = \sum_i Q_i(t_0) P_{ik}(t_0, t).$$

Wegen (52) genügen die Funktionen  $Q_k(t)$  den Differentialgleichungen

$$(58) \quad \frac{dQ_k(t)}{dt} = \sum_j A_{jk}(t) Q_j(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Wenn die Funktionen  $A_{ik}(t)$  stetig sind, so bilden die Funktionen  $P_{ik}(s, t)$  das einzige den Anfangsbedingungen (47) genügende Lösungssystem der Gleichungen (52); folglich wird unser stochastischer Prozeß durch die  $A_{ik}(t)$  vollständig definiert. Die reelle Bedeutung der Funktionen  $A_{ik}(t)$  kann man folgendermaßen erläutern: Für  $i \neq k$  ist  $A_{ik}(t) dt$  die Wahrscheinlichkeit des Überganges aus dem Zustande  $x_i$  in den Zustand  $x_k$  im Laufe der Zeit von  $t$  bis  $t + dt$ , während

$$A_{kk}(t) = -\sum_{j \neq k} A_{kj}(t)$$

ist. Man kann auch zeigen, daß, falls irgendwelche stetigen Funktionen  $A_{ik}(t)$  unter den Bedingungen (54) und (55) beliebig gegeben sind, die Lösungen  $P_{ik}(s, t)$  der Differentialgleichungen (52) mit den Anfangsbedingungen (47) nicht-negativ sind und die Bedingungen (40) und (41) erfüllen, d. h. einen möglichen stochastischen Prozeß definieren.



Es ist in der Tat wegen (52) und (55)

$$(59) \quad \frac{\partial}{\partial t} \sum_k P_{ik}(s, t) = \sum_j \left[ \sum_k A_{jk}(t) \right] P_{ij}(s, t) = 0$$

und, da vermöge (47)

$$\sum_k P_{ik}(t, t) = 1$$

ist, folgt aus (59) die Relation (41).

Man setzt ferner für  $t_1 < t_2$

$$(60) \quad P'_{ik}(t_1, t) = P_{ik}(t_1, t), \quad \text{wenn } t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$(61) \quad P'_{ik}(t_1, t) = \sum_j P_{ij}(t_1, t_2) P_{jk}(t_2, t), \quad \text{wenn } t_2 < t.$$

Die Funktionen  $P'_{ik}(t_1, t)$  sind stetig und genügen den Differentialgleichungen (52); folglich gilt die Gleichung (60) für beliebige  $t$ , und nicht nur für  $t \leq t_2$ ; sodann fällt die Formel (61), wenn man  $t = t_2$  setzt, mit (40) zusammen.

Es bleibt zu beweisen, daß die Lösungen  $P_{ik}(t_1, t)$  nicht-negativ sind. Für diesen Zweck setzt man

$$\psi(t) = \text{Min}[P_{ik}(t, s)].$$

Offensichtlich hat man für passend gewählte  $i$  und  $k$

$$D^+ \psi(t) = \frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t}, \quad P_{ik}(s, t) = \psi(t),$$

und, wenn  $\psi(t) \leq 0$  ist, so folgt vermöge (54)

$$A_{kk}(t) P_{ik}(s, t) \geq 0,$$

$$A_{jk}(t) P_{ij}(s, t) \geq A_{jk}(t) \psi(t), \quad j \neq k,$$

$$D^+ \psi(t) = \frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t} = \sum_j A_{jk}(t) P_{ij}(s, t) \geq \sum_{j \neq k} A_{jk}(t) \psi(t) = R(t) \psi(t).$$

Da  $\psi(s) = 0$  ist, sieht man leicht, daß  $\psi(t)$  größer als jede negative Lösung der Gleichung

$$\frac{dy}{dt} = R(t) y$$

ist und folglich selbst nicht negativ sein soll.

## § 7.

### Beispiele.

In den nach der Zeit homogenen Schemata hängen die  $A_{ik}(t)$  von der Zeit  $t$  nicht ab, der Prozeß ist in diesem Falle durch  $n^2$  Konstanten  $A_{ik}$

vollständig bestimmt. Die Gleichungen (52) gehen dann in die folgende

$$(62) \quad \frac{dP_{ik}(t)}{dt} = \sum_j A_{jk} P_{ij}(t)$$

über; diese Gleichungen kann man ohne Schwierigkeit lösen. Wenn alle Größen  $A_{jk}$  von Null verschieden sind, so sind die Bedingungen des Satzes IV des § 5 erfüllt, und  $P_{ik}(t)$  konvergiert folglich mit  $t \rightarrow \infty$  gegen einen festen Limes  $Q_k$ . Die Größen  $Q_k$  genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_k Q_k &= 1, \\ \sum_j A_{jk} Q_j &= 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Man nehme z. B. an, daß

$$\begin{aligned} n &= 2, \\ A_{12} &= A_{21} = A, \\ A_{11} &= A_{22} = -A, \end{aligned}$$

d. h. die Wahrscheinlichkeiten des Überganges aus dem Zustande  $x_1$  in den Zustand  $x_2$  und des umgekehrten Überganges gleich seien. Die Differentialgleichungen (62) geben für unseren Fall

$$\begin{aligned} P_{12}(t) &= P_{21}(t) = \frac{1}{2} [1 - e^{-2At}], \\ P_{11}(t) &= P_{22}(t) = \frac{1}{2} [1 + e^{-2At}]. \end{aligned}$$

Wir sehen, daß die  $P_{ik}(t)$  mit  $t \rightarrow \infty$  nach  $Q_k = \frac{1}{2}$  konvergieren.

Folgendes Beispiel zeigt, daß die Konvergenz nach  $Q_k$  mit gedämpften Schwingungen begleitet sein kann:

$$\begin{aligned} n &= 3, \\ A_{12} &= A_{23} = A_{31} = A, \\ A_{21} &= A_{32} = A_{13} = 0, \\ A_{11} &= A_{22} = A_{33} = -A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= P_{22}(t) = P_{33}(t) = \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{2}At} \cos \alpha t + \frac{1}{3}, \\ P_{12}(t) &= P_{23}(t) = P_{31}(t) = e^{-\frac{1}{2}At} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha t - \frac{1}{3} \cos \alpha t \right] + \frac{1}{3}, \\ P_{21}(t) &= P_{32}(t) = P_{13}(t) = -e^{-\frac{1}{2}At} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha t + \frac{1}{3} \cos \alpha t \right] + \frac{1}{3}, \\ \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} A. \end{aligned}$$

Die analogen gedämpften Schwingungen wurden für die Schemata mit diskreter Zeit von Romanowsky entdeckt.

## Drittes Kapitel.

## Abzählbare Systeme von Zuständen.

## § 8.

## Einleitende Betrachtungen, diskrete Schemata.

Wenn die Menge  $\mathfrak{M}$  aus abzählbar vielen Elementen

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

besteht, erhält man alle Bezeichnungen und Resultate von § 5 des vorigen Kapitels. Die Konvergenz der Reihen

$$\sum_k P_{ik}(t_1, t_2) = 1, \quad \sum_k F_{ik} = 1$$

wird dabei vorausgesetzt, daraus folgt die Konvergenz von Reihen (40), (42), (46); dagegen verlangen wir nicht, daß die Reihe

$$\sum_i P_{ik}(t_1, t_2)$$

konvergent sei.

Wir geben jetzt nur einige Bemerkungen über die Schemata mit diskreter Zeit, und zwar über die homogenen. Die Bedingungen unserer Sätze über das Ergodenprinzip gelten für die Schemata mit abzählbar vielen Zuständen in den meisten Fällen nicht, aber das Prinzip selbst ist dessen ungeachtet öfters erfüllt. Zum Beispiel betrachten wir ein von Herrn S. Bernstein neuerdings betrachtetes Spiel<sup>9)</sup>, in welchem ein Spieler in jeder Partei einen Taler mit der Wahrscheinlichkeit  $A$  gewinnen und mit der Wahrscheinlichkeit  $B$ ,  $B > A$ ,  $A + B \leq 1$ , verlieren kann, vorausgesetzt, daß sein Vermögen von Null verschieden ist; im letzteren Falle verliert er nichts.

Wenn  $x_n$  der Zustand ist, in welchem der Spieler  $n - 1$  Taler besitzt, schreibt man die Bedingungen des Spiels folgendermaßen:

$$P_{n, n+1} = A, \quad P_{n+1, n} = B \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$P_{11} = 1 - A,$$

$$P_{nn} = 1 - A - B \quad (n = 2, 3, 4, \dots),$$

$$P_{ij} = 0, \quad \text{in allen anderen Fällen.}$$

Man zeigt leicht, daß

$$\lim P_{ij}^p = \left(1 - \frac{A}{B}\right) \left(\frac{A}{B}\right)^{j-1} = Q_j, \quad p \rightarrow \infty,$$

$$\sum_j Q_j = 1$$

gilt, woraus das Ergodenprinzip folgt.

<sup>9)</sup> Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 141 (russ.).

Es sei bemerkt, daß aus der Existenz von Limites

$$\lim P_{ij}^p = A_j, \quad p \rightarrow \infty,$$

nur dann das Ergodenprinzip folgt, wenn die Summe

$$\sum_j A_j = A$$

gleich Eins ist. Man könnte zeigen, daß stets  $A \leq 1$  ist, und daß im Falle  $A < 1$  das Ergodenprinzip nicht gelten kann.

Wenn alle  $A_j$  existieren und gleich Null sind, tritt die Frage hervor über die asymptotische Darstellung von  $P_{ij}^p$  für  $p \rightarrow \infty$ . Wenn eine solche Darstellung unabhängig von  $i$  möglich ist:

$$P_{ij}^p = \lambda_j^p + o(\lambda_j^p),$$

so sagt man, daß das lokale Ergodenprinzip erfüllt ist. Das letztere Prinzip scheint im Falle der abzählbar vielen möglichen Zustände von großer Wichtigkeit zu sein.

Es seien jetzt die möglichen Zustände  $x$  mittels aller ganzen Zahlen ( $-\infty < n < +\infty$ ) numeriert. Alle Bezeichnungen und Formeln des § 5 bleiben dabei erhalten, nur erstrecken sich die Summationszeichen über alle ganzen Zahlen. Wir betrachten näher den Fall

$$P_{ij} = P_{j-i}.$$

Offenbar gilt in diesem Falle auch

$$P_{ij}^p = P_{j-i}^p,$$

$$P_k^{p+1} = \sum_i P_i^p P_{k-i},$$

$$P_k^{m+n} = \sum_i P_i^m P_{k-i}^n.$$

Wenn die Reihen

$$a = \sum_k k P_k,$$

$$b^2 = \sum_k k^2 P_k$$

absolut konvergieren, kann man die Laplacesche asymptotische Formel folgendermaßen schreiben:

$$(63) \quad P_k^p = \frac{1}{b\sqrt{2\pi p}} e^{-\frac{(k-pa)^2}{2pb^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right).$$

Was die Geltungsbedingungen dieser Formel betrifft, so wissen wir nur, daß sie im Bernoullischen Falle stattfindet, in dem

$$(64) \quad P_0 = 1 - A, \quad P_1 = A$$

ist und alle anderen  $P_k$  verschwinden. Der Liapounoffsche Satz leistet für unser Problem nichts, wie man aus dem Beispiel

$$P_{+1} = P_{-1} = \frac{1}{2},$$

$$P_k = 0, \quad k \neq \pm 1,$$

schließt, in dem (63) nicht gilt. Für die Gültigkeit von (63) ist im allgemeinen notwendig, daß für jedes ganze  $m$  ein  $k$  existiert, für welches

$$k \not\equiv 0 \pmod{m}, \quad P_k \neq 0,$$

ist.

Es sei noch bemerkt, daß nur im Falle  $a = 0$  die Formel (63) bei festem  $k$  wirklich eine asymptotische Darstellung von  $P_k^p$  gibt. In diesem Falle folgt aus (63) bei festem  $k$

$$(65) \quad P_k^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi n} b} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

und bei festem  $i$  und  $j$

$$(66) \quad P_{ij}^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi n} b} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Wegen (66) ist in dem jetzt betrachteten Falle das lokale Ergodenprinzip erfüllt.

Eine ganz besondere Art von Annäherungsformeln für  $P_{ij}^p$  erhält man, wenn die Wahrscheinlichkeiten  $P_{ii}$  der Unveränderlichkeit des Zustandes des Systems in jedem einzigen Änderungsmoment nur sehr wenig von Eins verschieden sind. Zum Beispiel im Bernoullischen Falle (64) gilt für die kleinen Werte von  $A$  die *Poissonsche Annäherungsformel*

$$(67) \quad P_k^p \sim \frac{A^k p^k}{k!} e^{-Ap}.$$

Die allgemeine Methode zur Ableitung von solchen Formeln erhält man durch die Anwendung der Differentialgleichungen von nach der Zeit kontinuierlichen Prozessen, wie es für die Formel (67) in § 10 gezeigt wird.

## § 9.

### Differentialgleichungen des nach der Zeit kontinuierlichen Prozesses.

Wie im § 6 setzen wir voraus, daß die Funktionen  $P_{ij}(s, t)$  stetig und für  $t \neq s$  nach  $t$  und  $s$  differenzierbar sind. Die Formeln (48) und (56) gelten in dem jetzt zu betrachtenden Falle der abzählbar vielen möglichen Zustände wie früher, aber um die Vertauschbarkeit des Limeszeichens mit dem Summenzeichen in diesen Formeln zu beweisen und somit die Differentialgleichungen (52) und (57) festzustellen, muß man jetzt neue einschränkende Bedingungen einführen, und zwar die folgenden:

A. Existenz der Limites (50).

B. Gleichmäßigkeit der Konvergenz von (50b) nach  $j$  bei festem  $k$ .

## C. Gleichmäßigkeit der Konvergenz der Reihe

$$(68) \quad \sum_{k \neq j} \frac{P_{jk}(t, t + \Delta)}{\Delta} = \frac{1 - P_{jj}(t, t + \Delta)}{\Delta}$$

nach  $\Delta$  (daß diese Reihe konvergiert, folgt unmittelbar aus (41)).

Die Bedingung A war im § 6 für den Fall der endlich vielen Zustände bewiesen auf Grund der Differenzierbarkeit der Funktionen  $P_{ij}(s, t)$  für  $t + s$ ; im abzählbaren Falle dagegen scheint sie daraus nicht zu folgen. Zur Bedingung B sei bemerkt, daß die Gleichmäßigkeit der Konvergenz von (50b) nach  $k$  bei festem  $j$  aus der evidenten Ungleichung

$$P_{jk}(t, t + \Delta) \leq 1 - P_{jj}(t, t + \Delta)$$

folgt. Dagegen wird die Gleichmäßigkeit von (50b) für beliebige  $j$  und  $k$  ebenso wie die Gleichmäßigkeit von (50a) nach  $k$  nicht verlangt; diese Forderungen wären für die Anwendungen unbequem.

Da die Faktoren  $P_{ij}(s, t)$  in der Formel (48) eine absolut konvergente Reihe bilden, so kann man wegen der Bedingungen A und B in dieser Formel Limes- und Summenzeichen vertauschen und so die Differentialgleichung (52) erhalten. Dabei genügen die Größen  $A_{jk}(t)$  offensichtlich den Formeln (53) und (54); die Formel (55) ist wegen der Bedingung C ebenfalls erfüllt. Aus der letzten Bedingung und der gleichmäßigen Beschränktheit der Faktoren  $P_{jk}(s + \Delta, t)$  folgt auch die Vertauschbarkeit des Limes- und Summenzeichens in der Formel (56), welche für die Herleitung der Differentialgleichung (57) genügt.

## § 10.

## Eindeutigkeit und Berechnung der Lösungen im nach der Zeit homogenen Falle.

In diesem Falle gehen die Gleichungen (52) in die folgenden

$$(69) \quad \frac{dP_{ik}(t)}{dt} = \sum_j A_{jk} P_{ij}(t) = P_{ik}(t) * A_{ik}$$

über, wobei  $A_{jk}$  Konstanten sind. Wir beweisen im Falle der Konvergenz der Reihen

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_j |A_{jk}| = B_k^{(1)}, \\ \sum_j B_j^{(1)} |A_{jk}| = B_k^{(2)}, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_j B_j^{(n)} |A_{jk}| = B_k^{(n+1)}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$(71) \quad \sum_n \frac{B_k^{(n)}}{n!} x^n, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad |x| \leq \theta > 0,$$

und der Anfangsbedingungen

$$(72) \quad \begin{cases} P_{ii}(0) = 1, \\ P_{ij}(0) = 0, \quad i \neq j, \end{cases}$$

daß die Gleichungen (69) ein einziges, den Bedingungen unseres Problems genügendes Lösungssystem  $P_{ik}(t)$  besitzen.

Da stets  $P_{ij}(t) \leq 1$  ist, so erhält man in der Tat vermöge (69) und (70) die Ungleichung

$$\left| \frac{dP_{ik}(t)}{dt} \right| \leq B_k^{(1)},$$

folglich kann man (69) gliedweise differenzieren:

$$\frac{d^2 P_{ik}(t)}{dt^2} = \sum_j A_{jk} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} P_{ik}(t) * A_{ik}.$$

In analoger Weise erhält man die allgemeinen Relationen

$$(73) \quad \left| \frac{d^n P_{ik}(t)}{dt^n} \right| \leq B_k^{(n)},$$

$$(74) \quad \frac{d^{n+1} P_{ik}(t)}{dt^{n+1}} = \frac{d^n P_{ik}(t)}{dt^n} * A_{ik}.$$

Aus (73) und der Konvergenzbedingung für die Reihen (71) folgt, daß die  $P_{ik}(t)$  analytisch sind. Ferner erhält man vermöge (69) und (74)

$$(75) \quad \frac{d^n P_{ik}(t)}{dt^n} = P_{ik}(t) * [A_{ik}]_*^n,$$

insbesondere hat man für  $t=0$  wegen (72)

$$(76) \quad \frac{d^n P_{ik}(0)}{dt^n} = [A_{ik}]_*^n,$$

woraus folgt, daß die analytischen Funktionen  $P_{ik}(t)$  durch die Konstanten  $A_{ik}$  eindeutig bestimmt sind. Die Formeln (76) und (75) dienen auch zur Berechnung der Lösungen des Systems (69) durch die Taylorsche Reihen.

Zum Beispiel, wenn

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= A, \\ A_{ii} &= -A, \\ A_{ij} &= 0, \quad \text{in allen anderen Fällen,} \end{aligned}$$

ist, erhält man leicht

$$\begin{aligned} P_{mn}(t) &= \frac{(At)^{n-m}}{(n-m)!} e^{-At}, \quad n \geq m, \\ P_{mn}(t) &= 0, \quad m > n, \end{aligned}$$

oder die *Poissonsche Verteilungsformel*; diese stimmt für  $k=n-m$ ,  $p=t$  mit (67) überein.



Wenn das Ergodenprinzip erfüllt ist und  $P_{ik}(t)$  gegen  $Q_k$  mit  $A \rightarrow \infty$  konvergiert, genügen offensichtlich die Konstanten  $Q_k$  den Gleichungen

$$(77) \quad \begin{cases} \sum_k Q_k = 1, \\ \sum_i A_{ik} Q_i = 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Zum Beispiel, wenn

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= A, \\ A_{i+1,i} &= B, \quad B > A, \\ A_{11} &= -A, \\ A_{ii} &= -(A+B), \quad i > 1, \\ A_{ij} &= 0, \quad \text{in allen anderen Fällen,} \end{aligned}$$

ist, erhält man leicht aus den Gleichungen (77)

$$Q_n = \left(1 - \frac{A}{B}\right) \left(\frac{A}{B}\right)^{n-1}.$$

Als zweites Beispiel setzen wir

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= A, \\ A_{i+1,i} &= iB, \\ A_{ii} &= -A - (i-1)B, \\ A_{ij} &= 0, \quad \text{in allen anderen Fällen.} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (77) liefern uns in diesem Falle

$$Q_{n+1} = \frac{1}{n!} \left(\frac{A}{B}\right)^n e^{-\frac{A}{B}},$$

also wieder die Poissonsche Formel.

#### Viertes Kapitel.

#### Kontinuierliche Systeme von Zuständen, einparametriger Fall.

##### § 11.

##### Einleitende Betrachtungen.

Es sei jetzt der Zustand des betrachtenden Systems durch einen reellen Parameter  $x$  definiert; wir bezeichnen in diesem Falle mit  $x$  den Zustand selbst, sowie den zugehörigen Wert des Parameters. Wenn  $\mathbb{E}_y$  die Menge aller Zustände  $x$  mit  $x \leq y$  ist, so setzen wir

$$F(t_1, x, t_2, y) = P(t_1, x, t_2, \mathbb{E}_y).$$

$F(t_1, x, t_2, y)$  ist als Funktion von  $y$  monoton und nach rechts stetig und genügt den Grenzbedingungen

$$(78) \quad F(t_1, x, t_2, -\infty) = 0, \quad F(t_1, x, t_2, +\infty) = 1.$$

Die Fundamentalgleichung (3) verwandelt sich für  $F(t_1, x, t_2, y)$  in die folgende:

$$(79) \quad F(t_1, x, t_2, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t_2, y, t_2, z) dF(t_1, x, t_2, y).$$

Man kehrt so zum Gebrauch der integralen Verteilungsfunktionen der zufälligen Größen und der Stieltjesschen Integrale im gewöhnlichen Sinne zurück.

Das Integral (79) ist nach Lebesgue<sup>10)</sup> gewiß bestimmt, wenn  $F(t_2, y, t_2, z)$  nach  $y$  im Borelschen Sinne meßbar ist. Wir setzen im folgenden voraus, daß das System  $\mathfrak{F}$  (siehe § 1) mit dem System aller Borelschen Mengen zusammenfällt, woraus die Borelsche Meßbarkeit von  $F(t_1, x, t_2, y)$  nach  $x$  folgt. Dabei ist bekanntlich die additive Mengenfunktion  $P(t_1, x, t_2, \mathfrak{E})$  für alle Borelschen Mengen  $\mathfrak{E}$  durch die entsprechende Funktion  $F(t_1, x, t_2, y)$  eindeutig bestimmt.

Wir nennen die monotone und nach rechts stetige Funktion  $F(y)$ , welche den Grenzbedingungen

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$$

genügt, die *normale Verteilungsfunktion*. Wenn  $F_1(x, y)$  und  $F_2(x, y)$  als Funktionen von  $x$  im Borelschen Sinne meßbar und als Funktionen von  $y$  normale Verteilungsfunktionen sind, so gilt dasselbe auch von der Funktion

$$(80) \quad F(x, y) = F_1(x, y) \oplus F_2(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(z, y) dF_1(x, z).$$

Dieser Operator  $\oplus$  ist wie  $*$  assoziativ; mit seiner Hilfe schreibt man die Fundamentalgleichung (79) in der Form

$$(81) \quad F(t_1, x, t_2, y) = F(t_1, x, t_2, y) \oplus F(t_2, x, t_2, y).$$

Wenn  $F_1(x, y) = V_1(y - x)$ ,  $F_2(x, y) = V_2(y - x)$  ist, so gilt, wie man leicht ausrechnet,

$$(82) \quad F_1(x, y) \oplus F_2(x, y) = V(y - x) = V_1(y - x) \odot V_2(y - x),$$

$$(83) \quad V(x) = V_1(x) \odot V_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_2(x - z) dV_1(z),$$

Der Operator  $\odot$  ist auch assoziativ und überdies für die normalen Verteilungsfunktionen kommutativ; wenn man  $V_1(x)$  und  $V_2(x)$  als Verteilungsfunktionen für zwei unabhängige zufällige Größen  $X_1$  und  $X_2$  betrachtet, so stellt bekanntlich  $V_1(x) \odot V_2(x)$  die Verteilungsfunktion für die Summe  $X = X_1 + X_2$  dar<sup>11)</sup>.

<sup>10)</sup> Leçons sur l'intégration, 2. Ausg., S. 261.

<sup>11)</sup> Siehe z. B.: P. Lévy, Calcul des probabilités, S. 187.

Wenn  $F(t_1, x, t_2, y)$  als Funktion von  $y$  totalstetig ist, so hat man

$$(84) \quad F(t_1, x, t_2, y) = \int_{-\infty}^y f(t_1, x, t_2, y) dy.$$

Die nicht-negative Funktion  $f(t_1, x, t_2, y)$  ist dabei nach  $x$  und nach  $y$  im Borelschen Sinne meßbar und genügt den Gleichungen

$$(85) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, x, t_2, y) dy = 1,$$

$$(86) \quad f(t_1, x, t_2, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, x, t_2, y) f(t_2, y, t_3, z) dy.$$

Umgekehrt wenn  $f(t_1, x, t_2, y)$  alle diese Forderungen erfüllt, gelten für die nach (84) definierte Funktion  $F(t_1, x, t_2, y)$  die Gleichungen (78) und (79); folglich definiert eine solche Funktion  $f(t_1, x, t_2, y)$  ein Schema eines möglichen stochastischen Prozesses. Diese Funktion  $f(t_1, x, t_2, y)$  nennen wir weiter *die differentiale Verteilungsfunktion* für die zufällige Größe  $y$ .

Wir merken uns noch die folgenden gemischten Formeln:

$$(87) \quad F(t_1, x, t_2, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t_2, y, t_3, z) f(t_1, x, t_2, y) dy,$$

$$(88) \quad f(t_1, x, t_2, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_2, y, t_3, z) dF(t_1, x, t_2, y).$$

Im Falle des nach der Zeit diskreten Schemas betrachtet man die Funktionen

$$F_{mn}(x, y) = F(t_m, x, t_n, y),$$

$$F_n(x, y) = F_{n-1, n}(x, y),$$

welche den Gleichungen

$$(89) \quad F_{m, n+1}(x, y) = F_{mn}(x, y) \oplus F_{n+1}(x, y),$$

$$(90) \quad F_{kn}(x, y) = F_{km}(x, y) \oplus F_{mn}(x, y), \quad k < m < n,$$

genügen. Wenn

$$F_{mn}(x, y) = \int_{-\infty}^y f_{mn}(x, y) dy, \quad f_n(x, y) = f_{n-1, n}(x, y)$$

ist, so hat man überdies

$$(91) \quad f_{m, n+1}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{mn}(x, y) f_{n+1}(y, z) dy,$$

$$(92) \quad f_{kn}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{km}(x, y) f_{mn}(y, z) dy, \quad k < m < n.$$

## § 12.

**Die Lindebergsche Methode. Übergang von den diskreten zu den kontinuierlichen Schemata.**

Wie im § 3 bemerkt wurde, werden in der Wahrscheinlichkeitstheorie gewöhnlich nur die nach der Zeit diskreten Schemata betrachtet. Das fundamentale Problem für diese Schemata besteht in der Aufstellung der Annäherungsformeln für die Verteilungen  $F_{mn}(x, y)$  mit großen Differenzen  $n - m$ , oder, was im wesentlichen dasselbe ist, der asymptotischen Formeln für  $F_{mn}(x, y)$  bei  $n \rightarrow \infty$ . Das wichtigste Resultat in dieser Richtung ist der Laplace-Liapounoffische Satz. Wir wollen jetzt den Lindebergschen Beweis<sup>19)</sup> dieses Satzes näher untersuchen, um seinen Hauptgedanken in möglichst allgemeiner Form herauszubekommen und dadurch eine allgemeine Methode zur Herleitung der asymptotischen Formeln für  $F_{mn}(x, y)$  zu erhalten.

Es sei

$$F_n(x, y) = V_n(y - x),$$

$$a_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x) dF_n(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y dV_n(y) = 0,$$

$$b_n^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 dF_n(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dV_n(y) = b_n^2,$$

$$B_{mn}^2 = b_{m+1}^2 + b_{m+2}^2 + \dots + b_n^2;$$

der Laplace-Liapounoffische Satz behauptet unter einigen Nebenvoraussetzungen, daß bei festem  $m$  und wachsendem  $n$

$$F_{mn}(x, y) = \Phi\left(\frac{y-x}{B_{mn}}\right) + o(1),$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

gleichmäßig nach  $x$  und  $y$  gilt.

Wir betrachten neben dem durch die Funktionen  $F_n(x, y)$  definierten stochastischen Prozeß mit diskreter Zeit einen anderen mit kontinuierlicher Zeit; dieser letztere Prozeß sei mittels der Funktion

$$\bar{F}(t', x, t'', y) = \Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{t''-t'}}\right)$$

charakterisiert. Es sei ferner

$$t_0 = 0, \quad t_n = B_{0n}^2,$$

$$\bar{F}_{mn}(x, y) = \bar{F}(t_m, x, t_n, y),$$

$$\bar{F}_n(x, y) = \bar{F}_{n-1, n}(x, y).$$

<sup>19)</sup> Math. Zeitschr. 15 (1922), S. 211.

Man hat offensichtlich

$$\begin{aligned}\bar{F}_n(z, y) &= \Phi\left(\frac{y-x}{b_n}\right), \\ \bar{a}_n(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x) d\bar{F}_n(x, y) = 0, \\ \bar{b}_n^2(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)^2 dF_n(x, y) = b_n,\end{aligned}$$

dabei fallen die ersten und zweiten Momente  $\bar{a}_n(x)$  und  $\bar{b}_n^2(x)$  der Verteilung  $\bar{F}_n(x, y)$  mit entsprechenden Momenten  $a_n(x)$  und  $b_n^2(x)$  der Verteilungen  $F_n(x, y)$  zusammen; auf Grund der letzteren Tatsache beweist Lindeberg, daß die Differenz

$$F_{mn}(x, y) - \bar{F}_{mn}(x, y)$$

mit  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, dann folgt der Laplace-Liapounoffsche Satz aus der evidenten Formel

$$\bar{F}_{mn}(x, y) = \Phi\left(\frac{y-x}{B_{mn}}\right).$$

Im allgemeinen Falle beliebiger Funktionen  $F_n(x, y)$  kann man ebenfalls die Lindebergsche Methode anwenden, wenn man eine Funktion  $\bar{F}(t', x, t'', y)$  kennt, welche einen kontinuierlichen stochastischen Prozeß definiert und für eine Folge der Zeitmomente

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$$

mit  $a_n(x)$  und  $b_n^2(x)$  zusammenfallende oder von derselben nur wenig abweichende Momente  $\bar{a}_n(x)$  und  $\bar{b}_n^2(x)$  ergibt. Die allgemeine Methode zur Herleitung solcher Funktionen  $\bar{F}$  wird sodann durch Anwendung der Differentialgleichungen der kontinuierlichen Prozesse erhalten, welche in den folgenden Paragraphen betrachtet werden. Zum Übergang von  $\bar{F}$  zu  $F$  kann man den folgenden Satz benutzen:

**Übertragungssatz.** *Es seien durch die Funktionen  $F_n(x, y)$  und  $\bar{F}_n(x, y)$  zwei stochastische Prozesse mit diskreter Zeit definiert. Wenn*

$$(93) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x) dF_n(x, y) = a_n(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x) d\bar{F}_n(x, y) = \bar{a}_n(x),$$

$$(94) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)^2 dF_n(x, y) = b_n^2(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)^2 d\bar{F}_n(x, y) = \bar{b}_n^2(x),$$

$$(95) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |y-x|^3 dF_n(x, y) = c_n(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |y-x|^3 d\bar{F}_n(x, y) = \bar{c}_n(x),$$

$$(96) \quad \begin{cases} |a_n(x) - \bar{a}_n(x)| \leq p_n, \\ |b_n^2(x) - \bar{b}_n^2(x)| \leq q_n, \\ c_n(x) \leq r_n, \\ \bar{c}_n(x) \leq \bar{r}_n \end{cases}$$

ist und eine solche Funktion  $R(x)$  existiert, daß

$$(97) \quad \begin{cases} R(x) = 0, & \text{wenn } x \leq 0, \\ 0 \leq K(x) \leq 1, & \text{wenn } 0 < x < l, \\ G(x) = 1, & l \leq x, \end{cases}$$

$$(98) \quad U_{kn}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(z-y) d\bar{F}_{kn}(x, y),$$

$$(99) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial}{\partial x} U_{kn}(x, z) \right| \leq K_n^{(1)}, \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_{kn}(x, z) \right| \leq K_n^{(2)}, \\ \left| \frac{\partial^3}{\partial x^3} U_{kn}(x, z) \right| \leq K_n^{(3)} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

ist, so hat man

$$(100) \quad \bar{F}_{0n}(x, y-l) - \varepsilon_n \leq F_{0n}(x, y) \leq \bar{F}_{0n}(x, y+l) + \varepsilon_n,$$

$$\varepsilon_n = K_n^{(1)} \sum_{k=1}^n p_k + \frac{1}{2} K_n^{(2)} \sum_{k=1}^n q_k + \frac{1}{6} K_n^{(3)} \sum_{k=1}^n (r_k + \bar{r}_k).$$

Für die Anwendung dieses Satzes im Falle, wo die Momente  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  bei wachsendem  $x$  unbeschränkt sind, kann man öfters die Unbeschränktheit durch Einführung einer neuen passend gewählten Variablen  $x' = \varphi(x)$  beseitigen.

Beweis des Übertragungssatzes. Man hat wegen (98)

$$(101) \quad \begin{aligned} U_{k-1,n}(x, y) &= \bar{F}_{k-1,n}(x, y) \oplus R(y-x) \\ &= \bar{F}_k(x, y) \oplus \bar{F}_{k+1}(x, y) \oplus \dots \oplus \bar{F}_n(x, y) \oplus R(y-x) = \bar{F}_k(x, y) \oplus U_{kn}(x, y) \end{aligned}$$

und wegen (93), (94), (95), (99)

$$(102) \quad \begin{aligned} U_{k-1,n}(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_{kn}(z, y) d\bar{F}_k(x, z) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ U_{kn}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} U_{kn}(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_{kn}(x, y) \frac{(z-x)^2}{2} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} U_{kn}(\xi, y) \frac{(z-x)^3}{6} \right] d\bar{F}_k(x, z) \\ &= U_{kn}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} U_{kn}(x, y) \bar{a}_k(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_{kn}(x, y) \frac{\bar{b}_k^2(x)}{2} + \bar{\theta} K_n^{(3)} \frac{\bar{c}_k(x)}{6}, \quad |\bar{\theta}| \leq 1. \end{aligned}$$

Wenn man

$$(103) \quad V_{k-1,n}(x, y) = \bar{F}_k(x, y) \oplus U_{kn}(x, y)$$

setzt, so gilt die zu (102) analoge Formel

$$(104) \quad \begin{aligned} V_{k-1,n}(x, y) &= U_{kn}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} U_{kn}(x, y) a_k(x) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_{kn}(x, y) \frac{b_k^2(x)}{2} + \theta K_n^{(3)} \frac{c_k(x)}{6}, \quad |\theta| \leq 1. \end{aligned}$$

Aus (102) und (104) folgt vermöge (96) und (99)

$$(105) \quad |U_{k-1,n}(x,y) - V_{k-1,n}(x,y)| \leq K_n^{(1)} p_k + \frac{1}{2} K_n^{(2)} q_k + \frac{1}{6} K_n^{(3)} (r_k + \bar{r}_k).$$

Es sei ferner

$$(106) \quad \begin{aligned} W_{kn}(x,y) &= F_{0k}(x,y) \oplus U_{kn}(x,y) \\ &= F_1(x,y) \oplus F_2(x,y) \oplus \dots \oplus F_k(x,y) \oplus U_{kn}(x,y) = F_{0,k-1}(x,y) \oplus V_{k-1,n}(x,y), \end{aligned}$$

dann ist wegen (105)

$$\begin{aligned} &|W_{kn}(x,y) - W_{k-1,n}(x,y)| \\ &= |F_{0,k-1}(x,y) \oplus V_{k-1,n}(x,y) - F_{0,k-1}(x,y) \oplus U_{k-1,n}(x,y)| \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [V_{k-1,n}(x,y) - U_{k-1,n}(x,y)] dF_{0,k-1}(x,z) \\ &\leq \sup |V_{k-1,n}(x,y) - U_{k-1,n}(x,y)| \\ &\leq K_n^{(1)} p_k + \frac{1}{2} K_n^{(2)} q_k + \frac{1}{6} K_n^{(3)} (r_k + \bar{r}_k), \end{aligned}$$

$$(107) \quad \begin{aligned} &|W_{nn}(x,y) - W_{0,n}(x,y)| \\ &\leq K_n^{(1)} \sum_{k=1}^n p_k + \frac{1}{2} K_n^{(2)} \sum_{k=1}^n q_k + \frac{1}{6} K_n^{(3)} \sum_{k=1}^n (r_k + \bar{r}_k) = \epsilon_n. \end{aligned}$$

$$W_{nn}(x,y) = F_{0n}(x,y) \oplus R(y-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(y-z) dF_{0n}(x,z).$$

Wenn man in Betracht zieht, daß

$$W_{0n}(x,y) = \bar{F}_{0n}(x,y) \oplus R(y-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(y-z) d\bar{F}_{0n}(x,z)$$

ist, so erhält man wegen (97)

$$(108) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{nn}(x,y) &\leq \int_{-\infty}^y dF_{0n}(x,z) = F_{0n}(x,y), \\ W_{nn}(x,y+l) &\geq \int_{-\infty}^y dF_{0n}(x,z) = F_{0n}(x,y), \\ W_{0n}(x,y) &\geq \int_{-\infty}^{y-l} d\bar{F}_{0n}(x,z) = \bar{F}_{0n}(x,y-l), \\ W_{0n}(x,y+l) &\leq \int_{-\infty}^{y+l} d\bar{F}_{0n}(x,z) = \bar{F}_{0n}(x,y+l). \end{aligned} \right.$$

Aus (107) und (108) folgt unmittelbar die Formel (100). Für die Einzelheiten der Beweisführung siehe die erwähnte Lindebergsche Abhandlung.

## § 13.

## Die erste Differentialgleichung für die nach der Zeit kontinuierlichen Prozesse.

Wenn in unserem System  $\mathfrak{S}$  in jedem Zeitmoment  $t$  Änderungen auftreten können, ist es natürlich vorauszusetzen, daß große Änderungen des Parameters  $x$  in kleinen Zeitintervallen nur sehr selten stattfinden, oder genauer, daß für jedes positive  $\varepsilon$

$$(109) \quad P(t, x, t + \Delta, |y - x| > \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow 0,$$

ist. In den meisten Fällen kann man voraussetzen, daß auch die schärfere Bedingung

$$(110) \quad m^{(p)}(t, x, \Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y - x|^p dF(t, x, t + \Delta, y) \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow 0,$$

wenigstens für die ersten Momente  $m^{(1)}$ ,  $m^{(2)}$ ,  $m^{(3)}$  erfüllt ist. Eine allgemeine Untersuchung der Möglichkeiten, welche in diesen Voraussetzungen vorkommen, wäre von großem Interesse; wegen einiger Bemerkungen darüber möge auf den § 19 verwiesen werden.

In den nächsten Paragraphen wird vorausgesetzt, daß noch die wichtige Bedingung

$$(111) \quad \frac{m^{(2)}(t, x, \Delta)}{m^{(1)}(t, x, \Delta)} \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow 0,$$

erfüllt ist. Diese Bedingung gilt sicher, wenn für unendlich kleine  $\Delta$  nur unendlich kleine Differenzen  $y - x$  in der Bestimmung von  $m^{(2)}(t, x, \Delta)$  durch die Formel (110) wesentlich sind, oder genauer, wenn

$$(112) \quad \frac{\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} |y - x|^2 dF(t, x, t + \Delta, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} |y - x|^2 dF(t, x, t + \Delta, y)} \rightarrow 1, \quad \Delta \rightarrow 0,$$

ist. Nur in diesem Falle wird unser stochastischer Prozeß im eigentlichen Sinne nach der Zeit kontinuierlich. Aus (111) folgt auch die Formel

$$\frac{m^{(2)}(t, x, \Delta)}{m^{(1)}(t, x, \Delta)} \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow 0.$$

Außerdem setzen wir voraus, daß bei  $s + t$  alle partiellen Ableitungen von  $F(s, x, t, y)$  bis zur vierten Ordnung existieren und bei festem  $t$  und  $y$  für  $t - s > k > 0$  nach  $s$  und  $x$  gleichmäßig beschränkt sind. Aus (78) und (110) schließt man, daß bei  $s = t$  dagegen  $F(s, x, t, y)$  notwendig eine Unstetigkeit besitzt. Die Funktion

$$(113) \quad f(s, x, t, y) = \frac{\partial}{\partial x} F(s, x, t, y)$$



genügt offensichtlich den Gleichungen (84), (85), (86) und besitzt bei festen  $t$  und  $y$  für  $t-s > k > 0$  nach  $s$  und  $x$  gleichmäßig beschränkte Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Alle weiteren Rechnungen führen wir für diese differentiale Verteilungsfunktion  $f(s, x, t, y)$  aus.

Es sei

$$(114) \quad a(t, x, \Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x) f(t, x, t+\Delta, y) dy,$$

$$(115) \quad b^2(t, x, \Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)^2 f(t, x, t+\Delta, y) dy = m^{(2)}(t, x, \Delta),$$

$$(116) \quad c(t, x, \Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y-x|^3 f(t, x, t+\Delta, y) dy = m^{(3)}(t, x, \Delta).$$

Man hat vermöge (85) und (86)

$$\begin{aligned} (117) \quad f(s, x, t, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, s+\Delta, z) f(s+\Delta, z, t, y) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, s+\Delta, z) \left[ f(s+\Delta, x, t, y) + \frac{\partial}{\partial x} f(s+\Delta, x, t, y) (z-x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s+\Delta, x, t, y) \frac{(z-x)^2}{2} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(s+\Delta, \xi, t, y) \frac{(z-x)^3}{6} \right] dz \\ &= f(s+\Delta, x, t, y) + \frac{\partial}{\partial x} f(s+\Delta, x, t, y) a(s, x, \Delta) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s+\Delta, x, t, y) \frac{b^2(s, x, \Delta)}{2} + \theta \frac{c(s, x, \Delta)}{6}, \quad |\theta| < C, \end{aligned}$$

bei  $s+\Delta < \tau < t$  kann dabei  $C$  unabhängig von  $\Delta$  gewählt werden. Aus

(117) folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} (118) \quad &\frac{f(s+\Delta, x, t, y) - f(s, x, t, y)}{\Delta} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f(s+\Delta, x, t, y) \frac{a(s, x, \Delta)}{\Delta} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s+\Delta, x, t, y) \frac{b^2(s, x, \Delta)}{2\Delta} - \theta \frac{c(s, x, \Delta)}{6\Delta}. \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir zuerst beweisen, daß, wenn die Determinante

$$(119) \quad D(s, x, t', y', t'', y'') = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t', x') & \frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t'', y'') \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t', y') & \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t'', y'') \end{vmatrix}$$

bei festen  $x$  und  $s$  nicht identisch nach  $t', y', t'', y''$  verschwindet, die Verhältnisse

$$\frac{a(s, \Delta, x)}{\Delta} \quad \text{und} \quad \frac{b^2(s, \Delta, x)}{2\Delta}$$

mit  $\Delta \rightarrow 0$  zu bestimmten Grenzwerten  $A(s, x)$  und  $B^2(s, x)$  konvergieren. Es seien in der Tat  $t', y', t'', y''$  so gewählt, daß (119) nicht verschwindet, in diesem Falle ist für jedes genügend kleine  $\Delta$  auch

$$D(s+\Delta, x, t', y', t'', y'') \neq 0,$$

so daß die Gleichungen

$$(120) \quad \begin{cases} \lambda(\Delta) \frac{\partial}{\partial x} f(s + \Delta, x, t', y') + \mu(\Delta) \frac{\partial}{\partial x} f(s + \Delta, x, t'', y'') = 0, \\ \lambda(\Delta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s + \Delta, x, t', y') + \mu(\Delta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s + \Delta, x, t'', y'') = 1 \end{cases}$$

eindeutig lösbar sind. Dabei konvergieren  $\lambda(\Delta)$  und  $\mu(\Delta)$  mit  $\Delta \rightarrow 0$  nach  $\lambda(0)$  und  $\mu(0)$ . Vermöge (118) erhält man ferner

$$(121) \quad \lambda(\Delta) \frac{f(s + \Delta, x, t', y') - f(s, x, t', y')}{\Delta} + \mu(\Delta) \frac{f(s + \Delta, x, t'', y'') - f(s, x, t'', y'')}{\Delta} \\ = - \frac{b^2(s, \Delta, x)}{2\Delta} - (\theta' + \theta'') \frac{c(s, \Delta, x)}{6\Delta}.$$

Die linke Seite von (121) konvergiert mit  $\Delta \rightarrow 0$  nach

$$\Omega = \lambda(0) \frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t', y') + \mu(0) \frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t'', y'');$$

in der rechten Seite von (121) ist vermöge der Bedingung (111) das zweite Glied unendlich klein im Vergleich mit dem ersten, folglich konvergiert dieses erste Glied zu dem festen Limes

$$(122) \quad B^2(s, x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{b^2(s, \Delta, x)}{2\Delta} = \Omega, \quad \Delta \rightarrow 0.$$

Aus (122) und (111) folgt unmittelbar, daß

$$(123) \quad \frac{c(s, x, \Delta)}{\Delta} \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow 0,$$

ist.

Wegen (122) und (123) geht die Formel (118) für  $\Delta = 0$  in die folgende über:

$$\lim \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y) \frac{a(s, x, \Delta)}{\Delta} \right] = \frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y) B^2(s, x).$$

Da  $\frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y)$  nicht identisch nach  $t$  und  $y$  verschwindet, existiert auch der Limes

$$(124) \quad A(s, x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{a(s, x, \Delta)}{\Delta} = \frac{-\frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y) B^2(s, x)}{\frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y)},$$

Aus (118), (122), (123) und (124) folgt durch den Grenzübergang die erste fundamentale Differentialgleichung:

$$(125) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) &= -A(s, x) \frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y) \\ &\quad - B^2(s, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y). \end{aligned}}$$

Wenn die Determinante  $D(s, x, t', y', t'', y'')$  bei beliebigen  $t', y', t'', y''$  verschwindet, existieren im allgemeinen die Grenzwerte  $A(s, x)$  und  $B^2(s, x)$  nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$(126) \quad f(s, x, t, y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y^2-s^2)^2}{4(t-s)}}.$$

Hier ist bei  $x = 0$

$$\frac{b^2(s, x, \Delta)}{2\Delta} \rightarrow +\infty, \quad \Delta \rightarrow 0.$$

Man könnte jedoch zeigen, daß *solche Ausnahmepunkte*  $(s, x)$  auf der  $(s, x)$ -Ebene nirgends dicht liegen.

Die reelle Bedeutung dieser sehr wichtigen Größen  $A(s, x)$  und  $B(s, x)$  ist die folgende:  $A(s, x)$  ist die mittlere Geschwindigkeit der Veränderung des Parameters  $x$  im Laufe des unendlich kleinen Zeitintervalles.  $B(s, x)$  ist die differentiale Dispersion des Prozesses. Die Dispersion der Differenz  $y - x$  im Zeitintervalle  $\Delta$  ist

$$(127) \quad b(s, x, \Delta) = B(s, x)\sqrt{2\Delta} + o(\sqrt{\Delta}) = O(\sqrt{\Delta}),$$

der Mittelwert dieser Differenz ist

$$(128) \quad a(s, x, \Delta) = A(s, x)\Delta + o(\Delta) = O(\Delta).$$

Es ist vielleicht nötig zu bemerken, daß der Mittelwert  $m^{(1)}(t, x, \Delta)$  von  $|y - x|$  wie die Dispersion  $b(s, x, \Delta)$  von der Größenordnung  $\sqrt{\Delta}$  ist. Wie es im folgenden Paragraphen gezeigt wird, in manchen Fällen charakterisieren die Funktionen  $A(s, x)$  und  $B(s, x)$  eindeutig unser stochastisches Schema.

## § 14.

### Die zweite Differentialgleichung.

In diesem Paragraphen erhalten wir aufrecht alle Forderungen über die Funktion  $f(s, x, t, y)$  des vorigen Paragraphen und setzen überdies voraus, daß  $f(s, x, t, y)$  stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung hat. Dann folgert man leicht aus (120), daß, wenn die Determinante (119) nicht verschwindet,  $\lambda(0)$  und  $\mu(0)$  stetige Ableitungen nach  $s$  und  $x$  bis zur zweiten Ordnung haben; wegen (120) und (124) gilt offensichtlich dasselbe für  $B^2(s, x)$  und  $A(s, x)$ .

Es sei jetzt für ein festes  $t$  ein Intervall  $a \leq y \leq b$  gegeben, derart, daß in keinem seiner Punkte die Determinante  $D(t, y, u', z', u'', z'')$  identisch nach  $u', z', u'', z''$  verschwindet. Es sei ferner  $R(y)$  eine nur auf der Strecke  $a < y < b$  von Null verschiedene nicht-negative Funktion mit beschränkten Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Dann hat man

$$\begin{aligned}
(129) \quad & \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(s, x, t, y) R(y) dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f(s, x, t, y) R(y) dy \\
&= \lim \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(s, x, t + \Delta, y) - f(s, x, t, y)] R(y) dy \\
&= \lim \frac{1}{\Delta} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} R(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, z) f(t, z, t + \Delta, y) dz dy - \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, y) R(y) dy \right\} \\
&= \lim \frac{1}{\Delta} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, z) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, z, t + \Delta, y) \left[ R(z) + R'(z)(y-z) + R''(z) \frac{(y-z)^2}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + R'''(\xi) \frac{(y-z)^3}{6} \right] dy dz - \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, z) R(z) dz \right\} \\
&= \lim \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, z) \left[ R'(z) a(t, z, \Delta) + R''(z) \frac{b^2(t, z, \Delta)}{2} + \theta \frac{c(t, z, \Delta)}{6} \right] dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, z) [R'(z) A(t, z) + R''(z) B^2(t, z)] dz \\
&= \int_a^b f(s, x, t, y) [R'(y) A(t, y) + R''(y) B^2(t, y)] dy, \quad |\theta| \leq \sup |R'''(\xi)|.
\end{aligned}$$

Um den Limesübergang nach  $\Delta$  in dieser Rechnung zu rechtfertigen, bemerke man, daß  $\frac{a(t, z, \Delta)}{\Delta}$ ,  $\frac{b^2(t, z, \Delta)}{2\Delta}$  und  $\frac{c(t, z, \Delta)}{\Delta}$  bzw. nach  $A(t, z)$ ,  $B^2(t, z)$  und nach Null gleichmäßig konvergieren, und daß der Faktor  $f(s, x, t, z)$  ein endliches Integral nach  $z$  besitzt.

Nach einer partiellen Integration erhält man

$$(130) \quad \int_a^b f(s, x, t, y) R'(y) A(t, y) dy = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} [f(s, x, t, y) A(t, y)] R(y) dy$$

und mittels einer zweifachen partiellen Integration hat man ferner

$$(131) \quad \int_a^b f(s, x, t, y) R''(y) B^2(t, y) dy = \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial y^2} [f(s, x, t, y) B^2(t, y)] R(y) dy,$$

da  $R(a) = R(b) = R'(a) = R'(b) = 0$  ist. Aus (129), (130) und (131) folgt unmittelbar

$$(132) \quad \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(s, x, t, y) R(y) dy \\ = \int_a^b \left\{ -\frac{\partial}{\partial y} [A(t, y) f(s, x, t, y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B^2(t, y) f(s, x, t, y)] \right\} R(y) dy;$$

da  $R(y)$  bis auf die oben erwähnten Bedingungen willkürlich ist, schließt man leicht, daß für die  $(t, y)$ -Punkte mit nicht identisch verschwindender Determinante  $D(t, y, u', z', u'', z'')$  auch die zweite fundamentale Differentialgleichung

$$(133) \quad \frac{\partial}{\partial t} f(s, x, t, y) = -\frac{\partial}{\partial y} [A(t, y) f(s, x, t, y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B^2(t, y) f(s, x, t, y)]$$

gilt.

Man könnte auch diese zweite Gleichung ohne Hilfe der ersten direkt mit den Methoden des § 13 ableiten, aber in diesem Falle würde man neue schwierigere Voraussetzungen über die Funktion  $f(s, x, t, y)$  brauchen, welche hier nicht formuliert werden. Man würde dabei aus der zu (118) analogen Formel

$$(134) \quad \frac{f(s, x, t, y) - f(s, x, t - \Delta, y)}{\Delta} = f(s, x, t - \Delta, y) \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \Delta, z, t, y) dz - 1}{\Delta} \\ + \frac{\partial}{\partial y} f(s, x, t - \Delta, y) \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \Delta, z, t, y) (z - y) dz}{\Delta} \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(s, x, t - \Delta, y) \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \Delta, z, t, y) (z - y)^2 dz}{2\Delta} \\ + \theta \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \Delta, z, t, y) |z - y|^3 dz}{6\Delta}$$

ausgehen, dann beweisen, daß

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \Delta, z, t, y) |z - y|^3 dz}{\Delta} = 0,$$

ist und daß die Limites

$$(135) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \Delta, z, t, y) (z - y)^2 dz}{2\Delta} = B^2(t, y),$$

$$(136) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \Delta, z, t, y) (z - y) dz}{\Delta} = A^2(t, y),$$

$$(137) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \Delta, t, y) dz - 1}{\Delta} = \bar{N}(t, y), \quad \Delta \rightarrow 0,$$

existieren und so unsere zweite Gleichung in der Form

$$(138) \quad \frac{\partial}{\partial t} f(s, x, t, y) = \bar{N}(t, y) f(s, x, t, y) \\ + \bar{A}(t, y) \frac{\partial}{\partial y} f(s, x, t, y) + \bar{B}^2(t, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(s, x, t, y)$$

erhalten. Um diese letzte Form mit der früher gefundenen zu identifizieren, sollte man noch beweisen, daß

$$(139) \quad \bar{B}^2(t, y) = B^2(t, y),$$

$$(140) \quad \bar{A}(t, y) = -A(t, y) + \frac{\partial}{\partial y} B^2(t, y),$$

$$(141) \quad \bar{N}(t, y) = \frac{\partial}{\partial y} A(t, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} B^2(t, y)$$

ist.

### § 15.

#### Fragestellungen über Eindeutigkeit und Existenz der Lösungen für die zweite Differentialgleichung.

Um die Funktion  $f(s, x, t, y)$  durch die Differentialgleichungen (125) oder (133) eindeutig zu definieren, sollte man natürlich irgendwelche Anfangsbedingungen aufstellen. Für die zweite Gleichung (133) kann man folgendermaßen verfahren: Wegen der Formel (85) genügt die Funktion  $f(s, x, t, y)$  für jedes  $t > s$  der Bedingung

$$(142) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, y) dy = 1,$$

während man wegen der Bedingung (110) überdies

$$(143) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 f(s, x, t, y) dy \rightarrow 0, \quad t \rightarrow s,$$

hat. Die Hauptfrage über die Eindeutigkeit der Lösungen ist die folgende: *Unter welchen Bedingungen kann man behaupten, daß bei gegebenen  $s$  und  $x$  nur eine für alle Werte von  $y$  und  $t > s$  definierte nicht-negative Funktion von  $t$  und  $y$   $f(s, x, t, y)$  existieren kann, welche der Gleichung (133) und den Bedingungen (142) und (143) genügt?* In wichtigen Spezialfällen kann man auf diese Frage eine positive Antwort geben, zum Beispiel in allen Fällen, welche in den beiden nächsten Paragraphen betrachtet werden.

Es seien jetzt die Funktionen  $A(t, y)$  und  $B^2(t, y)$  a priori gegeben; man kann sich fragen, ob eine nicht-negative Funktion  $f(s, x, t, y)$  existiert, welche den Gleichungen (85) und (86) genügt (diese Forderungen sind, wie es in § 11 erklärt ist, notwendig, damit  $f(s, x, t, y)$  ein stochastisches

Schema definieren könnte) und nach dem Grenzübergang gemäß den Formeln (122) und (124) die gegebenen Funktionen  $A(t, y)$  und  $B^2(t, y)$  ergibt?

Zur Lösung einer solchen Aufgabe kann man zunächst etwa eine nicht-negative und den Bedingungen (142) und (143) genügende Lösung unserer zweiten Differentialgleichung (133) bestimmen und dann untersuchen, ob sie wirklich eine Lösung unserer Aufgabe darstellt. Dabei entstehen die zwei allgemeinen Fragen:

1. *Unter welchen Bedingungen existiert eine solche Lösung der Gleichung (133)?*

2. *Unter welchen Bedingungen kann man behaupten, daß diese Lösung wirklich den Gleichungen (85) und (86) genügt?*

Es bestehen alle Gründe, daß diese Bedingungen einen hinreichend umfassenden Charakter haben.

### § 16.

#### Der Bacheliersche Fall.

Wir nehmen jetzt an, daß  $f(s, x, t, y)$  beliebig von  $s$  und  $t$  abhängt und im übrigen Funktion von der Differenz  $y - x$  ist, d. h. daß unser Prozeß nach dem Parameter homogen ist:

$$(147) \quad f(s, x, t, y) = v(s, t, y - x).$$

Offenbar hängen in diesem Falle  $A(s, x)$  und  $B(s, x)$  nur von  $s$  ab, so daß man die Differentialgleichungen (125) und (133) in der Form

$$(148) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = -A(s) \frac{\partial f}{\partial x} - B^2(s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$(149) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -A(t) \frac{\partial f}{\partial y} + B^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

schreiben kann. Für die Funktion  $v(s, t, z)$  ergeben (148) und (149) die Gleichungen

$$(150) \quad \frac{\partial v}{\partial s} = A(s) \frac{\partial v}{\partial y} - B^2(s) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$(151) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -A(t) \frac{\partial v}{\partial z} + B^2(t) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Die Gleichung (151) war von Bachelier entdeckt<sup>13)</sup>, aber im richtigen Sinne dieses Wortes nicht bewiesen.

Wenn identisch  $A(t) = 0$  und  $B(t) = 1$  ist, so geht die Gleichung (133) bzw. (149) in die Wärmeleichung

$$(152) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

<sup>13)</sup> Siehe Fußnote \*) I und III.

über, deren einzige nicht-negative und den Bedingungen (142) und (143) genügende Lösung bekanntlich durch die Laplacesche Formel

$$(153) \quad f(s, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4(t-s)}}$$

gegeben ist.

Für den allgemeinen Fall setzen wir

$$\begin{aligned} x' &= x - \int_a^t A(u) du, & y' &= y - \int_a^t A(u) du, \\ s' &= \int_a^t B^2(u) du, & t' &= \int_a^t R^2(u) du. \end{aligned}$$

Dann geht die Gleichung (149) in

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

über, und die Bedingungen (142) und (143) erhalten für die neuen Veränderlichen  $s', x', t', y'$  dieselbe Form wie für  $s, x, t, y$ . Folglich ist im allgemeinen Falle

$$(154) \quad f(s, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t'-s')}} e^{\frac{(y'-x')^2}{4(t'-s')}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\beta}} e^{\frac{(y-\alpha)^2}{4\beta}}$$

$$\left( \beta = \int_a^t B^2(u) du, \quad \alpha = x + \int_a^t A(u) du \right)$$

die einzige unseren Bedingungen genügende Lösung von (149).

### § 17.

#### Eine Transformation.

Es sei

$$(155) \quad \begin{cases} s' = \varphi(s), & t' = \varphi(t), \\ x' = \psi(s, x), & y' = \psi(t, y), \\ f(s, x, t, y) = \frac{\partial \psi(t, y)}{\partial y} f'(s', x', t', y'), \end{cases}$$

wobei man voraussetzt, daß  $\varphi(t)$  stetig und nirgends abnehmend ist, während  $\psi(t, y)$  nach  $t$  beliebig ist und nach  $y$  eine stetige positive Ableitung hat. Wenn  $f(s, x, t, y)$  den Bedingungen (85) und (86) genügt, so gilt dasselbe, wie man es leicht nachrechnen kann, auch für die Funktion  $f'$  in bezug auf die neuen Variablen  $s', x', t', y'$ ; d. h. unsere Transformation führt zu einer neuen Funktion  $f'(s', x', t', y')$ , welche ebenso gut wie  $f(s, x, t, y)$  ein neues stochastisches Schema definiert.

Wenn  $\varphi(t)$  und  $\psi(t, y)$  die notwendigen Ableitungen besitzen, so gehen die Gleichungen (125) und (133) für die neuen Variablen in die



folgenden

$$(156) \quad \frac{\partial f'}{\partial s'} = -A'(s', x') \frac{\partial f'}{\partial x'} - B'^2(s', x') \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2},$$

$$(157) \quad \frac{\partial f'}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial y'} [A' f'] + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} [B'^2 f']$$

über, wobei

$$(158) \quad \left\{ \begin{aligned} A'(t', y') &= \frac{\frac{\partial^2 \psi(t, y)}{\partial y^2} B^2(t, y) + \frac{\partial \psi(t, y)}{\partial y} A(t, y) + \frac{\partial \psi(t, y)}{\partial t}}{\frac{\partial \varphi(t)}{dt}}, \\ B'^2(t', y') &= \frac{\left[ \frac{\partial \psi(t, y)}{\partial y} \right]^2 B^2(t, y)}{\frac{d\varphi(t)}{dt}} \end{aligned} \right.$$

gesetzt ist.

Man kann mit Hilfe der obigen Transformation die Lösungen von (133) für viele neue Typen der Koeffizienten  $A(t, y)$  und  $B^2(t, y)$  aufstellen. Es sei z. B.

$$(159) \quad \begin{cases} A(t, y) = a(t)y + b(t), \\ B^2(t, y) = c(t); \end{cases}$$

wir setzen

$$(160) \quad \begin{cases} \varphi(t) = \int c(t) e^{\int a(t) dt} dt, \\ \psi(t) = y e^{\int a(t) dt} + \int b(t) e^{\int a(t) dt} dt \end{cases}$$

und erhalten für die neuen Veränderlichen  $s', x', t', y', f'$  die einfachste Wärmeleichung

$$(161) \quad \frac{\partial f'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 f'}{\partial y'^2}.$$

Dabei bleiben die Anfangsbedingungen (142) und (143) für  $f'(s', x', t', y')$  ungeändert, folglich gibt die Formel

$$(162) \quad f' = \frac{1}{\sqrt{\pi(t' - s')}} e^{-\frac{(y' - x')^2}{4(t' - s')}}.$$

zusammen mit (160) und (155) die einzige unseren Bedingungen genügende Lösung  $f(s, x, t, y)$  der Gleichung (133) mit Koeffizienten von der Form (159). Man kann leicht sehen, daß in diesem Falle die Funktion  $f(s, x, t, y)$  notwendig von der Form

$$(163) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi\beta}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4\beta}}$$

ist, wobei  $\alpha$  und  $\beta$  nur von  $s, x, t$  und nicht von  $y$  abhängen. Es ist ein wichtiges Problem, alle möglichen Typen der Koeffizienten  $A(t, y)$  und  $B^2(t, y)$  zu finden, für welche man bei beliebigen  $s, x, t$  immer die Laplacesche Verteilungsfunktion (163) erhält.

Als ein zweites Beispiel betrachten wir den Fall

$$(164) \quad \begin{cases} A(t, y) = a(t)(y - c), \\ B^2(t, y) = b(t)(y - c)^2. \end{cases}$$

Wenn man jetzt

$$(165) \quad \begin{cases} \varphi(t) = \int b(t) dt, \\ \psi(t) = \lg(y - c) + \int [b(t) - a(t)] dt \end{cases}$$

setzt, so erhält man für  $f'(s', x', t', y')$  wieder die Gleichung (161), für welche man die Lösung (162) schon kennt. Es sei bemerkt, daß man dabei nur die Werte  $x > c$ ,  $y > c$  zu betrachten hat, da, wenn  $x$  oder  $y$  sich von  $c$  bis  $+\infty$  ändert,  $x'$  bzw.  $y'$  alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchläuft. Einige Schwierigkeiten, welche im Zusammenhang mit diesen Umständen mit der Übertragung der Bedingungen (142) und (143) auf  $f'$  entstehen, kann man leicht vermeiden.

Insbesondere hat man im Falle

$$(166) \quad A(t, y) = 0, \quad B^2(t, y) = y^2$$

die Formel

$$(107) \quad f(s, x, t, y) = \frac{1}{y\sqrt{\pi(t-s)}} e^{\frac{(\lg y + t - \lg x - s)^2}{4(t-s)}}$$

Vom Standpunkte der Anwendungen ist der Fall, in welchem  $A(t, y)$  und  $B(t, y)$  nur von  $y$  und nicht von der Zeit  $t$  abhängen, der wichtigste. In dieser Richtung wäre das nächste zu erzielende Ergebnis die Lösung unseres Problems für Koeffizienten von der Form

$$(168) \quad \begin{cases} A(y) = ay + b, \\ B^2(y) = cy^2 + dy + e. \end{cases}$$

### § 18.

#### Die stabilen Verteilungsfunktionen.

Wenn für ein Zeitmoment  $t$  eine differentiale Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion  $g(t_0, y)$  gegeben ist, so wird analog zu der allgemeinen Formel (5) die Verteilungsfunktion  $g(t, y)$  für beliebige  $t > t_0$  durch die Formel

$$(169) \quad g(t, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_0, x) f(t_0, x, t, y) dx$$

gegeben. Offensichtlich genügt  $g(t, y)$  der Gleichung

$$(170) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} [A(t, y)g] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(t, y)g].$$

Wir setzen jetzt voraus, daß die Koeffizienten  $A(t, y)$  und  $B(t, y)$  nur von  $y$  abhängen (Homogenität des Prozesses nach der Zeit) und unter-

suchen, welche Funktionen  $g(t, y)$  unverändert mit der Zeit bleiben. Offenbar ist für eine solche Funktion

$$(171) \quad Ag + B^2 g' = C.$$

Wenn man voraussetzt, daß  $g$  und  $g'$  für  $y = \pm \infty$  gegen Null konvergieren und dabei so schnell, daß dasselbe auch von der linken Seite von (171) gilt, ist offenbar  $C = 0$  und man hat

$$(172) \quad \frac{g'}{g} = -\frac{A - (B^2)'}{B^2}.$$

Außerdem soll die Funktion die  $g(y)$  die Bedingung

$$(173) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g dy = 1$$

erfüllen.

In den meisten Fällen kann man beweisen, daß, wenn eine stabile Lösung  $g(x)$  existiert, so  $f(s, x, t, y)$  bei  $t \rightarrow \infty$  und beliebigen Konstanten  $s$  und  $x$  gegen  $g(y)$  konvergiert; auf diese Weise erkennt man  $g(y)$  nicht nur als stabile Lösung sondern auch als *Grenzlösung*.

Wenn die Koeffizienten  $A$  und  $B^2$  von der Form (168) sind, fällt (172) mit der Pearsonschen Gleichung

$$(174) \quad \frac{g'}{g} = -\frac{y - p}{q_0 + q_1 y + q_2 y^2}$$

zusammen, wobei

$$(175) \quad p = \frac{d-b}{a-2c}, \quad q_0 = \frac{c}{a-2c}, \quad q_1 = \frac{d}{a-2c}, \quad q_2 = \frac{e}{a-2c}$$

gesetzt ist. Wir können also *stochastische Schemata konstruieren, welche als Stabillösung eine beliebige Pearsonsche Verteilungsfunktion haben*.

## § 19.

### Andere Möglichkeiten.

Die in den Paragraphen 13 bis 18 entwickelte Theorie beruht wesentlich auf der Bedingung (111). Wenn man diese Bedingung wegfällt läßt, entstehen sogar unter Geltung der Bedingung (110) manche neue Möglichkeiten. Als Beispiel betrachten wir das durch die Verteilungsfunktion

$$(176) \quad F(s, x, t, y) = e^{-s(u-s)} \sigma(y-x) + [1 - e^{-s(u-s)}] \int_{-\infty}^y u(z) dz$$

definierte Schema, wobei  $\sigma(z) = 0$  für  $z < 0$  und  $\sigma(z) = 1$  für  $z \geq 0$ , während  $u(z)$  eine stetige nicht negative Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(z) dz = 1$$

und den endlichen Momenten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(z) |z|^i dz \quad (i = 1, 2, 3)$$

ist. Daß  $F(s, x, t, y)$  die Forderungen (78) und (79) ebenso wie (110) befriedigt, kann man ohne Schwierigkeiten nachrechnen.

Man kann dieses Schema so deuten: Im Laufe des unendlich kleinen Zeitintervalles  $(t, t + dt)$  bleibt der Parameter  $y$  mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - a dt$  ohne Änderung und geht in  $y', z < y' < z + dz$  mit der Wahrscheinlichkeit  $au(z) dt dz$  über. Man hat also in jedem Zeitintervalle die Möglichkeit eines Sprunges, wobei die Verteilungsfunktion für die Werte des Parameters  $y$  nach dem Sprunge von dem vorigen Werte desselben Parameters unabhängig ist.

Es sei für  $t = t_0$  eine stetige differentiale Verteilungsfunktion  $g(t_0, y)$  gegeben. Für beliebige  $t > t_0$  ist

$$g(t, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_0, y) dF(t_0, x, t, y) = e^{-a(t-t_0)} g(t_0, y) + [1 - e^{-a(t-t_0)}] u(y).$$

Man könnte das oben gegebene Schema folgendermaßen verallgemeinern: man denke, daß im Laufe des unendlich kleinen Zeitintervalles  $(t, t + dt)$  der Parameter  $y$  mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - a(t, y) dt$  unverändert bleibt und in  $y', z < y' < z + dz$  mit der Wahrscheinlichkeit  $u(t, y, z) dt dz$  übergeht. Dabei ist natürlich

$$(177) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, y, z) dz = a(t, y)$$

vorausgesetzt. In diesem Falle dürfte man erwarten, daß für  $g(t, y)$  die Integrodifferentialgleichung

$$(178) \quad \frac{\partial}{\partial t} g(t, y) = -a(t, y) g(t, y) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, z) u(t, z, y) dz$$

gelten wird.

Wenn man nicht nur die Sprünge, sondern auch die stetige Änderung von  $y$  betrachten will, so ist es natürlich, für  $g(t, y)$  die Gleichung

$$(179) \quad \frac{\partial}{\partial t} g(t, y) = -a(t, y) g(t, y) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, z) u(t, z, y) dz \\ - \frac{\partial}{\partial y} [A(t, y) g(t, y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B^2(t, y) g(t, y)]$$

zu erwarten, wobei (177) vorausgesetzt ist und  $A(t, y)$  und  $B^2(t, y)$  die in § 13 erklärte Bedeutung haben.

**Schlußbemerkung.**

Wenn der Zustand des zu betrachtenden Systems durch  $n$  reelle Parameter  $x_1, x_2, \dots, x_n$  definiert ist, hat man unter einigen Bedingungen, die denen in § 13 eingeführten analog sind, folgende Differentialgleichungen für die differentiale Verteilungsfunktion  $f(s, x_1, x_2, \dots, x_n, t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ :

$$180) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = - \sum_{i=1}^n A_i(s, x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij}(s, x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$(181) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} [A_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) f] \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [B_{ij}(t, y_1, y_2, \dots, y_n) f]. \end{aligned}$$

Für den Fall, in welchem  $A_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  und  $B_{ij}(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  nur von  $t$  abhängen, wurden diese Gleichungen von Bachelier entdeckt und gelöst<sup>14)</sup>. Die Lösungen, welche den Bedingungen unseres Problems genügen, sind in diesem Falle von der Form

$$(182) \quad f = P e^{-\frac{\sum p_{ij}(y_i - q_i)(y_j - q_j)}{Q}},$$

wobei  $P, Q, p_{ij}$  und  $q_i$  nur von  $s$  und  $t$  abhängen.

Man könnte noch die gemischten Schemata betrachten, in welchen der Zustand des Systems durch Parameter definiert ist, unter welchen sowohl stetige als auch diskrete vorkommen.

<sup>14)</sup> Siehe \*) II.

# Über ein algebraisches Problem von Herrn Hilbert.

Erste Abhandlung.

Von

N. Tschebotaröw in Kasan (UdSSR).

Herr D. Hilbert hat kürzlich eine schöne Arbeit<sup>1)</sup> einer Frage gewidmet, die er schon früher gestellt hat<sup>2)</sup>.

Es sei eine algebraische Gleichung  $n$ -ten Grades

$$(1) \quad f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

mit den unbeschränkt veränderlichen Koeffizienten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  gegeben. Man finde eine Gleichung (Resolvente)  $n$ -ten Grades

$$(2) \quad \varphi(y) = y^n + \Pi_1 y^{n-1} + \dots + \Pi_{n-1} y + \Pi_n = 0$$

derart, daß jede Wurzel von (1) sich rational (oder mit Hilfe einer vorgeschriebenen rationalen Funktion  $\Phi$  der Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der Gleichung (1), die zu einer vorgeschriebenen Untergruppe der Galoisschen Gruppe der Gleichung (1) gehört; z. B.  $\sqrt[n]{D}$ , wo  $D$  die Diskriminante der Gleichung (1) ist) durch eine Wurzel der Gleichung (2) bei geeigneten Werten von  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$  darstellbar ist, wo  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$  Funktionen sind, die von einer möglichst kleinen Anzahl  $k$  von Parametern abhängen. Dabei sollen  $p_1, p_2, \dots, p_n$  als zum Rationalitätsbereich gehörig betrachtet werden.

Mit Hilfe sehr kunstvoller Methoden findet Herr Hilbert für  $k$  folgende Werte:

$$n = 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9,$$

$$k \leq 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4.$$

In dieser Arbeit beabsichtige ich, dieses Problem allgemein zu lösen. Dazu bediene ich mich der Theorie der kontinuierlichen Transformations-

<sup>1)</sup> D. Hilbert, Über die Gleichung neunten Grades, Math. Annalen 97 (1926), S. 243–250.

<sup>2)</sup> D. Hilbert, Mathematische Probleme. Gött. Nachr. 1900, Nr. 13, S. 280.

gruppen (im folgenden kurz k. T. G. geschrieben). Ich suche nämlich ein Problem der „Einkleidung“ der Gruppen von endlicher Ordnung zu lösen, d. h. eine k. T. G. von möglichst kleiner Parameterszahl zu finden, die die vorgeschriebene Gruppe als Teiler enthält<sup>3)</sup>.

Haben wir nun die Galoissche Gruppe der Gleichung (1) mittels einer k. T. G.  $\Gamma$  „einge kleidet“, dann erweist es sich, daß die gesuchte Zahl  $k$  gleich der Dimension des kleinsten Raumes ist, auf den man  $\Gamma$  so abbilden kann, daß den Permutationen von  $\mathfrak{G}$  die wirklichen (d. h. von der Identität verschiedenen) Transformationen dieser Abbildung entsprechen.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung fünften Grades.  $\mathfrak{G}$  sei ihre alternierende Gruppe. Sie ist bekanntlich mit der Ikosaedergruppe einstufig isomorph. Die Ikosaedergruppe ist aber die Gruppe von höchster Ordnung, welche als eine Gruppe gebrochener linearer Transformationen dargestellt werden kann. Andererseits ist jede k. T. G. im eindimensionalen Raume mit einem Teiler der Gruppe der gebrochenen linearen Transformationen einstufig isomorph. Dies besagt erstens, daß man eine Resolvente fünften Grades finden kann, deren Koeffizienten nur von einem Parameter abhängen. Diese Tatsache ist aber wohlbekannt<sup>4)</sup>, und gerade sie hat mich angeregt, diesen Zusammenhang für Gleichungen beliebigen Grades nachzuweisen.

Zweitens schließen wir, daß man keine allgemeine Gleichung höheren Grades auf eine einparametrische Resolvente zurückführen kann.

In § 1 untersuche ich die Frage der Einkleidung der Gruppen endlicher Ordnung mittels k. T. G. Diese Frage kann im wesentlichen auf das Iterationsproblem<sup>5)</sup>, <sup>6)</sup> zurückgeführt werden. Ich zeige, daß jede Transformationsgruppe von endlicher Ordnung stets mit Hilfe des Iterationsverfahrens einge kleidet werden kann. Ist insbesondere die zu iterierende Transformation linear (was z. B. für Permutationsgruppen der Fall ist), so kann man auch lineare Iterationsfunktionen finden, so daß ihre Aufstellung keine Schwierigkeiten bietet.

In § 2 führe ich das Problem, eine k. T. G. auf einen Raum möglichst kleiner Dimensionszahl abzubilden, auf die Aufsuchung gewisser Imprimitivitätssysteme zurück. Diese Aufgabe wurde von den Herren S. Lie und F. Engel<sup>7)</sup> vollständig gelöst. Ihre Lösung erfordert nur die Anwendung algebraischer Operationen.

<sup>3)</sup> Vgl. W. Burnside, On the Continuous Group that is defined by any given Group of Finite Order. Proc. Lond. Math. Soc. 29 (1898), S. 207—224; S. 546—565.

<sup>4)</sup> Vgl. H. Weber, Lehrbuch der Algebra 1, 1. Aufl., Braunschweig 1898, S. 675.

<sup>5)</sup> L. Leau, Étude sur les équations fonctionnelles ..., Toul. Annales 11 (1897).

<sup>6)</sup> P. Fatou, Sur l'itération analytique et les substitutions permutables. Journ. de math. (9) 2 (1923), S. 343; (9) 3 (1924), S. 1.

<sup>7)</sup> Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen 1, Leipzig 1888, S. 522, Theorem 92.

In § 3 löse ich das gestellte Resolventenproblem. Dazu kleide ich die Galoissche Gruppe der Gleichung (1) mittels einer k. T. G. ein und finde sodann für sie den in § 2 beschriebenen Unterraum. Es ist von Wichtigkeit, daß diese Aufgaben durch bloße algebraische Operationen ausführbar sind. Um aber zu beweisen, daß wir auf diese Weise alle möglichen Lösungen des Problems erhalten, sind gewisse Bedingungen über die Holomorphie der zu betrachtenden Funktionen notwendig.

§ 1.

### Einkleidung der Gruppen von endlicher Ordnung mittels der k. T. G.

Es sei eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  von endlicher Ordnung gegeben. Man finde eine k. T. G.  $\Gamma$  von möglichst kleiner Parameterzahl, die die Gruppe  $\mathfrak{G}$  als Teiler enthält. Dies bedeutet, daß gewisse Transformationen der Gruppe  $\Gamma$ , die den Systemen  $A_1, A_2, \dots, A_s$  von Werten der Parameter der Gruppe  $\Gamma$  (wir wollen sagen: den Punkten  $A_1, A_2, \dots, A_s$  des *Parameter-raumes*) entsprechen mögen, unter sich eine Gruppe von der Ordnung  $m$  bilden, die mit der Gruppe  $\mathfrak{G}$  einstufig isomorph ist.

Diese Aufgabe wurde im wesentlichen von den Herren Burnside<sup>3)</sup> und Le Vasseur<sup>4)</sup> gelöst. Der von mir eingeschlagene Weg unterscheidet sich dadurch, daß ich nicht abstrakte Elemente, sondern bestimmte funktionale Transformationen zugrunde lege. Ist z. B. eine Permutationsgruppe  $\mathfrak{G}$  gegeben, so betrachte ich ihre Permutationen  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_a & x_a & \dots & x_{a_n} \end{pmatrix}$  als gewisse lineare Transformationen der Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Gruppe  $\mathfrak{G}$  zyklisch ist. Es sei eine Transformation

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

gegeben. Man finde eine einparametrische k. T. G. derart, daß ihre Transformation für den Wert  $t=0$  des Parameters  $t$  in die Identität  $x'_i = x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) und für den Wert  $t=1$  in die Transformation (1) übergeht. Mit anderen Worten, wir finden ein System von Funktionen

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t),$$

<sup>a)</sup> R. Le Vavasseur, Quelques considérations sur les groupes d'ordre fini et les groupes finis continus. Lyon-Paris 1904.





der Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Transformation (1') in die Gestalt

$$(1'') \quad \begin{aligned} x'_1 &= \varepsilon_1 x_1 + b_{111} x_1^2 + \dots, \\ x'_2 &= \varepsilon_2 x_2 + b_{211} x_1^2 + \dots, \\ &\vdots \\ x'_n &= \varepsilon_n x_n + b_{n11} x_1^2 + \dots \end{aligned}$$

bringen, wobei  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  gewisse  $m$ -te Einheitswurzeln sind.

Um die Transformation einer k.T.G. wirklich aufzustellen, führen wir noch neue Veränderlichen ein. Ist

$$(2) \quad x'_1 = f_1^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x'_2 = f_2^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dots, \\ x'_n = f_n^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

die  $k$ -te Iteration der Transformation (1''), so betrachten wir die Veränderlichen

$$(3) \quad \begin{aligned} z_1 &= x_1 + \varepsilon_1^{-1} f_1^{(1)} + \varepsilon_1^{-2} f_1^{(2)} + \dots + \varepsilon_1^{-m+1} f_1^{(m-1)} = \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ z_2 &= x_2 + \varepsilon_2^{-1} f_2^{(1)} + \varepsilon_2^{-2} f_2^{(2)} + \dots + \varepsilon_2^{-m+1} f_2^{(m-1)} = \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ z_n &= x_n + \varepsilon_n^{-1} f_n^{(1)} + \varepsilon_n^{-2} f_n^{(2)} + \dots + \varepsilon_n^{-m+1} f_n^{(m-1)} = \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß die Reihenentwicklungen der Funktionen (2) folgendermaßen beginnen:

$$f_i^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varepsilon_i^k x_i + \dots$$

Die Entwicklungen der Funktionen (3) lauten also:

$$z_1 = m x_1 + \dots, \quad z_2 = m x_2 + \dots, \quad \dots, \quad z_n = m x_n + \dots$$

Daraus folgt, daß man umgekehrt die  $x_1, x_2, \dots, x_n$  als in der Umgebung von  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  holomorphe Funktionen von  $z_1, z_2, \dots, z_n$  darstellen kann.

Führen wir in den Funktionen (3) die Transformation (1) aus, so erhalten wir die Funktionen  $z'_1, z'_2, \dots, z'_n$ , die mit den  $z_1, z_2, \dots, z_n$  in folgender Beziehung stehen:

$$(4) \quad z'_1 = \varepsilon_1 z_1 = g_1(z), \quad z'_2 = \varepsilon_2 z_2 = g_2(z), \quad \dots, \quad z'_n = \varepsilon_n z_n = g_n(z).$$

Nun sei  $\varepsilon_k = e^{\frac{2\pi i a_k}{m}}$ . Die Transformation

$$(5) \quad z'_k = e^{\frac{2\pi i a_k t}{m}} \cdot z_k = g_k(z_1, z_2, \dots, z_n, t) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

genügt offenbar unseren Bedingungen A, B, C. Diese Bedingungen bestimmen aber eine eingliedrige k.T.G., die die zyklische Gruppe, die aus den Potenzen der Transformation (4) besteht, als Teiler enthält.

Um zu den ursprünglichen Veränderlichen überzugehen, ist notwendig, das System von Gleichungen

$$(6) \quad \Phi_k(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = e^{\frac{2\pi i a_k}{m}} \Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

nach  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  aufzulösen, was stets möglich ist, wie wir es gesehen haben.

Nun gehen wir zu dem Fall über, daß  $\mathfrak{G}$  nicht zyklisch ist. Wir wählen in  $\mathfrak{G}$  ein System  $A_1, A_2, \dots, A_s$  von erzeugenden Permutationen, so daß man jedes Element von  $\mathfrak{G}$  in der Gestalt

$$A_i A_k A_l \dots$$

darstellen kann. Dann finden wir die den Permutationen  $A_1, A_2, \dots, A_s$  entsprechenden einparametrischen k. T. G., die durch ihre infinitesimale Operationen  $X_1(f), X_2(f), \dots, X_s(f)$  erzeugt werden mögen. Um die kleinste k. T. G. zu finden, die diese Operatoren enthält, bilden wir alle möglichen Operatoren  $X_i(f), (X_i, X_j)f, (X_i, (X_j, X_l))f$ , usw. und erkennen, wie viele dieser Operatoren voneinander linear (mit konstanten Koeffizienten) unabhängig sind. Ihre Anzahl ist in unserem Falle sicher endlich, falls diese Gruppe linear ist, also ein Teiler der homogenen linearen k. T. G. ist, welche  $n^2$ -gliedrig ist.

## § 2.

### Ein Problem aus der Theorie der k. T. G.

Es sei eine k. T. G.

$$(1) \quad \Gamma: x'_i = f_i(x_j, a_l) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, r)$$

gegeben. Man finde ein System von Funktionen

$$(2) \quad u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

in einer möglichst kleinen Anzahl  $k$ , welches die Eigenschaft besitzen soll, daß die Funktionen

$$u_i(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

nur von  $u_1, u_2, \dots, u_k; a_1, a_2, \dots, a_r$  abhängen. Dabei soll jede Transformation einer endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$ , aus welcher die Gruppe  $\Gamma$  durch Einkleidung entstand, eine wirkliche (d. h. nicht identische) Transformation unter den  $u_1, u_2, \dots, u_k$  hervorrufen.

Es ist ersichtlich, daß die Mannigfaltigkeiten

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad \dots, \quad u_k = C_k$$

ein Imprimitivitätssystem der Gruppe  $\Gamma$  bilden. Umgekehrt entspricht jedem Imprimitivitätssystem der Gruppe  $\Gamma$  ein System von Funktionen (2). Somit sind wir in der Lage, alle Imprimitivitätssysteme der Gruppe  $\Gamma$  zu bestimmen.

Dieses Problem ist von den Herren Lie und Engel vollständig gelöst (loc. cit., Anm. 7)). Wir führen textuell die Formulierung ihres Resultates an:

„Theorem 92. Ist eine  $r$ -gliedrige transitive Gruppe  $G_r$  des Raumes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vorgelegt, so findet man alle etwaigen bei dieser Gruppe invarianten Zerlegungen des Raumes folgendermaßen:

Man bestimme zunächst die  $(r-s)$ -gliedrige Untergruppe  $G_{r-s}$  der  $G_r$ , bei welcher irgendein Punkt  $P$  invariant bleibt, der auf keiner bei der  $G_r$  invarianten Mannigfaltigkeit liegt. Sodann suche man alle Untergruppen der  $G_r$  auf, welche die  $G_{r-s}$  enthalten. Ist  $G_{r-s+h}$  eine von diesen Untergruppen, so führe man auf  $P$  alle Transformationen der Gruppe  $G_{r-s+h}$  aus; dabei nimmt der Punkt  $P \infty^h$  verschiedene Lagen an, die eine  $h$ -fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit  $M$  bilden; führt man nunmehr auf  $M$  alle Transformationen der  $G_r$  aus, so nimmt  $M \infty^{n-h}$  verschiedene Lagen an, die eine bei der  $G_r$  invariante Zerlegung des Raumes bestimmen. Behandelt man in dieser Weise alle Untergruppen der  $G_r$ , welche die  $G_{r-s}$  umfassen, so erhält man alle bei der  $G_r$  invarianten Zerlegungen.“

Da man aber alle Untergruppen einer k. T. G. auf algebraischem Wege auffinden kann (ebenda, S. 208 ff., § 56), so sehen wir, daß die  $u_1, u_2, \dots, u_k$  algebraische Funktionen der  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sind, jedenfalls wenn  $\Gamma$  transitiv ist. Ist aber  $\Gamma$  intransitiv, so lesen wir weiter im Buche von Lie und Engel folgendes ab:

„Das Theorem 92 zeigt, daß man alle bei einer transitiven Gruppe invarianten Zerlegungen ohne Integration finden kann, wenn die endlichen Gleichungen der Gruppe bekannt sind. Dasselbe gilt auch für intransitive Gruppen, doch bedarf man, um das einzusehen, ziemlich langer Überlegungen, welche hier auseinanderzusetzen nicht zweckmäßig sein dürfte.“

Um die zweite Bedingung zu erklären, bestimme man den größten Teiler  $\Gamma_1$  der Gruppe  $\Gamma$ , welcher jede einzelne der Funktionen  $u_i$  nicht ändert. Um die zweite Bedingung zu erfüllen, verlangen wir, daß  $\Gamma_1$  keine Transformation der Gruppe enthält.

Ist insbesondere  $\mathfrak{G}$  einfach (wie dies z. B. bei alternierenden Gruppen und  $n > 4$  der Fall ist), so bietet diese Bedingung keine neue Frage. Da nämlich in der Abbildung von  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  auf  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  die Gruppe  $\mathfrak{G}$  in eine ihrer Faktorgruppen abgebildet werden muß, so kann das entweder die Einheitsgruppe oder  $\mathfrak{G}$  selbst sein. Im ersten Falle enthält  $\Gamma_1$  die ganze Gruppe  $\mathfrak{G}$ . Dies zeigt, daß wir in der Rolle von  $\Gamma$  die Gruppe  $\Gamma_1$  nehmen konnten, d. h. daß wir  $\mathfrak{G}$  nicht mittels einer k. T. G. von möglichst kleiner Parameterzahl eingekleidet haben.

Ist  $\mathfrak{G}$  dagegen nicht einfach, besitzt sie etwa einen Normalteiler  $\mathfrak{H}$ , so können wir das Grundproblem zergliedern, indem wir es getrennt für  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  lösen.

3.

### Das Resolventenproblem.

Wir kehren zum gestellten Grundproblem zurück. Wir betrachten die Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der Gleichung

$$(1) \quad f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

als unabhängige Veränderlichen. Hängen die Koeffizienten der Gleichung

$$(2) \quad \varphi(y) = y^n + \Pi_1 y^{n-1} + \dots + \Pi_{n-1} y + \Pi_n = 0$$

von  $k$  Parametern ab, so findet dies auch für ihre Wurzeln  $y_1, y_2, \dots, y_n$  statt. Um auszudrücken, daß  $y_1$  rational durch etwa  $x_1$  und  $p_1, p_2, \dots, p_n, \Phi$  darstellbar ist, setzen wir fest:

1.  $y_1$  ist eine rationale Funktion von  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , die zu derjenigen Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  gehört, die  $x_1$  nicht ändert;

2. die  $y_1, y_2, \dots, y_n$  entstehen, wenn wir auf dem Ausdruck  $y_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  alle Permutationen der Gruppe  $\mathfrak{G}$  ausführen.

Der Satz von Lagrange besagt, daß  $x_1$  und  $y_1$  gegenseitig rational mit Hilfe der Koeffizienten  $p_1, p_2, \dots, p_n, \Phi$  darstellbar sind. Man kann die Aufgabe etwas allgemeiner fassen, indem man die Forderung „rationale Funktion“ wegwirft.

Es ist bequemer, statt  $y$ , die Funktion

$$(3) \quad u_1 = t_1 y_1 + t_2 y_2 + \dots + t_n y_n$$

einzuführen, wobei  $t_1, t_2, \dots, t_n$  rationale Zahlen sind, die so gewählt sein sollen, daß die mit  $u_1$  konjugierten (d. h. aus  $u_1$  durch Permutationen der Gruppe  $\mathfrak{G}$  entstandenen) Funktionen  $u_1, u_2, \dots, u_m$  lauter verschiedene sind. Dann gehört  $u_1$  zur identischen Permutation. Andererseits hängen  $u_1, u_2, \dots, u_m$  nur von  $k$  wesentlichen Parametern ab, da das von  $y_1, y_2, \dots, y_n$  gilt. Mit anderen Worten, das System  $u_1, u_2, \dots, u_m$  enthält nur  $k$  funktionale unabhängige Funktionen.

Es sei  $A$  eine erzeugende Transformation von der Ordnung  $s$  der Gruppe  $\mathfrak{G}$ , die unter den  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Permutation  $S$ , unter den  $u_1, u_2, \dots, u_n$  die Permutation  $\Sigma$  bewirkt. Wir ordnen jedem Wurzelzyklus von  $\Sigma$  und  $S$  ein neues System von Funktionen

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n,$$

$$\bar{x}_s = \bar{x}_1 + \varepsilon \bar{x}_2 + \dots + \varepsilon^{s-1} \bar{x}_s,$$

• • • • •

$$z_s = x_1 + \varepsilon^{s-1} x_2 + \dots + \varepsilon^{(s-1)(n-1)} x_n;$$

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_s,$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_1 + \varepsilon \bar{u}_2 + \dots + \varepsilon^{s-1} \bar{u}_s,$$

$$\bar{v} = \bar{u}_1 + e^{s-1} \bar{u}_2 + \dots + e^{(s-1)^2} \bar{u}_s$$

zu, wobei  $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{s}}$  ist und die in Rede stehenden Zyklen die Gestalt  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s)$  bzw.  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_s)$  haben. Auf diese Weise erhalten wir zwei Systeme  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  und  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  von Funktionen.  $A$  bewirkt unter diesen Funktionen folgende Transformation:

$$(4) \quad v'_1 = \varepsilon^{\alpha_1} v_1, \quad v'_2 = \varepsilon^{\alpha_2} v_2, \quad \dots, \quad v'_m = \varepsilon^{\alpha_m} v_m,$$

$$(5) \quad z'_1 = \varepsilon^{\beta_1} z_1, \quad z'_2 = \varepsilon^{\beta_2} z_2, \quad \dots, \quad z'_n = \varepsilon^{\beta_n} z_n,$$

wobei  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  gewisse ganze rationale Zahlen sind. Man kann leicht auch  $u_1, u_2, \dots, u_m$  durch  $v_1, v_2, \dots, v_m$  und  $x_1, x_2, \dots, x_n$  durch  $z_1, z_2, \dots, z_n$  linear ausdrücken. Somit enthält das System  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  genau  $k$  und das System  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  genau  $n$  funktional unabhängige Funktionen. Es seien etwa  $v_1, v_2, \dots, v_k$  funktional unabhängig. Wir vervollständigen das System  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  mit Hilfe gewisser  $n - k$  Veränderlichen des Systems  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  so, daß das vervollständigte System  $(v_1, v_2, \dots, v_k; z_{k+1}, \dots, z_n)$  genau  $n$  funktional unabhängige Funktionen enthält.

Nun nehmen wir als eine einparametrische k.T.G., welche die Gruppe  $(1, A, A^2, \dots, A^{s-1})$  einkleidet, folgende Gruppe:

$$(6) \quad v'_1 = e^{\frac{2\pi i \alpha_1 \cdot t}{s}} \cdot v_1, \quad v'_2 = e^{\frac{2\pi i \alpha_2 \cdot t}{s}} \cdot v_2, \quad \dots, \quad v'_k = e^{\frac{2\pi i \alpha_k \cdot t}{s}} \cdot v_k,$$

$$(7) \quad z'_{k+1} = e^{\frac{2\pi i \beta_{k+1} \cdot t}{s}} \cdot z_{k+1}, \quad z'_{k+2} = e^{\frac{2\pi i \beta_{k+2} \cdot t}{s}} \cdot z_{k+2}, \quad \dots, \quad z'_n = e^{\frac{2\pi i \beta_n \cdot t}{s}} \cdot z_n,$$

wo  $t$  der Parameter dieser Gruppe ist. Es folgt aus (4), (5), daß die Transformation (6), (7) sich bei  $t = 1$  in  $A$  verwandelt.

Man kann aus diesen Gleichungen die  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  als Funktionen von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  erhalten, die die gesuchte einparametrische k.T.G. definieren. Verfahren wir auf diese Weise mit allen erzeugenden Transformationen von  $\mathfrak{G}$ , so erhalten wir eine k.T.G.  $\Gamma$ , die die ganze Gruppe  $\mathfrak{G}$  einkleidet. Das System  $u_1, u_2, \dots, u_k$  ist offenbar ein Imprimitivitätssystem von  $\Gamma$ . Die Transformationen von  $\mathfrak{G}$  bewirken unter den  $u_1, u_2, \dots, u_m$  eine Permutationsgruppe, die mit  $\mathfrak{G}$  einstufig isomorph ist, w. z. b. w.

Nun setzen wir umgekehrt voraus, daß eine k.T.G.  $\Gamma$ , die die Galoissche Gruppe  $\mathfrak{G}$  der Gleichung (1) einkleidet, ein Imprimitivitätssystem

$$(8) \quad u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad \dots, \quad u_k = C_k$$

besitzt. Dabei soll keine Permutation von  $\mathfrak{G}$  alle Funktionen  $u_1, u_2, \dots, u_k$  invariant bleiben lassen. Aus § 2 entnehmen wir, daß man alle möglichen Imprimitivitätssysteme auf algebraischem Wege aufstellen kann. Somit dürfen wir annehmen,  $u_1, u_2, \dots, u_k$  seien algebraische Funktionen von  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Die Funktionen  $u_1, u_2, \dots, u_k$  müssen, der Definition unseres Imprimittivitätssystems zufolge, gegenüber einer Untergruppe  $\Gamma_1$  von  $\Gamma$  invariant bleiben, deren Faktorgruppe  $\Gamma_2$  eine mit  $\mathcal{G}$  isomorphe Gruppe enthält. Die Veränderlichen  $u_1, u_2, \dots, u_k$  erzeugen eine k. T. G.  $\Gamma_2$ , die nach der Ausdrucksweise von O. Schreier<sup>9)</sup> mit  $\Gamma_2$  „im kleinen isomorph“ ist<sup>10)</sup>.

Wir wollen beweisen, daß eine mit  $\mathcal{G}$  oder wenigstens mit einer Faktorgruppe in bezug auf das Zentrum isomorphe Gruppe auch in  $\Gamma_2$  enthalten ist. Dazu wiederholen wir eine tiefgreifende Überlegung von O. Schreier (loc. cit., S. 20, Satz 8). Es sei  $\Theta$  eine Untergruppe von  $\Gamma_2$ , die bei der Abbildung von  $\Gamma_2$  auf  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  in die Identität übergeht. Da  $\Gamma_2$  und  $\Gamma_2$  „im kleinen isomorph“ sind, d. h. die gleiche Parameterzahl haben, so muß  $\Theta$  eine diskrete Gruppe sein. Wir wählen in  $\Theta$  eine Transformation  $A$  und betrachten den Ausdruck  $X^{-1}AX$ , wo  $X$  eine sich stetig von 1 an bis zu einer beliebigen Transformation von  $\Gamma_2$  ändernde Transformation ist. Da die Transformation  $X^{-1}AX$  stetig von  $X$  abhängt, während sie als Transformation von  $\Theta$  sich nur unstetig ändern muß, so bleibt  $X^{-1}AX$  ungeändert. Dies zeigt, daß  $\Theta$  im Zentrum von  $\Gamma_2$  liegt, w. z. b. w. Ist insbesondere  $\mathcal{G}$  eine Gruppe ohne Zentrum, so ist  $\Theta = 1$ .<sup>10)</sup>

Wir wollen beweisen: Sind  $u_1, u_2, \dots, u_k$  irgend bestimmte Wertebestimmungen (Zweige) der in Rede stehenden mehrdeutigen Funktionen, so ist jede andere Wertebestimmung  $u'_i$  jeder dieser Funktionen eine Funktion von  $u_1, u_2, \dots, u_k$ .

Es sei

$$(9) \quad \Psi_1 = C_1, \quad \Psi_2 = C_2, \quad \dots, \quad \Psi_l = C_l$$

ein vollständiges Intransitivitätssystem der Gruppe  $\Gamma$ . Wir können annehmen,  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_l$  seien rationale Funktionen von  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Wir können aus (9) mit Hilfe der Eliminationstheorie eine zusammenhängende Teilmannigfaltigkeit  $T$  herausgreifen, auf welcher  $\Gamma$  sich als eine transitive Gruppe verhält.

Ist  $u_i, u'_i, \dots, u_i^{(p-1)}$  ein vollständiges System von Wertebestimmungen (Zweigen), die die Funktion  $u_i$  im Punkte  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  annimmt, während  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  beliebige geschlossene Wege auf  $T$  beschreibt. Die Gruppe  $\Gamma$  verhält sich auf  $T$  wegen der Vollständigkeit des Intransitivitätssystems  $T$  wie eine transitive Gruppe. Man kann also jeden Weg  $U$  auf  $T$  durch einen geschlossenen Polygonzug approximieren, dessen jede Seite aus einem Stück einer Bahnkurve der Gruppe  $\Gamma$  besteht, d. h. einer Folge von Transformationen der Gruppe  $\Gamma$  entspricht.

<sup>9)</sup> O. Schreier, Abstrakte kontinuierliche Gruppen, *Abh. Hamb. Sem.* 4 (1925), S. 15–32.

<sup>10)</sup> Dieser Absatz ist bei der Korrektur, Dezember 1930, eingefügt worden.



Führen wir in  $u_i$  schrittweise die Transformationen dieser Folge aus, so erhalten wir endlich die Wertebestimmung von  $u_i$ , die dem Weg  $U$  entspricht, wenn unser Polygonzug genügend nahe zu  $U$  genommen war. Da aber  $u_i$ , der Definition des Imprimitivitätssystems zufolge, durch Transformationen von  $\Gamma$  in Funktionen von  $u_1, u_2, \dots, u_k$  übergeht, so folgt, daß  $u_i^{(j)}$  eine Funktion von  $u_1, u_2, \dots, u_k$  ist ( $j = 0, 1, \dots, p-1$ ).

Wir setzen

$$s^2 + t_1 u_1 + t_2 u_2 + \dots + t_n u_n$$

wo die rationalen Zahlen  $t_1, t_2, \dots, t_k$  so genommen sein sollen, daß sowohl alle Wertebestimmungen  $\xi, \xi', \dots, \xi^{(p-1)}$  innerhalb  $T$ , als auch alle transformierten Funktionen  $\xi^A, \xi^B, \dots$  ( $A, B, \dots$  durchlaufen alle Transformationen von  $\mathfrak{G}$ ) in allen ihren Wertebestimmungen voneinander verschieden sind. Das Polynom

$$(10) \quad \varphi(t) = (t - \xi)(t - \xi') \dots (t - \xi^{(p-1)})$$

ist eine auf  $T$  eindeutige Funktion von  $x_1, x_2, \dots, x_n, t$  und gleichzeitig eine Funktion von  $u_1, u_2, \dots, u_k, t$ . Führen wir in  $\xi, \xi', \dots, \xi^{(p-1)}$  eine von 1 verschiedene Transformation von  $\mathfrak{G}$  aus, so muß das so erhaltene Polynom von dem ursprünglichen verschieden sein. Wir können also der Veränderlichen  $t$  einen Wert  $t$ , zuschreiben derart, daß die Funktion

$$\varphi(t_1) = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

von allen Funktionen  $v^A, v^B, \dots$  verschieden ist, wobei  $A, B, \dots$  sämtliche Transformationen der Gruppe  $\mathfrak{G}$  durchläuft.

Wir können die Gleichungen der Mannigfaltigkeit  $T$  folgendermaßen darstellen:

$$(11) \quad \begin{aligned} \Psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_l) &= 0, \\ \Psi_2(x_2, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_l) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \Psi_l(x, x_{l+1}, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_l) &= 0. \end{aligned}$$

Nun genüge  $v$  der Gleichung

$$(12) \quad F(v, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

wo  $\Gamma$  eine rationale Funktion von  $v, x_1, \dots, x_n$  ist. Eliminieren wir aus (12) die Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_l$  vermöge (11), so erhalten wir die Gleichung

$$(13) \quad \bar{F}(\bar{v}, x_{l+1}, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_l) = 0.$$

Diese Gleichung muß mittels einer Funktion  $v$  von  $x_{i+1}, \dots, x_n$  befriedigt werden, die auf  $T$  mit  $v$  zusammenfällt, also auf  $T$  eindeutig ist. Da aber die Gleichungen (11) auf  $x_{i+1}, \dots, x_n$  keine Beschränkung auflegen, so ist  $\bar{v}$  eine überall eindeutige, also rationale Funktion von  $x_{i+1}, \dots, x_n$ :

$$(14) \quad \bar{v} = \bar{v}(x_{l+1}, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_l) = 0.$$



In diesem Ausdruck gehen  $C_1, C_2, \dots, C_l$  sehr wohl irrational auf. Fassen wir  $C_1, C_2, \dots, C_l$  als die durch die Gleichungen (11) definierten Funktionen von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  auf, so müssen wir zur ursprünglichen Funktion  $v$  zurückkehren. Führen wir im Ausdruck (14) sämtliche Transformationen  $A, B, \dots$  der Gruppe  $\mathfrak{G}$  aus, so erhalten wir nur  $k$  funktional unabhängige Funktionen. Da aber die mittels (11) definierten Funktionen  $C_1, C_2, \dots, C_l$ , der Definition der Intransitivitätssysteme zufolge, gegenüber den Transformationen von  $\mathfrak{G}$  invariant bleiben, so bestehen zwischen  $\bar{v}, \bar{v}^A, \bar{v}^B, \dots$   $m - k$  unabhängige Relationen vom Typus

$$\Phi(\bar{v}(x_{i+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_l), \bar{v}^A(x_{i+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_l), \bar{v}^B(x_{i+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_l), \dots) = 0$$

Diese Relationen bleiben bestehen, wenn wir den  $C_1, C_2, \dots, C_l$  irgend numerische Werte zuschreiben. Somit erhalten wir eine rationale Funktion  $\bar{v}(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$ , deren Konjugierten  $\bar{v}^A, \bar{v}^B, \dots$  voneinander verschieden sind und ein System von  $k$  funktional unabhängigen Funktionen bilden. Daraus folgt nebenbei, daß es in  $\mathfrak{G}$  keine von 1 verschiedene Permutation gibt, die die Veränderlichen  $x_{i+1}, \dots, x_n$  nicht ändert. Ist insbesondere  $\mathfrak{G}$  eine alternierende Gruppe, so muß es  $l \leq 2$  sein.

Man kann den Körper  $R(x_1, \dots, x_n; C_1, \dots, C_l)$  in die Form  $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_n; \Theta)$  bringen, wo  $\Theta$  etwa von der Form  $t_1 C_1 + \dots + t_l C_l$  ist.  $\Theta$  genügt einer Gleichung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und Invarianten der Gruppe  $\Gamma$  sind. Ihre Parameterzahl ist demnach  $\leq l$ . Wir wollen diese Gleichung „Nebenresolvente“ nennen. Ist insbesondere  $\mathfrak{G}$  eine alternierende Gruppe, so ist die Nebenresolvente höchstens einparametrig. Denn es ist  $l \leq 2$ ; nehmen wir aber  $x_1 + \dots + x_n = 0$  (was wir rational durchführen können), so wird die Parameterzahl noch um Eins reduziert<sup>10)</sup>.

Um eine Gleichung aufzustellen, deren Wurzel rational durch eine Wurzel der Gleichung (1) darstellbar ist und umgekehrt, bilden wir eine Funktion von  $\bar{v}$ , die zu derselben Untergruppe  $\mathfrak{H}$  von  $\mathfrak{G}$  gehört wie  $x_1$ . Dazu genügt es, das Polynom

$$\psi(z) = (z - \bar{v})(z - \bar{v}^A)(z - \bar{v}^B), \dots$$

zu betrachten, wobei  $1, A, B, \dots$  sämtliche Transformationen von  $\mathfrak{G}:\mathfrak{H}$  durchlaufen und der Veränderlichen  $z$  einen geeigneten rationalen Wert  $z_1$  zuschreiben. Dann kann man  $\psi(z_1)$  wegen des Lagrangeschen Satzes rational durch  $x_1$  ausdrücken und umgekehrt. Andererseits hängen die Koeffizienten der Gleichung  $n$ -ten Grades, ( $n = (\mathfrak{G}:\mathfrak{H})$ ), welche  $\psi(z_1)$  und ihren Konjugierten genügen, nur von  $k$  Parametern ab, da sie Funktionen von  $\bar{v}, \bar{v}^A, \bar{v}^B, \dots$  sind, wobei  $1, A, B, \dots$  sämtliche Transformationen von  $\mathfrak{G}:\mathfrak{H}$  durchläuft.

Es bleibt noch die Frage unerledigt, ob alle möglichen Einkleidungen einer Gruppe von endlicher Ordnung miteinander einstufig isomorph sind. Deswegen können wir nicht leicht auf eine konkrete Frage antworten, ob nicht Gleichungen mit einer gegebenen Gruppe eine Resolvente mit  $k$  Parametern haben. Gibt nämlich eine von uns aufgestellte Einkleidung die negative Antwort, so können wir jedoch nicht sicher sein, daß auch jede andere Einkleidung die negative Antwort gibt. Ich hoffe, diese Frage in späteren Arbeiten zu erörtern. Die von den Herren Le Vasseur und Burnside (loc. cit.) angegebenen Einkleidungen von abstrakten Gruppen bieten ganz bestimmte Lösungen. Um die aufgeworfene Frage vollständig zu beantworten, können wir folgendermaßen verfahren: wir probieren zunächst, ob eine jede  $k$ -dimensionale  $k$ . T. G. (ihre Anzahl ist bekanntlich endlich) nicht einen Teiler von endlicher Ordnung enthält, der mit  $\mathfrak{G}$  einstufig isomorph ist. Dies kann man folgendermaßen erledigen: man stelle diese  $k$ . T. G. als eine Gruppe homogener linearer Transformationen von etwa  $s$  Veränderlichen dar. Nach einem Satze von Jordan gibt es nur eine endliche Anzahl von endlichen Gruppen, die Faktorgruppen sämtlicher Gruppen sind, welche als Gruppen homogener linearer Transformationen von  $s$  Veränderlichen darstellbar sind, in bezug auf ihre Zentren. Die Struktur des Zentrums von  $\mathfrak{G}$  ist aber für uns nicht interessant, da das Zentrum stets eine Abelsche Gruppe ist und also eine einparametrische Resolvente besitzt. Wir sind nun imstande, diese Faktorgruppen mit der Faktorgruppe des Zentrums von  $\mathfrak{G}$  zu vergleichen. Natürlich ist dieser Weg praktisch sehr kompliziert.

Herr Hilbert hat noch die Frage nach der Folge von Resolventenbildungen aufgeworfen. Diese Frage ist der Frage nach den natürlichen Irrationalitäten in der Galoisschen Theorie analog. Ich werde diese Frage in folgenden Arbeiten untersuchen.

(Eingegangen am 16. 6. 1930.)

## Zur Begründung des Restsatzes mit dem Noetherschen Fundamentalsatz.

Von

B. L. van der Waerden in Groningen (Niederlande).

In der seit Brill und Noether<sup>1)</sup> üblichen Begründung des Restsatzes mittels des „Noetherschen Fundamentalsatzes“ ist eine Lücke, die bis jetzt unbemerkt geblieben zu sein scheint.

Es handelt sich nämlich beim Restsatz um folgenden Sachverhalt:  $f=0$  sei eine Kurve in der projektiven Ebene, von der man annehmen kann, daß sie keine anderen Singularitäten als  $s$ -fache Punkte mit getrennten Tangenten besitzt<sup>2)</sup>. Die Kurven  $\varphi=0$  und  $\varphi'=0$  schneiden, außer einer beiden gemeinsamen Punktgruppe  $H$ , die Punktgruppen  $G$  und  $G'$  auf den Zweigen von  $f=0$  aus. Die Kurve  $\psi=0$  sei adjungiert, d. h. sie gehe  $(s-1)$ -fach durch die  $s$ -fachen Punkte von  $f=0$  und sie schneide  $f=0$ , außer in diesen auf jedem Zweig  $(s-1)$ -fach gezählten Punkten — und außer einer Gruppe  $K$  —, genau nach der Gruppe  $G$ . Zu beweisen ist, daß es eine ebenfalls adjungierte Kurve  $\psi'=0$  gibt, welche in derselben Weise außer den vielfachen Punkten — und außer  $K$  — die Gruppe  $G'$  ausschneidet.

Zu dem Zweck genügt es offenbar, das Produkt  $F=\varphi'\psi$  in der Form  $Af+B\varphi$  darzustellen und  $\psi'=B$  zu setzen<sup>3)</sup>. Man muß also für  $F, f, \varphi$  die Voraussetzungen des Noetherschen Satzes als erfüllt nachweisen, d. h. man muß für jeden Schnittpunkt  $(a, b)$  die Noethersche Potenzreihenbedingung

$$F = Pf + R\varphi \quad (P \text{ und } R \text{ Potenzreihen in } x-a \text{ und } y-b)$$

<sup>1)</sup> A. Brill und M. Noether, Math. Annalen 7 (1874), S. 269.

<sup>2)</sup> Für die „Auflösung der Singularitäten“ durch birationale Transformationen vgl. M. Noether, Gött. Nachr. 1871, S. 207 und Math. Annalen 9 (1875), S. 182, sowie E. Bertini, Rendiconti Ist. Lombardo (2) 21 (1888), S. 326.

<sup>3)</sup> Dabei sind  $F, f, \varphi$  als Formen in  $x, y, z$  zu denken; es genügt aber bekanntlich, durch die Substitution  $z_0=1$  zu inhomogenen Polynomen in  $(x_1, x_2)$  oder  $(x, y)$  überzugehen.

(oder die damit gleichlautende Polynomrelation mit Vernachlässigung von Gliedern, deren Grad eine gewisse Zahl  $\varrho$  überschreitet) nachweisen. Statt dessen beruft man sich meistens auf den „einfachen Fall“ des Noetherschen Satzes, wo die Kurven  $f=0$  und  $\varphi=0$  in jedem Schnittpunkt getrennte Tangenten besitzen, während doch in Wirklichkeit die Kurve  $\varphi=0$  beliebig komplizierte Berührungen mit den Zweigen von  $f=0$  aufweisen kann.

Diese Lücke soll hier ausgefüllt werden, indem die Noethersche Potenzreihenbedingung als erfüllt nachgewiesen wird unter solchen Voraussetzungen, welche im obigen Fall der Kurven  $\varphi$  und  $F=\varphi'\varphi$  wirklich erfüllt sind.

Ich schicke eine Erklärung der zum Verständnis des Satzes nötigen Begriffe voraus.

Ein *Zweig* einer ebenen algebraischen Kurve  $f(x, y)=0$  in einem Punkt  $(a, b)$  wird durch eine Puiseuxsche Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}x - a &= t^k, \\ y - b &= b_1 t + b_2 t^2 + \dots\end{aligned}$$

definiert, welche diese Gleichung  $f(x, y)=0$  identisch befriedigt. Der *Zweig* heißt *einfach*, wenn in der Reihe für  $x$  oder  $y$  das Glied mit der ersten Potenz von  $t$  wirklich vorkommt. Läßt man alle Glieder höheren als ersten Grades weg, so erhält man die Parametergleichung der *Tangente* des einfachen Zweiges. Wählt man die Koordinatenrichtungen so, daß die Gerade  $x=a$  nicht tangiert, so wird  $k=1$  und  $x-a=t$ .

Die *Multiplizität* des Schnittes eines Zweiges mit einer anderen Kurve  $\varphi(x, y)=0$  ist der niedrigste Exponent in der Reihenentwicklung von  $\varphi(x, y)$  nach Potenzen von  $t$ .

Der zu beweisende Satz, der meines Wissens bis jetzt nur im Fall  $s=1$  ausdrücklich ausgesprochen und bewiesen worden ist<sup>4)</sup>, lautet nun so:

*Wenn der Punkt  $(0, 0)$  für die Kurve  $f=0$  ein  $s$ -facher Punkt mit  $s$  getrennten Tangenten ist und wenn jeder Zweig  $Z_i$  dieser Kurve in diesem Punkt von der Kurve  $\varphi=0$   $\mu_i$ -fach und von der Kurve  $F=0$  mindestens  $(s-1+\mu_i)$ -fach geschnitten wird, so ist*

$$F = Pf + R\varphi$$

*im Bereich der Potenzreihen nach  $x$  und  $y$ .*

**Beweis.** Wir transformieren eventuell die Koordinaten so, daß keine der  $s$  Tangenten im betrachteten Punkt mit der  $Y$ -Achse ( $x=0$ ) zusammenfällt. Dann kann in der Puiseuxschen Reihenentwicklung der Para-

<sup>4)</sup> Siehe H. Kapferer, Sitzungsber. Heidelberg 1927, 8. Abhandlung, S. 79, sowie P. Dubreil, Thèse de Doctorat, Paris 1930, S. 73.

meter  $t = x$  gewählt werden. Die Gleichung  $f(x, y) = 0$  wird also befriedigt von  $s$  Puiseuxschen Reihen

$$y = P_i = \sum_1^{\infty} b_{i,r} x^r.$$

Spaltet man die Faktoren  $(y - P_1)(y - P_2) \dots (y - P_s)$  von  $f$  ab, so ist der restliche Faktor eine Potenzreihe mit nichtverschwindendem Anfangsglied, also eine Einheit im Bereich der Potenzreihen. Also:

$$(1) \quad f = (y - P_1)(y - P_2) \dots (y - P_s) \cdot E.$$

Wir wollen nun unsere Behauptung durch Induktion nach  $s$  beweisen, müssen sie aber zu dem Zweck ausdehnen von Polynomen  $F, \varphi, f$  auf Potenzreihen  $F, \varphi, f$ , von denen  $f$  nach (1) zerfällt. Es genügt und ist bequem,  $F$  und  $\varphi$  und  $f$  als Polynome in  $y$  und Potenzreihen in  $x$  anzunehmen. Der Begriff Multiplizität bleibt derselbe: die Potenzreihe  $\varphi$  schneidet einen Zweig  $y = P_i$  im Nullpunkt  $\mu$ -fach, wenn die Potenzreihe  $\varphi^*$ , die aus  $\varphi$  durch die Substitution  $y = P_i$  entsteht, durch  $x^\mu$  teilbar ist.

Für  $s = 1$  ist die Behauptung nun sehr leicht zu beweisen. Setzt man in  $F$  und  $\varphi$  für  $y$  die Potenzreihe  $P_1$  ein, wodurch  $F^*$  und  $\varphi^*$  entstehen mögen, so wird  $\varphi^*$  gleich einem Einheitsfaktor mal  $x^{\mu_1}$ , während  $F^*$  durch  $x^{\mu_1}$ , also auch durch  $\varphi^*$  teilbar wird. Da man das Ergebnis der Substitution  $y = P_1$  auch immer als Rest einer Division durch  $y - P_1$  erhalten kann, so folgt

$$F = R\varphi + S \cdot (y - P_1),$$

woraus wegen (1) für  $s = 1$  die Behauptung folgt.

Ist für  $s - 1$  Zweige die Behauptung schon bewiesen, so erhält man im Fall von  $s$  Zweigen durch die Substitution  $y = P_1$  aus  $F$  und  $\varphi \cdot \prod_2^s (y - P_r)$  gewisse Potenzreihen  $F^*$  und  $\varphi^* \cdot \prod_2^s (P_1 - P_r)$ , von denen  $F^*$  durch  $x^{\mu_1 + s - 1}$  teilbar ist, während das andere Produkt gleich einem Einheitsfaktor mal  $x^{\mu_1 + s - 1}$  wird. Daraus folgt in derselben Weise wie vorhin

$$(2) \quad F = A\varphi \prod_2^s (y - P_r) + B(y - P_1).$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, daß die Potenzreihe  $B(y - P_1)$  beim Schnitt mit den Zweigen  $y = P_k$  ( $k = 2, \dots, s$ ) dieselben Multiplizitäten hat wie  $F$ , d. h. mindestens  $\mu_k + s - 1$ , mithin hat  $B$  als Multiplizität mindestens  $\mu_k + s - 2$ . Daraus folgt nach der Induktionsvoraussetzung

(auf  $f_1 = E \prod_2^s (y - P_r)$  angewandt)

$$(3) \quad B = CE \prod_2^s (y - P_r) + D\varphi.$$

Setzt man (3) in (2) ein, so folgt wegen (1) die Behauptung.

Bemerkungen. Statt mit Potenzreihen kann man auch mit Kongruenzen nach beliebig hohen Potenzen des Ideals  $(x, y)$  operieren. Für den Beweis macht das gar nichts aus.

Dieselbe Beweismethode gestattet auch den Beweis des folgenden allgemeineren Satzes:

Wenn der Punkt  $(0, 0)$  für die Kurve  $f = 0$  ein  $s$ -facher Punkt ist, durch den  $s$  einfache Zweige hindurchgehen (die sich aber auch berühren dürfen), und wenn jeder Zweig  $Z_i$  in diesem Punkt von der Kurve  $\varphi = 0$   $\mu_i$ -fach, von der Gesamtheit der anderen Zweige  $\lambda_i$ -fach und von der Kurve  $F = 0$  mindestens  $(\lambda_i + \mu_i)$ -fach geschnitten wird, so ist

$$F = Pf + R\varphi$$

im Bereich der Potenzreihen nach  $x$  und  $y$ .

Wenn also die genannten Bedingungen in jedem Schnittpunkt der Kurven  $f = 0$  und  $\varphi = 0$  erfüllt sind, so ist  $F = Af + B\varphi$  im Bereich der Polynome bzw. der ternären Formen.

Man kann die Relation  $F = Af + B\varphi$  im Bereich der ternären Formen unter den angegebenen Voraussetzungen auch nach der Methode von Scott<sup>5)</sup> und Severi<sup>6)</sup> beweisen, indem man für Formen  $F$  von genügend hohem Grade die Anzahl der linear-unabhängigen Multiplizitätsbedingungen, die durch die Voraussetzungen des Satzes bedingt werden, vergleicht mit der Dimension der Schar  $Af + B\varphi$  mit adjungiertem  $B$ .

<sup>5)</sup> C. A. Scott, *Math. Annalen* **52** (1899), S. 593.

<sup>6)</sup> F. Severi, *Rendiconti Acc. Lincei* (5) **11** (1902), S. 105.

(Eingegangen am 19. 11. 1930.)

## Axiomatik des Zwischenbegriffes in metrischen Räumen<sup>1)</sup>.

Von

A. Wald in Wien.

In einem allgemeinen metrischen Raum — d. h. in einer Menge, in der je zwei Elementen („Punkten“)  $p$  und  $q$  ein Abstand, d. i. eine reelle Zahl  $pq = qp$  zugeordnet ist, die  $> 0$  für  $p \neq q$  und  $= 0$  für  $p = q$  ist, und für je drei Punkte  $p, q, r$  die Beziehung (Dreiecksungleichung)  $pq + qr \geq pr$  gilt — ist der Zwischenbegriff nach Menger<sup>2)</sup> folgendermaßen definiert:

Ein Punkt  $b$  liegt dann und nur dann zwischen zwei Punkten  $a$  und  $c$ , wenn  $b$  von  $a$  und  $c$  verschieden ist und die Gleichung besteht:  $ab + bc = ac$ . Wir drücken die Tatsache, daß  $b$  zwischen  $a$  und  $c$  liegt, auch kurz durch das Symbol  $abc$  aus.

Aus dieser Definition ergeben sich<sup>3)</sup> u. a. folgende Eigenschaften des Zwischenbegriffes, die in jedem metrischen Raum bestehen.

1. Kongruenzinvarianz. Wenn  $ab = a'b'$ ,  $bc = b'c'$ ,  $ac = a'c'$  und  $abc$  gilt, so gilt  $a'b'c'$ .

2. Symmetrie in den Außengliedern. Aus  $abc$  folgt  $cba$ .

3. Auszeichnung des Zwischengliedes. Aus  $abc$  folgt, daß  $bca$  und  $cab$  nicht bestehen.

4. Transitivitätseigenschaft. Aus  $abd$  und  $bed$  folgt  $acd$  und  $abc$ .

5. Abgeschlossenheit der Zwischenmenge. Wenn  $R$  irgendein metrischer Raum ist und  $a, b$  zwei Punkte von  $R$ , dann ist die Menge  $Z(a, b)_R = Z(a, b) + \{a\} + \{b\}$  in  $R$  abgeschlossen, wobei  $Z(a, b)_R$  die Menge aller Punkte  $c$  von  $R$  bedeutet, für welche  $acb$  gilt.

<sup>1)</sup> Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich einer von Prof. K. Menger im Sommersemester 1930 an der Wiener Universität gehaltenen Vorlesung über allgemeine Metrik.

<sup>2)</sup> K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik. Math. Annalen 100.

<sup>3)</sup> Die Eigenschaften 2 bis 5 wurden von K. Menger loc. cit. bewiesen. Die Gültigkeit von 1 und 6 ist evident.



6. Erweiterung. Wenn  $R$  ein beliebiger aus genau zwei Punkten  $a, b$  bestehender metrischer Raum ist, so gibt es stets einen metrischen Raum  $R'$ , der außer  $R$  noch einen dritten Punkt  $c$  enthält, so daß  $abc$  gilt.

Wir zeigen nun, daß umgekehrt aus diesen sechs Eigenschaften, wenn man deren Gültigkeit in jedem metrischen Raum fordert, die oben angegebene explizite Definition des Zwischenbegriffes sich herleiten läßt; m. a. W., es gilt folgendes

**Theorem.** Ist in jedem metrischen Raum für gewisse Punkttripel  $a, b, c$  eine Beziehung  $abc$  erklärt, welche den Forderungen 1 bis 6 genügt, so ist sie mit der Zwischenrelation identisch, d. h. es gilt  $abc$  dann und nur dann, wenn  $b$  zwischen  $a$  und  $c$  liegt.

Wir nehmen im folgenden an, es sei in allen metrischen Räumen eine den Forderungen 1 bis 6 genügende Relation  $abc$  für gewisse Punkttripel  $a, b, c$  definiert und beweisen zunächst einige Hilfssätze.

**Satz 1.** Wenn für drei Punkte  $a, b, c$  irgendeines metrischen Raumes  $abc$  gilt, dann gilt  $ab \neq ac \neq cb$ .

**Beweis.** Wäre etwa  $ab = ac$ , dann müßte wegen Forderung 1 auch  $acb$  gelten, was wegen Forderung 3 unmöglich ist.

**Satz 2.** Sind  $a$  und  $b$  irgend zwei Punkte des  $R_3$  (der euklidischen Ebene), dann gibt es in  $R_3$  zwei Punktefolgen:  $\{x_i\}$  ( $i=1, 2, \dots$ , ad inf.) und  $\{y_i\}$  ( $i=1, 2, \dots$ , ad inf.) mit folgenden Eigenschaften:

1.  $ax_1b$ ;  $ax_{i+1}x_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ),  
 $x_1y_1b$ ;  $y_iy_{i+1}b$  ( $i=1, 2, \dots$ ).

2. Mindestens eine der beiden Punktefolgen  $\{x_i\}$  und  $\{y_i\}$  hat einen Häufungspunkt.

Nach Forderung 6 gibt es zunächst einen Raum  $R$ , der die Punkte  $a$  und  $b$  und einen der Relation  $axb$  genügenden Punkt  $x$  enthält. Da die drei Punkte  $a, b, x$  einen metrischen Raum bilden, also in jeder Anordnung der Dreiecksungleichung genügen, sind sie mit drei Punkten  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}$  des  $R_2$  kongruent. Bei einer kongruenten Selbstabbildung des  $R_2$ , welche  $\bar{a}$  in  $a$ ,  $\bar{b}$  in  $b$  überführt, möge  $\bar{x}$  in  $x_1$  übergehen. Dann sind die Punkttripel  $(a, b, x)$  und  $(a, b, x_1)$  zueinander kongruent. Wegen Forderung 1 muß dann  $ax_1b$  gelten. Ebenso zeigt man, daß es in  $R_2$  einen Punkt  $x_2$  gibt, so daß  $ax_2x_1$  gilt und einen Punkt  $y_1$ , so daß  $x_1y_1b$  gilt, dann einen Punkt  $x_3$ , so daß  $ax_3x_2$  gilt, und einen Punkt  $y_2$ , so daß  $y_1y_2b$  gilt usw. Auf diese Weise gelangen wir zu zwei Punktefolgen:

$$\{x_i\} \quad (i=1, 2, \dots) \quad \text{und} \quad \{y_i\} \quad (i=1, 2, \dots)$$

des  $R_3$ , die der Bedingung 1 von Satz 2 genügen. Durch vollständige Induktion erkennt man auf Grund von Forderung 4 unmittelbar, daß die



Relationen  $ax_n x_m$  und  $y_m y_n b$  für beliebige Indexpaare  $n, m$  ( $n > m$ ) bestehen. Wegen Satz 1 müssen dann sowohl alle Punkte der Folge  $\{x_i\}$  als auch der Folge  $\{y_i\}$  untereinander paarweise verschieden sein. Zum Beweise, daß die Folgen  $\{x_i\}$  und  $\{y_i\}$  auch der Bedingung 2 von Satz 2 genügen, zeigen wir, daß mindestens eine der beiden Folgen beschränkt ist. Wir machen zu diesem Zweck die Annahme, daß keine der beiden Folgen  $\{x_i\}$  und  $\{y_i\}$  beschränkt ist, und leiten aus dieser Annahme einen Widerspruch her. Aus der Annahme folgt die Existenz eines Punktes  $x_k$  der Folge  $\{x_i\}$ , so daß die Ungleichungen bestehen:

$$(1) \quad \begin{cases} x_k a > x_1 a, \\ x_k b > x_1 b. \end{cases}$$

Ferner folgt die Existenz eines Punktes  $y_k$  der Folge  $\{y_i\}$ , so daß die Ungleichungen gelten:

$$(2) \quad \begin{cases} y_k x_1 > x_k x_1, \\ y_k a > x_k a, \\ y_k b > x_k b. \end{cases}$$

Wir behaupten nun zunächst: Wenn wir den Elementepaaren eines Quintupels  $\bar{Q}$ :  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_1, \bar{x}_k, \bar{y}_k)$  Abstände derart zuordnen, daß je zwei Elemente denselben Abstand haben wie die beiden entsprechend bezeichneten Punkte des Quintupels  $Q$ :  $(a, b, x_1, x_k, y_k)$ , abgesehen vom Abstand  $\bar{x}_k \bar{y}_k$ , der dem Abstand  $x_1 y_k$  gleich sein soll, dann ist  $\bar{Q}$  ein metrischer Raum. Wir setzen also die Beziehungen voraus:

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{a} \bar{b} = a b; & \bar{a} \bar{x}_1 = a x_1; & \bar{b} \bar{x}_1 = b x_1; \\ \bar{a} \bar{x}_k = a x_k; & \bar{b} \bar{x}_k = b x_k; & \bar{x}_1 \bar{x}_k = x_1 x_k; \\ \bar{a} \bar{y}_k = a y_k; & \bar{b} \bar{y}_k = b y_k; & \bar{x}_1 \bar{y}_k = x_1 y_k; \\ \text{und} & \bar{x}_k \bar{y}_k = x_1 y_k \end{cases}$$

und behaupten, daß für je drei Elemente von  $\bar{Q}$  die Dreiecksungleichung gilt. Zunächst ist klar, daß die Dreiecksungleichung für die Tripel:  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_1)$ ,  $(\bar{a}, \bar{x}_1, \bar{x}_k)$ ,  $(\bar{b}, \bar{x}_1, \bar{x}_k)$ ,  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_k)$ ,  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{y}_k)$ ,  $(\bar{x}_1, \bar{b}, \bar{y}_k)$  und  $(\bar{a}, \bar{x}_1, \bar{y}_k)$  erfüllt ist, da diese Tripel kongruent zu den entsprechenden Tripeln des  $R_3$  sind. Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß die Dreiecksungleichung auch für die Tripel  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{x}_1)$ ;  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{b})$  und  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{a})$  erfüllt ist.

Betrachten wir zunächst das Tripel  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{x}_1)$ . Wegen Ungleichungen (2) und Gleichungen (3) gelten die Relationen

$$\bar{y}_k \bar{x}_1 + \bar{y}_k \bar{x}_k = 2 \bar{y}_k \bar{x}_1 > \bar{x}_k \bar{x}_1 > 0 = |\bar{y}_k \bar{x}_1 - \bar{y}_k \bar{x}_k|,$$

womit die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für das Tripel  $(\bar{y}_k, \bar{x}_k, \bar{x}_1)$  bewiesen ist.

Betrachten wir nun das Tripel  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{b})$ .

Aus dem Tripel  $(\bar{y}_k, \bar{x}_1, \bar{b})$  (von welchem wir wissen, daß es der Dreiecksungleichung genügt) folgt

$$\bar{y}_k \bar{b} + \bar{b} \bar{x}_1 \geq \bar{y}_k \bar{x}_1 = \bar{y}_k \bar{x}_k \geq \bar{y}_k \bar{b} - \bar{x}_1 \bar{b}.$$

Wegen Ungleichungen (1) gilt also erst recht

$$\bar{y}_k \bar{b} + \bar{x}_k \bar{b} > \bar{y}_k \bar{x}_k > \bar{y}_k \bar{b} - \bar{x}_k \bar{b}.$$

Wegen Ungleichungen (2) und Gleichungen (3) ist  $\bar{y}_k \bar{b} > \bar{x}_k \bar{b}$ , also  $\bar{y}_k \bar{b} - \bar{x}_k \bar{b} = |\bar{y}_k \bar{b} - \bar{x}_k \bar{b}|$ . Es gilt daher:  $\bar{y}_k \bar{b} + \bar{x}_k \bar{b} > \bar{y}_k \bar{x}_k > |\bar{y}_k \bar{b} - \bar{x}_k \bar{b}|$ , womit die Dreiecksungleichung auch für das Tripel  $(\bar{y}_k, \bar{x}_k, \bar{b})$  bewiesen ist. Wir haben noch zu zeigen, daß auch das Tripel  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{a})$  der Dreiecksungleichung genügt. Aus dem Tripel  $(\bar{y}_k, \bar{x}_1, \bar{a})$  folgt zunächst die Ungleichung

$$\bar{y}_k \bar{a} + \bar{x}_1 \bar{a} \geq \bar{y}_k \bar{x}_1 = \bar{y}_k \bar{x}_k \geq \bar{y}_k \bar{a} - \bar{x}_1 \bar{a}.$$

Wegen Ungleichungen (1) und Gleichungen (3) gilt erst recht

$$\bar{y}_k \bar{a} + \bar{a} \bar{x}_k > \bar{y}_k \bar{x}_k > \bar{y}_k \bar{a} - \bar{x}_k \bar{a} = |\bar{y}_k \bar{a} - \bar{x}_k \bar{a}|,$$

womit die Dreiecksungleichung auch für das Tripel  $(\bar{y}_k, \bar{x}_k, \bar{a})$  bewiesen ist. Das Quintupel  $\bar{Q}$  ist also tatsächlich ein metrischer Raum. Wegen Forderung 1 folgen aus  $\alpha x_1 b$ ,  $\alpha x_k x_1$ ,  $x_1 y_k b$  die Relationen  $\bar{a} \bar{x}_1 \bar{b}$ ,  $\bar{a} \bar{x}_k \bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_1 \bar{y}_k \bar{b}$ . Daraus folgt wegen Forderung 4, daß die Relation gilt:

$$\bar{x}_k \bar{x}_1 \bar{y}_k,$$

was wegen Satz 1 unmöglich ist, da  $\bar{y}_k \bar{x}_1 = \bar{y}_k \bar{x}_k$  ist. Die Annahme, daß keine der beiden Folgen  $\{x_i\}$  und  $\{y_i\}$  beschränkt sei, hat also zu einem Widerspruch geführt, womit Satz 2 bewiesen ist.

Satz 3. Es sei  $R$  ein beliebiger aus genau zwei Punkten  $(a, b)$  bestehender metrischer Raum und  $\varepsilon$  eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl, dann gibt es stets einen metrischen Raum  $R'$ , der außer  $(a, b)$  noch einen dritten Punkt  $c$  enthält, derart, daß die Relationen  $a c b$  und  $a c < \varepsilon$  bestehen.

Beweis. Es sei  $(\bar{a} \bar{b})$  ein zu  $(a b)$  kongruentes Punktepaar im  $R_2$  (euklidische Ebene). Wegen Forderung 1 genügt es, Satz 3 für das Punktepaar  $(\bar{a} \bar{b})$  zu beweisen. Es seien  $\{x_i\}$  und  $\{y_i\}$  zwei Punktesfolgen des  $R_2$ , so daß die Relationen gelten:

$$\begin{array}{lll} \bar{a} x_i \bar{b}; & \bar{a} x_{i+1} x_i & (i = 1, 2, \dots), \\ x_1 y_i \bar{b}; & y_i y_{i+1} \bar{b} & (i = 1, 2, \dots). \end{array}$$

Eine der beiden Folgen  $\{x_i\}$  und  $\{y_i\}$  muß wegen Satz 2 einen Häufungspunkt haben. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Punktesfolge  $\{x_i\}$  einen Häufungspunkt hat. Es gibt dann in der Folge  $\{x_i\}$  zwei verschiedene Punkte  $x_k$  und  $x_l$  derart, daß

$$x_k x_l < \varepsilon.$$

Sei etwa  $k > l$ , dann gilt die Relation

$$\bar{a} x_k x_l.$$

Es gibt in  $R_2$  einen Punkt  $\bar{c}$ , so daß die Relationen bestehen:

$$\bar{c} \bar{a} = x_k x_l; \quad \bar{c} x_l = x_k \bar{a}.$$

Wegen Forderung 1 muß dann die Relation  $\bar{a} \bar{c} x_l$  bestehen. Aus den Relationen  $\bar{a} x_k x_l$  und  $\bar{a} x_l \bar{b}$  folgt wegen Forderung 4 die Relation  $\bar{a} x_k \bar{b}$ . Daraus ergibt sich ebenfalls wegen Forderung 4, daß auch die Relation  $\bar{a} \bar{c} \bar{b}$  bestehen muß. Der Abstand  $\bar{a} \bar{c} = x_k x_l$  ist  $< \varepsilon$ , womit Satz 3 für den Fall, daß  $\{x_i\}$  einen Häufungspunkt hat, bewiesen ist. Hat die Punktefolge  $\{y_i\}$  einen Häufungspunkt, dann gibt es in der Folge  $\{y_i\}$  zwei verschiedene Punkte  $y_k$  und  $y_l$  derart, daß

$$y_k y_l < \varepsilon.$$

Sei etwa  $k > l$ , dann gilt die Relation:

$$\bar{b} y_k y_l.$$

Aus den Relationen  $\bar{a} x_k \bar{b}$ ,  $x_k y_l \bar{b}$ ,  $y_l y_k \bar{b}$  und  $y_l y_k \bar{b}$  ergeben sich wegen Forderung 4 die Relationen

$$\bar{a} y_k \bar{b} \quad \text{und} \quad \bar{a} y_l \bar{b}.$$

Da  $\bar{b} y_k y_l$  gilt, so müssen ebenfalls wegen Forderung 4 auch die Relationen gelten:

$$\bar{a} y_k \bar{b} \quad \text{und} \quad \bar{a} y_l y_k.$$

Es gibt in  $R_2$  einen Punkt  $\bar{c}$ , so daß die Beziehungen bestehen  $\bar{a} \bar{c} = y_k y_l$ ;  $\bar{c} y_k = \bar{a} y_l$ . Wegen Forderung 1 gilt dann  $\bar{a} \bar{c} y_k$  und wegen Forderung 4 auch  $\bar{a} \bar{c} \bar{b}$ . Der Abstand  $\bar{a} \bar{c} = y_k y_l$  ist  $< \varepsilon$ , womit Satz 3 auch für diesen Fall bewiesen ist.

**Satz 4.** Wenn die Relation  $abc$  gilt, dann muß entweder  $ab + bc = ac$  oder  $|ab - bc| = ac$  sein.

**Beweis:** Wir nehmen das Gegenteil an, also

$$ab + bc = ac + \delta_1; \quad \delta_1 > 0, \\ |ab - bc| = ac - \delta_2; \quad \delta_2 > 0.$$

Wegen Satz 3 gibt es einen metrischen Raum  $R$ , der außer den Punkten  $(ab)$  noch einen weiteren Punkt  $x$  enthält, der den Relationen genügt:  $axb$ ;  $ax < ac$ ;  $ax < \delta_1$ ;  $ax < \delta_2$ . Wir bezeichnen den Abstand  $ax$  mit  $\varepsilon$ ; also gelten die Beziehungen

$$\varepsilon < ac; \quad \varepsilon < \delta_1; \quad \varepsilon < \delta_2.$$

Wir behaupten nun zunächst: Wenn wir den Elementepaaren eines Quadrupels  $\bar{Q}$ :  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{x}$  Abstände gemäß folgender Beziehungen zuordnen  $\bar{a}\bar{b} = ab$ ;  $\bar{a}\bar{c} = ac$ ;  $\bar{b}\bar{c} = bc$ ;  $\bar{a}\bar{x} = ax = \varepsilon$ ;  $\bar{x}\bar{b} = xb$ ;  $\bar{x}\bar{c} = ac$ ,

dann ist  $\bar{Q}$  ein metrischer Raum. Zunächst ist klar, daß die Dreiecksungleichung für die Punktetripel  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  und  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x})$  besteht, da diese Tripel kongruent zu den entsprechenden metrischen Tripeln  $(a, b, c)$  und  $(a, b, x)$  sind. Für das Tripel  $(\bar{x}, \bar{c}, \bar{a})$  ist die Dreiecksungleichung ebenfalls erfüllt, denn es gilt

$$\bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{x} = ac + \varepsilon > \bar{x}\bar{c} = \bar{a}\bar{c} > |\bar{a}\bar{c} - \bar{a}\bar{x}| = \bar{a}\bar{c} - \varepsilon.$$

Wir haben noch zu zeigen, daß auch für das Tripel  $(\bar{x}, \bar{c}, \bar{b})$  die Dreiecksungleichung erfüllt ist. Wir müssen also zeigen, daß die Ungleichungen gelten:

$$\bar{x}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} \geq \bar{x}\bar{c} = \bar{a}\bar{c} \geq |\bar{x}\bar{b} - \bar{b}\bar{c}|.$$

Da für das Tripel  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x})$  die Dreiecksungleichung gilt, so bestehen die Ungleichungen:

$$\bar{a}\bar{b} + \varepsilon \geq \bar{x}\bar{b} \geq \bar{a}\bar{b} - \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich:

$$\bar{x}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} \geq \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} - \varepsilon = \bar{a}\bar{c} + \delta_1 - \varepsilon > \bar{a}\bar{c}$$

und

$$|\bar{x}\bar{b} - \bar{b}\bar{c}| \leq |\bar{a}\bar{b} - \bar{b}\bar{c}| + \varepsilon = \bar{a}\bar{c} - \delta_2 + \varepsilon < \bar{a}\bar{c}.$$

Es gilt also

$$\bar{x}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} > \bar{a}\bar{c} = \bar{x}\bar{c} > |\bar{x}\bar{b} - \bar{b}\bar{c}|,$$

womit die Dreiecksungleichung auch für das Tripel  $(\bar{x}, \bar{c}, \bar{b})$  bewiesen ist.

Wegen Forderung 1 gelten die Relationen  $\bar{a}\bar{x}\bar{b}$  und  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ , woraus wegen Forderung 4 folgt, daß die Relation  $\bar{a}\bar{x}\bar{c}$  besteht. Dies ist aber wegen Satz 1 unmöglich, da  $\bar{x}\bar{c} = \bar{a}\bar{c}$  ist. Die Annahme:  $a\bar{b} + \bar{b}c + ac$  und  $|a\bar{b} - \bar{b}c| + ac$  führt also zu einem Widerspruch.

Satz 5. Es seien  $a, b$  zwei verschiedene Punkte des  $R_1$  (der euklidischen Geraden), dann ist die Menge  $\bar{Z}(a, b)_{R_1}$  perfekt.

Beweis. Wegen Forderung 6 gibt es einen Raum  $R$ , der die Punkte  $a, b$  und noch einen Punkt  $\bar{x}$  enthält, so daß  $a\bar{x}b$  gilt. Nach Satz 4 muß entweder  $a\bar{x} + \bar{x}b = ab$  oder  $|a\bar{x} - \bar{x}b| = ab$  sein. Daraus folgt, daß es einen Punkt  $x$  auf  $R_1$  gibt, so daß  $ax = a\bar{x}$  und  $bx = b\bar{x}$  ist. Wegen Forderung 1 gilt dann die Relation  $axb$ , also ist  $Z(a, b)_{R_1}$  nicht leer. Wir zeigen nun, daß  $Z(a, b)_{R_1}$  insichdicht ist. Es sei  $x$  irgendein Punkt von  $Z(a, b)_{R_1}$ . Zu einer beliebig vorgegebenen Zahl  $\varepsilon$  gibt es wegen Satz 3 einen metrischen Raum  $R$ , der außer  $a$  und  $x$  noch einen weiteren Punkt  $\bar{y}$  enthält, der den Relationen genügt:  $a\bar{y}x$  und  $x\bar{y} < \varepsilon$ . Wegen Satz 4 besteht dann entweder die Gleichung  $a\bar{y} + \bar{y}x = ax$  oder  $|a\bar{y} - \bar{y}x| = ax$ . Daraus folgt, daß es in  $R_1$  einen Punkt  $y$  gibt, so daß  $a\bar{y} = ay$  und  $\bar{y}x = yx$  ist. Wegen Forderungen 1 und 4 ist dann  $y \in Z(a, b)_{R_1}$ . Jeder Punkt  $x \in Z(a, b)_{R_1}$  ist also Häufungspunkt von  $Z(a, b)_{R_1}$ , d. h. die Menge  $Z(a, b)_{R_1}$  ist insichdicht. Ebenso kann man zeigen, daß die Punkte  $a, b$  ebenfalls Häufungspunkte von  $Z(a, b)_{R_1}$  sind. Da nach Forderung 5  $\bar{Z}(a, b)_{R_1}$  abgeschlossen sein muß, so ist  $\bar{Z}(a, b)_{R_1}$  perfekt.

Satz 6. Aus der Relation  $abc$  folgt  $ab + bc = ac$ .

Nach Satz 4 genügt es zum Beweis, daß wir aus  $abc$  die Beziehung  $|ab - bc| + ac$  herleiten. Wir machen zu diesem Zwecke die Annahme  $|ab - bc| = ac$  und leiten aus derselben einen Widerspruch her. Mit Vertauschung der Bezeichnungen kann man immer erreichen, daß  $ab - bc = ac$  gilt. Es sei  $R$  ein metrischer Raum, der aus den Punkten  $(a, b)$  und einem Punkte  $x$  besteht, so daß  $axb$  gilt. Wegen Satz 4 muß dann entweder  $ax + xb = ab$  oder  $|ax - xb| = ab$  gelten. Wir zeigen nun, daß die Annahme  $ax + xb = ab$  der Annahme  $ab - bc = ac$  widerspricht. Denn nehmen wir an, daß  $ax + xb = ab$  ist, dann ist  $|ca - xa| = |cb - xb|$ . Es ist zunächst klar, daß, wenn wir den Elementepaaren eines Quadrupels  $\bar{Q}: (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{x})$  Abstände gemäß folgender Gleichungen zuordnen

$$\bar{a}\bar{b} = ab; \quad \bar{a}\bar{c} = ac; \quad \bar{b}\bar{c} = bc,$$

$$\bar{x}\bar{a} = xa; \quad \bar{x}\bar{b} = xb \quad \text{und} \quad \bar{x}\bar{c} = |ca - xa| + \varepsilon = |cb - xb| + \varepsilon,$$

wo  $\varepsilon$  eine positive Zahl bedeutet und so gewählt ist, daß die Ungleichungen  $\bar{x}\bar{c} < ca + xa$  und  $\bar{x}\bar{c} < cb + xb$  bestehen, dann ist  $\bar{Q}$  ein metrischer Raum. Wir können die Zahl  $\varepsilon$  insbesondere so wählen, daß keine der Gleichungen  $\bar{a}\bar{x} + \bar{x}\bar{c} = \bar{a}\bar{c}$  und  $|\bar{a}\bar{x} - \bar{x}\bar{c}| = \bar{a}\bar{c}$  erfüllt sei. Dies steht aber in Widerspruch mit Satz 4, da wegen Forderungen 1 und 4 die Relation  $\bar{a}\bar{x}\bar{c}$  gelten muß. Es bleibt also nur die zweite Möglichkeit, daß  $|ax - xb| = ab$  ist. Es sei  $(\bar{a}, \bar{c})$  ein zu  $(a, c)$  kongruentes Punktepaar auf einer Geraden  $R_1$ . Es gibt auf  $R_1$  einen Punkt  $\bar{b}$ , so daß  $\bar{a}\bar{b} = ab$  und  $\bar{b}\bar{c} = bc$  ist. Wegen Forderung 1 gilt dann die Relation  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ . Nach unseren früheren Überlegungen muß für jeden Punkt  $x$ , der der Relation  $\bar{a}\bar{x}\bar{b}$  genügt, die Gleichung  $|\bar{a}\bar{x} - \bar{x}\bar{b}| = \bar{a}\bar{b}$  bestehen. Wir zeigen nun, daß umgekehrt für einen beliebigen Punkt  $y$  von  $R_1$ , welcher der Beziehung  $\bar{a}\bar{y} - y\bar{b} = \bar{a}\bar{b}$  genügt, die Relation  $\bar{a}\bar{y}\bar{b}$  gilt. Denn nehmen wir an, es gibt einen Punkt  $y$  auf  $R_1$ , der der Relation  $\bar{a}\bar{y} - y\bar{b} = \bar{a}\bar{b}$  genügt, ohne daß  $\bar{a}\bar{y}\bar{b}$  besteht. Nach Satz 5 ist  $\bar{Z}(\bar{a}\bar{b})_{R_1}$  perfekt, also gibt es gewiß einen Punkt  $p < \bar{Z}(\bar{a}\bar{b})_{R_1}$ , so daß  $\bar{b}p < \bar{b}y$  und  $\bar{b}p < \bar{a}\bar{b}$  ist. Es muß die Relation gelten:

$$|\bar{a}p - p\bar{b}| = \bar{a}\bar{b}.$$

Da  $p\bar{b} < \bar{a}\bar{b}$  ist, so gilt  $\bar{a}p - p\bar{b} = \bar{a}\bar{b}$ .

Da  $\bar{Z}(\bar{a}\bar{b})_{R_1}$  perfekt ist, muß es einen Punkt  $\bar{p} < \bar{Z}(\bar{a}\bar{b})_{R_1}$  geben, der im gewöhnlichen Sinne zwischen  $\bar{b}$  und  $y$  liegt, während für einen beliebigen Punkt  $u$ , der im gewöhnlichen Sinne zwischen  $\bar{p}$  und  $y$  liegt, die Relation  $\bar{a}u\bar{b}$  nicht besteht.

Für den Punkt  $\bar{p}$  gelten die Relationen  $\bar{a}\bar{p}\bar{b}$  und  $\bar{a}\bar{p} - \bar{p}\bar{b} = \bar{a}\bar{b}$ . Da die Menge  $\bar{Z}(\bar{a}, \bar{p})_{R_1}$  ebenfalls perfekt ist, so muß es einen Punkt  $q < \bar{Z}(\bar{a}\bar{p})_{R_1}$  geben, der den Ungleichungen  $\bar{p}q < \bar{p}y$  und  $\bar{p}q < \bar{a}\bar{p}$  genügt.

Wir haben im vorhergehenden für das Quadrupel  $a, b, c, x$  bewiesen, daß aus den Annahmen  $abc$ ,  $ab - bc = ac$  und  $axb$  die Relation  $|ax - xb| = ab$  folgt. Da für das Quadrupel  $\bar{a}\bar{p}\bar{b}q$  die entsprechenden Beziehungen gelten, nämlich:  $\bar{a}\bar{p}\bar{b}$ ,  $\bar{a}\bar{p} - \bar{p}\bar{b} = \bar{a}\bar{b}$  und  $\bar{a}q\bar{p}$ , so ergeben dieselben Überlegungen die Gültigkeit der Relation

$$|\bar{a}q - q\bar{p}| = \bar{a}\bar{p}.$$

Da  $q\bar{p} < \bar{a}\bar{p}$  ist, so gilt:  $\bar{a}q - q\bar{p} = \bar{a}\bar{p}$ . Also liegt  $q$  im gewöhnlichen Sinne zwischen  $\bar{p}$  und  $y$ . Wegen Forderung 4 muß die Relation  $\bar{a}q\bar{b}$  gelten, womit ein Widerspruch hergeleitet ist.

Es muß also ein beliebiger Punkt  $y < R_1$  der Relation  $\bar{a}y\bar{b}$  genügen, wenn die Gleichung  $\bar{a}y - y\bar{b} = \bar{a}\bar{b}$  besteht. Wir können insbesondere  $y$  so wählen, daß  $\bar{a}y = 2\bar{a}\bar{b}$  ist und  $\bar{b}y = \bar{a}\bar{b}$  wird. Dann muß wegen Forderung 1 die Relation  $\bar{b}\bar{a}y$  gelten, was mit Forderung 3 in Widerspruch steht. Dies zeigt also die Unmöglichkeit der ursprünglichen Annahme, daß  $|ab - bc| = ac$  ist, womit Satz 6 bewiesen ist.

**Satz 7.** Aus der Gleichung  $ab + bc = ac$  ( $b + a$ ,  $b + c$ ) folgt die Relation  $abc$ .

**Beweis.** Es seien  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  drei verschiedene Punkte einer Geraden  $R_1$  derart, daß  $\bar{a}\bar{b} = ab$ ;  $\bar{a}\bar{c} = ac$  und  $\bar{b}\bar{c} = bc$  ist. Um Satz 7 zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß die Relation  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  gilt. Wir nehmen das Gegenteil an. Da  $\bar{Z}(\bar{a}\bar{c})_{R_1}$  perfekt ist, so lassen sich zwei Punkte:  $b_1 < \bar{Z}(\bar{a}\bar{c})_{R_1}$  und  $b_3 < \bar{Z}(\bar{a}\bar{c})_{R_1}$  derart angeben, daß  $\bar{b}$  im gewöhnlichen Sinne zwischen  $b_1$  und  $b_3$  liegt und kein Punkt von  $R_1$ , der im gewöhnlichen Sinne zwischen  $b_1$  und  $b_2$  liegt, der Menge  $\bar{Z}(\bar{a}\bar{c})_{R_1}$  angehören kann. Es sei angenommen, daß etwa  $b_3$  im gewöhnlichen Sinne zwischen  $b_1$  und  $\bar{c}$  liegt. Die Menge  $\bar{Z}(b_1\bar{c})_{R_1}$  ist ebenfalls perfekt; es gibt daher einen Punkt  $b_3 < \bar{Z}(b_1\bar{c})_{R_1}$ , derart, daß  $b_1b_3 < b_1b_2$  ist. Wegen Forderung 4 gilt die Relation  $\bar{a}b_3\bar{c}$ . Da  $b_3$  im gewöhnlichen Sinne zwischen  $b_1$  und  $b_2$  liegt, so sind wir zu einem Widerspruch gelangt, womit Satz 7 bewiesen ist.

Die Sätze 6 und 7 ergeben zusammen das eingangs formulierte Theorem.

(Zusatz bei der Korrektur<sup>4)</sup>.) Der elementargeometrische Zwischenbegriff genügt offenbar den von uns aufgestellten Forderungen 1. bis 6. Dagegen besitzt er eine dem Mengerschen Zwischenbegriff im allgemeinen nicht zukommende Eigenschaft<sup>5)</sup>, die, in unserer Symbolik geschrieben, lautet:

4'. Aus  $abc$  und  $bcd$  folgt  $abd$  und  $acd$ .

Es fragt sich nun, wenn man Forderung 4. durch Forderung 4' ersetzt, ob sich dann eine Zwischenrelation definieren läßt, welche in jedem metri-

<sup>4)</sup> Eingegangen am 1. 11. 1930.

<sup>5)</sup> Vgl. Menger, loc. cit. S. 80—81.

schen Raum dem so modifizierten System von Forderungen 1. bis 6. genügt. Die Antwort fällt negativ aus, d. h. *es gibt keine Zwischenrelation, die in allen metrischen Räumen den so modifizierten Forderungen 1. bis 6. genügt.*

Um dies zu beweisen, nehmen wir zwei verschiedene Punkte  $(a, c)$  an. Wegen Forderung 6. gibt es einen metrischen Raum  $R$ , der außer  $(a, c)$  noch einen dritten Punkt  $b$  enthält, welcher der Relation  $abc$  genügt. Wir behaupten nun: Wenn wir den Elementepaaren eines Quadrupels  $\bar{Q} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$  Abstände gemäß folgender Gleichungen zuordnen:  $\bar{a}\bar{b} = ab$ ;  $\bar{a}\bar{c} = ac$ ;  $\bar{b}\bar{c} = bc$ ;  $\bar{b}\bar{d} = ac$ ;  $\bar{c}\bar{d} = ab$ ;  $\bar{a}\bar{d} = ac$  oder  $= ab$ , je nachdem, ob  $ab < 2ac$  oder  $ac < 2ab$  ist, dann ist  $\bar{Q}$  ein metrischer Raum. Es ist zunächst klar, daß die Punkttripel  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  und  $(\bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$  der Dreiecksungleichung genügen, da das erste dem Tripel  $(a, b, c)$ , das zweite dem Tripel  $(c, b, a)$  kongruent ist. Um zu zeigen, daß die Dreiecksungleichung auch für die Tripel  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d})$  und  $(\bar{a}, \bar{c}, \bar{d})$  erfüllt ist, betrachten wir zunächst den Fall  $ab < 2ac$ . Dann ist  $\bar{a}\bar{d} = ac$  und es gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned}\bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{d} &= 2ac > ab = \bar{a}\bar{b}; & \bar{a}\bar{b} > 0 &= |\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{d}| \quad \text{und} \\ \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{d} &= 2ac > ab = \bar{c}\bar{d}; & \bar{c}\bar{d} > 0 &= |\bar{a}\bar{c} - \bar{a}\bar{d}|.\end{aligned}$$

Im Falle  $ac < 2ab$  ist  $\bar{a}\bar{d} = ab$ , und es gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned}\bar{a}\bar{d} + \bar{a}\bar{b} &= 2ab > ac = \bar{d}\bar{b}; & \bar{d}\bar{b} > 0 &= |\bar{a}\bar{d} - \bar{a}\bar{b}| \quad \text{und} \\ \bar{a}\bar{d} + \bar{c}\bar{d} &= 2ab > ac = \bar{a}\bar{c}; & \bar{a}\bar{c} > 0 &= |\bar{a}\bar{d} - \bar{c}\bar{d}|.\end{aligned}$$

Hiermit ist das Bestehen der Dreiecksungleichung für die beiden Tripel  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d})$  und  $(\bar{a}, \bar{c}, \bar{d})$  bewiesen.  $\bar{Q}$  ist also tatsächlich ein metrischer Raum. Aus der Relation  $abc$  folgen wegen der Forderung 1. die Relationen  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  und  $\bar{b}\bar{c}\bar{d}$ .

Wegen Forderung 4' ergibt sich dann, daß  $\bar{a}\bar{b}\bar{d}$  und  $\bar{a}\bar{c}\bar{d}$  gilt. Da  $\bar{a}\bar{d}$  entweder gleich  $\bar{a}\bar{b}$  oder gleich  $\bar{a}\bar{c}$  ist, so müßte außerdem wegen Forderung 1. entweder die Relation  $\bar{a}\bar{d}\bar{b}$  oder die Relation  $\bar{a}\bar{d}\bar{c}$  gelten, was wegen Forderung 3. unmöglich ist. Wir sind also zu einem Widerspruch gelangt, womit unsere Behauptung bewiesen ist, daß, wenn Forderung 4. durch 4' ersetzt wird, keine in allen metrischen Räumen den so modifizierten Forderungen 1. bis 6. genügende Zwischenrelation existiert.

(Eingegangen am 12. 7. 1930.)



# Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre<sup>1)</sup>.

Von

David Hilbert in Göttingen.

Wenn wir die beiden Quellen unserer Erkenntnis, die Erfahrung und das reine Denken, im mathematischen Bereiche untersuchen, so treffen wir eine Reihe von Gesichtspunkten an, die vielleicht auch von philosophischem Interesse sind. Und zwar weisen diese Gesichtspunkte sämtlich auf Gemeinsames dieser beiden an sich so verschiedenen gearteten Erkenntnisquellen hin. Z. B. beobachten wir die Einheit des Stoffes in der Materie; andererseits tritt doch gewiß in unserem Denken die Einheit der Grundlagen als eine Forderung auf, die wir zu erfüllen suchen und oftmals auch erreichen. Die Einheit der Naturgesetze, die wir oft in so überraschender Weise antreffen, kann als Beispiel für beide Erkenntnisquellen gelten. Aber noch auffallender als dieser Gesichtspunkt der Einheit ist eine Erscheinung, die wir die prästabilierte Harmonie nennen und die einen Zusammenhang zwischen Natur und Denken deutlich bezeugt. Das großartigste und wunderbarste Beispiel für die prästabilierte Harmonie ist die berühmte Einsteinsche Relativitätstheorie. Hier werden allein durch die allgemeine Forderung der Invarianz die recht komplizierten Differentialgleichungen für die Gravitationspotentiale eindeutig aufgestellt; und diese Aufstellung wäre unmöglich gewesen ohne die tiefgehenden und schwierigen mathematischen Untersuchungen von Riemann, die lange vorher da waren. Es ist sogar ein in der mathematischen Analysis vereinzelter Fall, daß ein so kompliziertes spezielles Formelsystem mit numerischen Koeffizienten aus einem allgemeinen Gedanken entspringt. Auch meine nachher hier zu erörternde Beweistheorie ist ein Beispiel für die prästabilierte Harmonie. Denn sie bedient sich des sogenannten Logikkalküls, der seinerseits vorher und zu ganz anderen Zwecken, nämlich lediglich zur Abkürzung und Mitteilung von Aussagen, ersonnen war.

Indes die aufmerksame Betrachtung führt uns dazu, daß außer Erfahrung und Denken noch eine dritte Erkenntnisquelle da ist. Wenn wir

<sup>1)</sup> Vortrag, gehalten im Dezember 1930 auf Einladung der Philosophischen Gesellschaft in Hamburg.



auch im einzelnen Kant heute nicht mehr zustimmen können, so behält doch der allgemeinste Grundgedanke der Kantschen Erkenntnistheorie seine Bedeutung: jene anschauliche Einstellung a priori festzustellen und damit die Bedingung der Möglichkeit jeder Erkenntnis zu untersuchen. Ich meine, daß dies im wesentlichen in meinen Untersuchungen über die Prinzipien der Mathematik geschehen ist. Das Apriori ist dabei nichts mehr und nichts weniger als eine Grundeinstellung, die ich auch als die finite Einstellung bezeichnen möchte: es ist uns eben schon im voraus etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse, außer-logische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt oder einer Reduktion bedarf. Dies ist die Grundeinstellung, die ich für die Mathematik wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte, und ohne die eine geistige Betätigung gar nicht möglich ist.

Damit glaube ich die dritte Erkenntnisquelle, die zu Erfahrung und Logik noch hinzutritt, erkannt und charakterisiert zu haben.

Die Einsichten a priori sind diejenigen anschaulichen sowie die logischen Einsichten, die im Rahmen jener finiten Einstellung gewonnen werden. Wir werden dabei im besonderen gewahr:

Es gibt Sätze, die Kant als a priori angesehen hat, und die wir der Erfahrung zuweisen. Z. B. die gesamten Grundtatsachen der Geometrie, sowie die elementaren Eigenschaften von Raum und Materie. Aber es gibt andererseits auch Sätze, die wohl meist für a priori gehalten worden sind, die aber nicht im Rahmen der finiten Einstellung gewonnen werden können, z. B. das Prinzip des Tertium non datur sowie überhaupt die sogenannten transfiniten Aussagen.

Die nächstliegende Anwendung und das erste Auftreten der transfiniten Aussagen findet in der Zahlenlehre statt, und damit kommen wir zu dem hauptsächlichen Gegenstande des heutigen Vortrages. Es ist schon an sich merkwürdig und philosophisch bedeutsam, daß die ersten und einfachsten Fragen über die Zahlen 1, 2, 3, ... so tiefliegende Schwierigkeiten bieten. Diese Schwierigkeiten müssen überwunden werden; denn wie sollte sonst überhaupt Wissen möglich sein, wenn nicht einmal die Zahlenlehre sich begründen ließe und wenn da nicht volle Einigkeit und absolute Richtigkeit erzwungen werden könnte!

Es wäre viel zu weitschweifig und auch überflüssig, alle die mannigfaltigen und verschiedenen Irrwege anzuführen, die als solche heute erkannt

worden sind: Man hat versucht, die Zahlen rein logisch zu definieren; andere nahmen die übliche Schlußweise der Zahlentheorie einfach als selbstverständlich an. Auf beiden Wegen gelangte man zu Einwendungen, die nicht widerlegt werden konnten. Ein Weg war noch nicht betreten worden, der dem Mathematiker gerade am nächsten lag. Bevor ich diesen Weg beschreibe, der tatsächlich ans Ziel führt, möchte ich einige Bemerkungen machen über die wichtigsten Daten aus der Vorgeschichte des Problems.

Im Jahre 1888 machte ich als junger Privatdozent von Königsberg aus eine Rundreise an die deutschen Universitäten. Auf meiner ersten Station, in Berlin, hörte ich in allen mathematischen Kreisen bei jung und alt von der damals eben erschienenen Arbeit Dedekinds „Was sind und was sollen die Zahlen?“ sprechen — meist in gegnerischem Sinne. Die Abhandlung ist neben der Untersuchung von Frege der wichtigste erste tiefgreifende Versuch einer Begründung der elementaren Zahlenlehre. Etwa zu gleicher Zeit, also schon vor mehr als einem Menschenalter, hat Kronecker eine Auffassung klar ausgesprochen und durch zahlreiche Beispiele erläutert, die heute im wesentlichen mit unserer finiten Einstellung zusammenfällt.

Damals haben wir jungen Mathematiker, Privatdozenten und Studierende, den Sport getrieben, auf transfinitem Wege geführte Beweise mathematischer Sätze nach Kroneckers Muster ins Finite zu übertragen. Kronecker machte nur den Fehler, die transfinite Schlußweise für unzulässig zu erklären. Er erließ Verbote gegen die transfinite Schlußweise, insbesondere sollte man nach ihm nicht schließen dürfen, daß, wenn eine Aussage  $\mathfrak{A}(n)$  nicht für jede ganze Zahl  $n$  zutrifft, es eine ganze Zahl  $n$  geben müsse, für die jene Aussage falsch ist. Damals lehnte die ganze Mathematik einmütig seine Verbote ab und ging über sie zur Tagesordnung über.

Wie verhält es sich nun tatsächlich mit dem Gebrauch der transfiniten Schlußweisen?

Die Zahlkörpertheorie z. B. ist ein feingegliedertes, himmelhoch errichtetes Gebäude, verbunden mit den weitest entwickelten Theorien der Analysis, das alle anderen Geistesprodukte der Menschheit an Schönheit und Vollkommenheit weit überragt, und in ihr wird auf Schritt und Tritt das Tertium non datur und überhaupt die transfinite Schlußweise der von Kronecker verbotenen Art angewandt. Alle die Geistesheroen vor Gauß und ebenso die nach Gauß, Hermite, Jacobi bis zu Poincaré, haben die transfinite Schlußweise in mannigfaltigster und kühnster Weise gebraucht, und niemals hat sich auch nur die geringste Unstimmigkeit gezeigt. Endlich, wenn wir erst an alle Anwendungen denken und uns klarmachen, was für eine Fülle von transfiniten Schlüssen der schwierigsten und mühsamsten Art z. B. in der Relativitätstheorie und Quantentheorie steckt, und wie sich doch die Natur genau nach diesen Ergebnissen richtet: der Fixsternstrahl, der

Merkur und die kompliziertesten Spektren hier auf Erden und in der Ferne von hunderttausenden Lichtjahren; sollten wir bei dieser Sachlage wegen der schönen Augen Kroneckers und einiger als Mathematiker verkleideter Philosophen aus Gründen, die noch dazu völlig willkürlich und gar nicht einmal präzise formulierbar sind, auch nur einen Augenblick an der Berechtigung der Anwendung des Tertium non datur zweifeln?

Es beruht ja überhaupt jede wissenschaftliche Erkenntnis auf einer vernünftigen Abschätzung der Wahrscheinlichkeit durch Heranziehung der Übereinstimmung und des gegenseitigen Verhaltens: Denken wir an die Theorien in der Physik oder Astronomie, z. B. den Aufbau der Sternenwelt, oder in der Biologie an die Vererbungsgesetze und den Entwicklungsgedanken, alles Ergebnisse, die wir heute als festgestellte sichere Wahrheiten ansehen. Es wäre ja der Tod aller Wissenschaft und die Unmöglichkeit irgendeines Fortschrittes, wenn wir nicht einmal solche Gesetze wie die der elementaren Arithmetik als Wahrheit gelten lassen wollten. Trotzdem gibt es auch heute noch Anhänger Kroneckers, die an die Statthaftigkeit des Tertium non datur nicht glauben: Es ist das wohl der krasseste Unglaube, den wir in der Geschichte der Menschheit antreffen.

Aber andererseits: Eine Wissenschaft wie die Mathematik, hat sich nicht auf Glauben zu stützen, so stark dieser auch sei, sondern die Pflicht einer restlosen Aufklärung. Da nun die Anwendbarkeit des Tertium non datur bei endlich vielen Aussagen eine Selbstverständlichkeit ist, so wendet sich unsere ganze Aufmerksamkeit sofort dem Begriff „unendlich“ zu, und ich habe über das Unendliche eine ausführliche Untersuchung angestellt, kann aber hier nur das Fazit dieser Untersuchung mitteilen.

Die Physik lehrt, daß ein homogenes Kontinuum, welches die fortgesetzte Teilbarkeit zuließe und somit das Unendliche im Kleinen realisieren würde, in der Wirklichkeit nirgends angetroffen wird. Die unendliche Teilbarkeit eines Kontinuums ist nur eine in Gedanken vorhandene Operation, nur eine Idee, die durch unsere Beobachtungen der Natur und die Erfahrungen der Physik und Chemie widerlegt wird. Andererseits stellen sich in der Astronomie schwerwiegende Bedenken gegen das Vorhandensein des unendlichen Raumes, also der Unendlichkeit im Großen, ein. Auch all unser Handeln ist finit, und das Unendliche findet darin keinen Platz. Das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig. Die bedingungslose Anwendung des Tertium non datur und der Negation können wir aber nicht entbehren, da sonst der lückenlose und einheitliche Aufbau unserer Wissenschaft unmöglich wäre. Das Operieren mit dem Unendlichen muß also durch das Endliche gesichert werden, und das geschieht eben durch meine Beweistheorie.

Mit dieser Neubegründung der Mathematik verfolge ich ein bedeutsames Ziel: Ich möchte nämlich die Grundlagenfrage in der Mathematik als solche endgültig aus der Welt schaffen, indem ich jede mathematische Aussage zu einer konkret aufweisbaren und streng ableitbaren Formel mache und dadurch die mathematischen Begriffsbildungen und Schlüsse in eine solche Fassung bringe, daß sie unwiderleglich sind und doch ein Bild der gesamten Wissenschaft liefern.

Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist nun folgender:

Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen, insbesondere die für „folgt“ ( $\rightarrow$ ) und für „nicht“ ( $\neg$ ), darin vorkommen. Gewisse Formeln, die als Fundament des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen, wo jede der Prämissen entweder Axiom ist oder mit der Endformel eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt, bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht. An Stelle des inhaltlichen Schließens tritt in der Beweistheorie ein äußeres Handeln nach Regeln, nämlich der Gebrauch des Schlußschemas und der Einsetzung. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom oder die Endformel eines Beweises ist.

Zu der eigentlichen so formalisierten Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine Metamathematik, die zur Sicherung jener notwendig ist, in der — im Gegensatz zu den rein formalen Schlußweisen der eigentlichen Mathematik — das inhaltliche Schließen zur Anwendung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome.

Die Axiome und beweisbaren Sätze, d. h. die Formeln, die in diesem Wechselspiel entstehen, sind die Abbilder der Gedanken, die das übliche Verfahren der bisherigen Mathematik ausmachen.

Durch dieses Programm ist die Wahl der Axiome für unsere Beweistheorie schon vorgezeichnet. Was die Auswahl der Axiome betrifft, so unterscheiden wir analog wie in der Geometrie qualitativ einzelne getrennte Gruppen.

I. Axiome der Folge:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

(Zufügen einer Voraussetzung);

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$$

(Elimination einer Aussage);

$$\{A \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow (A \rightarrow B).$$

II. Axiome über „und“ ( $\&$ ) sowie „oder“ ( $\vee$ ).

III. Axiome der Negation:

$$\{A \rightarrow (B \& \bar{B})\} \rightarrow \bar{A}$$

(Satz vom Widerspruch);

$$\bar{\bar{A}} \rightarrow A$$

(Satz von der doppelten Verneinung).

Diese Axiome der Gruppen I, II, III sind keine anderen als die Axiome des Aussagenkalküls.

IV. Transfinite Axiome:

$$(x)A(x) \rightarrow A(b)$$

(Schluß vom Allgemeinen aufs Besondere, Aristotelisches Axiom);

Umkehrung durch das Schema:

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{A} \rightarrow (x)\mathfrak{B}(x)};$$

$$A(a) \rightarrow (Ex)A(x)$$

Umkehrung wiederum durch Schema. Weitere Formeln sind ableitbar, z. B.

$$(\bar{x})A(x) \leftrightarrow (Ex)\bar{A}(x)$$

(wenn ein Prädikat nicht für alle Argumente gilt, so gibt es ein Gegenbeispiel, und umgekehrt);

$$(\bar{Ex})A(x) \leftrightarrow (x)\bar{A}(x)$$

(wenn es kein Beispiel für eine Aussage gibt, so ist die Aussage für alle Argumente falsch, und umgekehrt).

Die Axiome dieser Gruppe IV sind die des Prädikatenkalküls.

Dazu kommen die speziell mathematischen Axiome:

V. Axiome der Gleichheit:

$$a = a;$$

$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$$

und

VI. Axiome der Zahl:

$$a + 1 + 0;$$

sowie das Axiom der vollständigen Induktion und das Schema der Rekursion.

Der Beweis der Widerspruchsfreiheit ist zuletzt von Ackermann und v. Neumann so weit durchgeführt worden, daß in der elementaren Zahlenlehre die Widerspruchsfreiheit für die eben aufgezählten Axiome folgt und mithin für den Bereich der elementaren Zahlenlehre die transfiniten Schluß-

weisen, insbesondere die Schlußweise des Tertium non datur, als zulässig erkannt worden sind. Unsere wichtigste weitere Aufgabe besteht darin, folgendes zu zeigen (vgl. Math. Annalen 102, S. 6):

1. Wenn eine Aussage als widerspruchsfrei erwiesen werden kann, so ist sie auch beweisbar; und ferner

2. Wenn für einen Satz  $\mathfrak{S}$  die Widerspruchsfreiheit mit den Axiomen der Zahlentheorie nachgewiesen werden kann, so kann nicht auch für  $\mathfrak{S}$  die Widerspruchsfreiheit mit jenen Axiomen nachgewiesen werden.

Es ist mir nun gelungen, diese Sätze wenigstens für gewisse einfache Fälle zu beweisen. Dieser Fortschritt wird erreicht, indem ich zu den bereits zugelassenen Schlußregeln (Einsetzung und Schlußfigur) noch folgende ebenfalls finite neue Schlußregel hinzufüge:

Falls nachgewiesen ist, daß die Formel

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$$

allemaal, wenn  $\mathfrak{z}$  eine vorgelegte Ziffer ist, eine richtige numerische Formel wird, so darf die Formel

$$(x)\mathfrak{A}(x)$$

als Ausgangsformel angesetzt werden.

Es sei hier daran erinnert, daß die Aussage  $(x)\mathfrak{A}(x)$  viel weiter reicht als die Formel  $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ , wo  $\mathfrak{z}$  eine beliebig vorgelegte Ziffer ist. Denn im ersteren Falle darf in  $\mathfrak{A}(x)$  für  $x$  nicht bloß eine Ziffer, sondern auch ein jeder in unserem Formalismus gebildete Ausdruck vom Zahlcharakter eingesetzt werden, und außerdem ist die Bildung der Negation nach dem Logikkalkül ausführbar.

Zunächst erkennen wir, daß das Axiomensystem auch bei Hinzunahme der neuen Regel widerspruchsfrei bleibt.

Es sei nämlich eine Beweisfigur vorgelegt, die in einen Widerspruch mündet.

Der bisherige Beweis der Widerspruchsfreiheit besteht nun darin, daß man nach einem bestimmten Verfahren alle Formeln des vorgelegten Beweises in numerische verwandelt; alsdann kommt es darauf an, festzustellen, daß alle Ausgangsformeln richtig sind. Nun werden bei unserem Verfahren auch aus denjenigen Formeln, die gemäß der neuen Regel hingeschrieben worden sind, numerische Formeln, und zwar wird aus  $(x)\mathfrak{A}(x)$  eine Formel  $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ , wo  $\mathfrak{z}$  eine bestimmte Ziffer ist. Diese Formel ist aber nach der Voraussetzung der neuen Regel ebenfalls richtig. Unser Verfahren führt also nach wie vor alle Ausgangsformeln der Beweisfigur in richtige Formeln über. Der Beweis der Widerspruchsfreiheit ist damit geführt.

Sei nun eine Formel  $\mathfrak{S}$  der Gestalt

$$(x)\mathfrak{A}(x),$$

die außer  $x$  keine weiteren Variablen enthält, zu den Axiomen widerspruchsfrei. Dann ist  $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$  sicher richtig, sobald für  $\mathfrak{z}$  eine Ziffer eingesetzt wird; denn sonst wäre  $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$  richtig und daher beweisbar und würde somit einen Widerspruch zu  $(x)\mathfrak{A}(x)$  geben, entgegen unserer Voraussetzung.

Also ist nach der neuen Schlußregel unsere Formel  $\mathfrak{S}$  bewiesen. Satz 1 gilt also für jede Aussage  $\mathfrak{S}$  von der Gestalt  $(x)\mathfrak{A}(x)$ , die außer  $x$  keine weitere Variable enthält. Für eben diese Aussagen von der Art  $\mathfrak{S}$  folgt aus dem eben bewiesenen Satz 1 auch die Gültigkeit von Satz 2.

Gehen wir nun von einer Aussage  $\mathfrak{T}$  der Gestalt

$$\mathfrak{T}: (Ex)\mathfrak{A}(x)$$

aus, so ist offenbar die Negation dieser Aussage

$$\overline{\mathfrak{T}}: (x)\overline{\mathfrak{A}}(x)$$

von der vorhin betrachteten Gestalt  $\mathfrak{S}$ . Nach Satz 2 ist es daher nicht möglich, für jede der beiden Aussagen  $\mathfrak{T}$  und  $\overline{\mathfrak{T}}$  den Beweis der Widerspruchsfreiheit zu führen. Setzen wir also voraus, daß für  $\mathfrak{T}$  der Beweis der Widerspruchsfreiheit geführt sei, so folgt, daß für  $\overline{\mathfrak{T}}$  nicht auch der Beweis der Widerspruchsfreiheit geführt werden kann, und damit ist Satz 2 auch noch für jede Aussage von der Gestalt  $\mathfrak{T}$  bewiesen. Freilich darf daraus noch nicht geschlossen werden, daß  $\mathfrak{T}$  beweisbar ist. —

Gegen meine Beweistheorie sind verschiedenartige Einwendungen erhoben worden; sie sind sämtlich unberechtigt. Es sei hierzu folgendes bemerkt:

1. Der Beurteiler meiner Theorie möge genau die Stelle in meinem Beweis angeben, wo mein vermeintlicher Fehler liegen soll. Andernfalls lehne ich es ab, seinen Gedankengang zu prüfen.

2. Es wird meiner Theorie zum Vorwurf gemacht, daß die Sätze zwar widerspruchsfrei seien, aber damit noch nicht bewiesen wären. Freilich sind sie beweisbar, wie ich hier in einfachen Fällen gezeigt habe. Es stellt sich auch allgemein heraus, wie es von Anfang an meine Überzeugung war, daß die Erzielung der Widerspruchsfreiheit das Wesentliche in der Beweistheorie ist und die Frage der Beweisbarkeit bei eventueller sachgemäßer Ausdehnung der Festsetzungen unter Wahrung des finiten Charakters sich dann ebenfalls mit erledigt. Doch kann in einer Theorie nicht gleich verlangt werden, daß darin alle einschlägigen Fragen zur vollen Lösung kommen; es genügt, wenn der Weg dazu gezeigt wird.

3. Begriffe, wie z. B. „widerspruchsfrei“, hat der Beurteiler meiner Theorie so zu verstehen, wie ich sie gebrauche, nicht wie andere Autoren



sie sich definiert denken. Meine Deutung ist deshalb hier die maßgebende, weil sie so für meine Theorie allein in Betracht kommt.

4. Die Einwendungen gegen meine Theorie beziehen sich mitunter auf nebensächliche und für den Erfolg völlig gleichgültige Dinge, wie z. B. wenn sie sich gegen die Bezeichnungsweise „ideal“ richten, die ich gebrauche, und allerdings trotz der gegnerischen Erwägungen für äußerst zutreffend und das Verständnis fördernd halte. Auch sonst werden einseitige Vorurteile und Schlagworte gerne ins Feld geführt. Über den Vorwurf des Formalismus habe ich mich in früheren Abhandlungen ausgesprochen. Die Formel ist ein notwendiges Hilfsmittel der logischen Untersuchung. Freilich erfordert ihr Gebrauch präzise Gedankenarbeit und macht leeres Geschwätz unmöglich.

5. Es gibt bisher keine andere Theorie, ja es ist meiner Meinung nach gar keine andere Theorie mit gleichem Erfolge denkbar, denn meine Beweistheorie tut nichts anderes als die intime Tätigkeit unseres Verstandes nachzubilden und ein Protokoll über die Regeln aufzunehmen, nach denen unser Denken tatsächlich verfährt. Das Denken geschieht eben parallel dem Sprechen und Schreiben: durch Bildung und Aneinanderreihung von Sätzen. Und zur Begründung brauche ich weder den lieben Gott wie Kronecker, noch die Annahme einer besonderen auf das Prinzip der vollständigen Induktion abgestimmten Fähigkeit unseres Verstandes wie Poincaré, noch die Urintuition wie Brouwer, endlich auch nicht wie Russell und Whitehead das Axiom der Unendlichkeit und Reduzierbarkeit, die ja wirkliche inhaltliche und durch Beweise der Widerspruchsfreiheit nicht kompensierbare Voraussetzungen sind, von denen die letztere nicht einmal plausibel ist.

In einem neueren philosophischen Vortrage finde ich den Satz:

„Das Nichts ist die schlechthinige Verneinung der Allheit des Seienden.“

Dieser Satz ist deshalb lehrreich, weil er trotz seiner Kürze alle hauptsächlichen Verstöße gegen die in meiner Beweistheorie aufgestellten Grundsätze illustriert. Begriffe wie „Allheit des Seienden“ enthalten einen Widerspruch in sich und gefährden schon allein den Sinn einer jeden Behauptung. Aber hiervon abgesehen wird nun auf den problematischen Begriff Allheit des Seienden die Negation angewendet. Es ist gerade eine der wichtigsten Aufgaben der Beweistheorie, Sinn und Zulässigkeit der Negation klarzustellen: die Negation ist ein formaler Prozeß, durch den aus einer Aussage  $\ominus$  eine andere hervorgeht, die mit  $\ominus$  durch die vorhin genannten Axiome der Negation (also wesentlich principium contradictionis und tertium non datur) verbunden ist. Der Prozeß der Negation ist ein notwendiges theoretisches Forschungsmittel; seine unbedingte Anwendung ermöglicht erst die Voll-



ständigkeit und Abgeschlossenheit der Logik. Aber im allgemeinen ist die durch Negation entstehende Aussage eine ideale, und es hieße Natur und Wesen des Denkens verkennen, wenn man diese ideale Aussage selbst an sich als real nehmen wollte. —

Ich glaube, das, was ich wollte und versprach, durch die Beweistheorie vollständig erreicht zu haben: Die mathematische Grundlagenfrage als solche ist dadurch, wie ich glaube, endgültig aus der Welt geschafft.

Den Philosophen wird es schon interessieren, daß es eine Wissenschaft wie die Mathematik überhaupt gibt. Für uns Mathematiker ist es die Aufgabe, sie wie ein Heiligtum zu hüten, damit einst *alles* menschliche Wissen überhaupt der gleichen Präzision und Klarheit teilhaftig wird. Daß dies kommen muß und geschehen wird, ist meine feste Überzeugung.

(Eingegangen am 21. 12. 1939.)

# Über $\varphi$ -adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlssysteme.

Von

Helmut Hasse in Marburg.

## Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung . . . . .	495
§ 1. $p$ -adische Erweiterung des Zentrums $K$ . . . . .	498
§ 2. Grundlegende Sätze über $\varphi$ -adische Schiefkörper $S$ . . . . .	499
§ 3. Der (die) Trägheitskörper $W$ von $S$ . . . . .	507
§ 4. Normierung des Primelements $\pi$ von $S$ . . . . .	511
§ 5. Die Typen $\varphi$ -adischer Schiefkörper . . . . .	514
§ 6. Die Differente von $S$ . . . . .	517
§ 7. Übergang zur Arithmetik im Matrizenystem $A$ aus $S$ . . . . .	518
§ 8. Übergang zur Arithmetik im einfachen Ausgangssystem $A$ . . . . .	526

## Einleitung.

Die algebraische Struktur halbeinfacher hyperkomplexer Zahlssysteme beherrscht man bekanntlich vollständig mittels der beiden grundlegenden Struktursätze von Herrn Wedderburn<sup>1)</sup>:

*Jedes halbeinfache System ist direkte Summe eindeutig bestimmter einfacher, und umgekehrt.*

*Jedes einfache System ist als volles Matrizenystem aus einem eindeutig bestimmten Schiefkörper (System ohne Nullteiler) darstellbar, und umgekehrt.*

Darauf aufbauend wurde die Arithmetik halbeinfacher hyperkomplexer Zahlssysteme über dem rationalen Zahlkörper zuerst von Herrn Speiser<sup>2)</sup> entwickelt. Dessen Theorie wurzelt in der Betrachtung der aus dem ge-

<sup>1)</sup> J. H. MacLagan Wedderburn, On hypercomplex numbers, Proc. London Mathem. Soc. 6 (1907). — Siehe auch L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie (Zürich-Leipzig 1927). — Das Dickson'sche Buch wird im folgenden zitiert mit D.

<sup>2)</sup> A. Speiser, Allgemeine Zahlentheorie, Vierteljahresschrift d. Naturf. Ges. Zürich 71 (1926). — Siehe auch das von Speiser verfaßte letzte Kapitel in D.

gegebenen System entspringenden Restsysteme nach Primzahlpotenzmoduln. Weiter gab dann Herr Artin<sup>2)</sup> eine neue Begründung und Fortführung, die ganz nach dem Muster der auf den Spezialfall der algebraischen Zahlkörper bezüglichen Dedekindschen Idealtheorie vorgeht. Die Durchführung der Artinschen Theorie erfordert eine Ausdehnung der Wedderburnschen Struktursätze auf allgemeinere Ringe, nämlich solche, wie sie etwa durch die Restsysteme eines hyperkomplexen Systems über dem rationalen Zahlkörper nach Primzahlpotenzmoduln gegeben werden; denn diese Restsysteme sind (für höhere Primzahlpotenzmoduln) keine hyperkomplexen Systeme im Sinne der Wedderburnschen Theorie, weil sie nicht in bezug auf einen Körper von endlichem Rang sind. Die erforderliche Verallgemeinerung der Struktursätze hat Herr Artin<sup>4)</sup> in einer besonderen Veröffentlichung seiner arithmetischen Theorie vorangestellt.

Wenn einerseits diese Artinschen Struktursätze im Rahmen einer algebraischen Strukturtheorie allgemeiner nicht-kommutativer Ringe, wie sie etwa in der neuen großen Arbeit von Fräulein Noether<sup>3)</sup> niedergelegt ist, von hohem Interesse sind, so scheint es mir andererseits für den besonderen Zweck des Aufbaus der Arithmetik hyperkomplexer Zahlssysteme wertvoll, allein mit den ursprünglichen Wedderburnschen Struktursätzen als immanenten Hilfsmitteln auszukommen.

Das kann ich in der Tat erreichen. Ich baue dazu einfach den ursprünglichen Speiserschen Ansatz in demselben Sinne aus, wie es die Henselsche Arithmetik der algebraischen Zahlkörper mit dem ursprünglichen, in der Betrachtung der Restsysteme nach Primzahlpotenzmoduln wurzelnden Kummerschen Ansatz tut<sup>6)</sup>. Betrachtet man nämlich an Stelle des Restsystems nach einer genügend hohen Primzahlpotenz  $p^h$  gleichzeitig die Restsysteme nach jeder noch so hohen Potenz von  $p$ , so kommt das darauf hinaus, daß man den rationalen Koeffizientenkörper  $p$ -adisch erweitert. Man hat dann den Vorteil, daß die  $p$ -adischen Zahlen, im Gegensatz zu den rationalen Resten mod  $p^h$ , einen Körper bilden. An Stelle des Speiserschen Restsystems mod  $p^h$  tritt demzufolge ein System, das in bezug auf einen Körper, den  $p$ -adischen Zahlkörper, von endlichem Rang ist, also ein hyperkomplexes System im Sinne der Wedderburnschen Theorie.

<sup>2)</sup> E. Artin, Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen, Abh. Mathem. Sem. Hamburg 5 (1927). — Im folgenden zitiert mit A.

<sup>4)</sup> E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abh. Mathem. Sem. Hamburg 5 (1927).

<sup>3)</sup> E. Noether, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, Math. Zeitschr. 30 (1929).

<sup>6)</sup> Die Durchführung dieses Gedankens bezeichnete mir Herr R. König von einer anderen Seite her als wünschenswert und gab so den unmittelbaren Anstoß zur Abfassung dieser Arbeit.

Auf dieser Grundlage gelingt es nun überraschend einfach, frei von allen in der Speiserschen Theorie auftretenden Schwierigkeiten, den Aufbau der hyperkomplexen Arithmetik zu vollziehen und die in ihr vorliegenden Verhältnisse klar vor Augen zu führen. Insbesondere ergibt sich dabei ein neuer durchsichtiger Beweis des neuerdings von Herrn Brandt<sup>7)</sup> gefundenen allgemeinen Zerlegungsgesetzes für die Zentrumsprimideale in einem einfachen System, und es tritt der tiefere Grund für die besondere Einfachheit dieses Zerlegungsgesetzes hervor, den man aus dem Brandtschen mit Größenabschätzungen operierenden Beweis nicht recht ersehen kann.

Nach dem ersten Wedderburnschen Struktursatz bedeutet es für den Aufbau der hyperkomplexen Arithmetik keine Einschränkung, wenn allein der Spezialfall eines einfachen Systems  $A$  betrachtet wird. Ich werde ferner den Aufbau gleich für den allgemeinen Fall eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers  $K$ , statt speziell des rationalen, als Koeffizientenkörper durchführen. Da nach dem zweiten Wedderburnschen Struktursatz das Zentrum eines einfachen Systems  $A$  ein Relativkörper über dem Koeffizientenkörper  $K$  ist, so bedeutet es dann weiterhin keine Einschränkung, wenn von vornherein  $K$  als das Zentrum von  $A$  vorausgesetzt wird.

Für einen algebraischen Zahlkörper  $K$  tritt an Stelle der Primzahl  $p$  und des  $p$ -adischen Zahlkörpers ein Primideal  $\mathfrak{p}$  aus  $K$  und der zugehörige  $p$ -adische Zahlkörper  $K_{\mathfrak{p}}$ . Die Durchführung des Aufbaus kommt dann wesentlich auf das Studium der Schiefkörper  $S_{\mathfrak{p}}$  über dem  $p$ -adischen algebraischen Zahlkörper  $K_{\mathfrak{p}}$  hinaus, das ich hier etwas weitergehend verfolge, als es für die hyperkomplexe Arithmetik an sich erforderlich wäre. Zunächst übertragen sich fast wörtlich die grundlegenden Sätze, die Herr Hensel<sup>8)</sup> im kommutativen Spezialfall gewonnen hat. Diese Sätze reichen zum Aufbau der hyperkomplexen Arithmetik im wesentlichen aus. Darüber hinaus gelingt es mir, eine einfache Übersicht über alle überhaupt vorhandenen Schiefkörper über einem  $p$ -adischen algebraischen Zahlkörper als Zentrum und einen genauen Einblick in deren algebraische und arith-

<sup>7)</sup> H. Brandt, Zur Idealtheorie Dedekindscher Algebren, Comment. Mathem. Helvetici 2 (1930). — Teilaussagen dieses Zerlegungsgesetzes siehe auch schon bei A. § 4.

<sup>8)</sup> K. Hensel, Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen, Math. Zeitschr. 2 (1918). — Ich brauche im folgenden die Kenntnis der in dieser Arbeit entwickelten Theorie der  $p$ -adischen algebraischen Zahlkörper nicht vorauszusetzen. Vielmehr schließen meine Entwicklungen diese Theorie ein, wenn man speziell als Grundkörper  $K$  den  $p$ -adischen Zahlkörper und als Schiefkörper  $S$  den zu studierenden  $p$ -adischen algebraischen Zahlkörper nimmt. Wer auch diese Theorie aus der vorliegenden Arbeit lernen will, muß nur die Paragraphen 2, 3 zweimal lesen und dabei einmal den eben genannten Spezialfall im Auge haben, das zweite Mal dann den allgemeinen Fall, wo ein beliebiger  $p$ -adischer algebraischer Zahlkörper Grundkörper ist und somit die bei der ersten Lektüre gewonnenen Erkenntnisse den Ausgang bilden.

metische Struktur zu erhalten, in Analogie zu der bekannten Tatsache, daß es über dem reellen Zahlkörper als Zentrum nur einen Schiefkörper, den Quaternionenkörper, gibt.

### Bezeichnungsnormen.

- |   |  |
|---|--|
| 1. Grundkörper $K$<br>und Erweiterung $K_p$ | { Elemente: kl. lat. kursive Buchst., insbes. $p$ ,<br>Ideale: kl. lat. steile Buchst. insbes. $p, o$ ;        |
| 2. Schiefkörper $S_p$                       | { Elemente: kl. griech. Buchst., insbes. $\pi$ ,<br>Ideale: kl. lat. geschwungene Buchst., insbes. $\rho, o$ ; |
| 3. Matrizenystem $A_p$                      | { Elemente: kl. griech. Buchst.,<br>Ideale: kl. deutsche mit $p$ indizierte Buchst., insbes. $p_p, o_p$ ;      |
| 4. Ausgangssystem $A$                       | { Elemente: kl. griech. Buchst.,<br>Ideale: kl. deutsche Buchst., insbes. $p, o$ .                             |

Siehe auch die Bemerkung am Schluß von § 1.

### § 1.

#### $p$ -adische Erweiterung des Zentrums $K$ .

$A$  sei ein einfaches hyperkomplexes System über einem algebraischen Zahlkörper  $K$  als Zentrum.  $p$  sei ein Primideal aus  $K$  und  $K_p$  die zugehörige  $p$ -adische Erweiterung von  $K$ .

Ich betrachte das durch  $A$  bestimmte hyperkomplexe System  $A_p$  über  $K_p$ , das man erhält, wenn man eine  $K$ -Basis von  $A$  unter Beibehaltung der Multiplikationsregeln als  $K_p$ -Basis von  $A_p$  zugrunde legt. Von welcher  $K$ -Basis von  $A$  man ausgeht, ist dabei, wie man sofort einsieht, gleichgültig.

**Satz 1.**  $A_p$  ist halbeinfach.

**Beweis.** Dafür ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß eine gewisse aus den Multiplikationskonstanten einer  $K_p$ -Basis von  $A_p$  gebildete Determinante nicht verschwindet. Da  $A$  halbeinfach ist, ist das für  $A$  der Fall. Da  $K$ -Basis und Multiplikationskonstanten von  $A$  dieselbe Bedeutung für  $A_p$  über  $K_p$  haben, ist es dann auch für  $A_p$  der Fall.

**Satz 2.**  $A_p$  hat  $K_p$  als Zentrum.

**Beweis.** Bilden die  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) eine  $K$ -Basis von  $A$ , so wird die Zugehörigkeit eines Elementes  $\alpha = \sum_{i=1}^M x_i \omega_i$  aus  $A$  zum Zentrum von  $A$  durch das Bestehen eines gewissen linearen homogenen Gleichungssystems für die Koordinaten  $x_i$  von  $\alpha$  charakterisiert. Dasselbe Gleichungssystem für die Koordinaten  $\bar{x}_i$  eines Elementes  $\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^M \bar{x}_i \omega_i$  aus  $A_p$  charakterisiert dann die Zugehörigkeit von  $\bar{\alpha}$  zum Zentrum von  $A_p$ . Da das Zentrum von  $A$  der Körper  $K$ , also ein Teilsystem vom Rang 1 ist, besitzt jenes

Gleichungssystem genau eine linear-unabhängige Lösung, eine Tatsache, die bekanntlich unabhängig davon ist, ob das Gleichungssystem in  $K$  oder in  $K_p$  betrachtet wird. Daher hat auch das Zentrum von  $A_p$  den Rang 1, und fällt also mit dem Körper  $K_p$  zusammen.

Satz 3.  $A_p$  ist einfach.

Beweis. Wäre das nach Satz 1 halbeinfache System  $A_p$  nicht einfach, so wäre nach den Wedderburnschen Struktursätzen sein Zentrum eine direkte Summe von mehreren Körpern. Das widerspricht aber Satz 2. —

Die beiden Sätze 2 und 3 bilden die Wurzel für das schon in der Einleitung angeführte allgemeine Brandtsche Zerlegungsgesetz, nämlich Satz 3 dafür, daß in  $p$  nur ein einziges zweiseitiges Primideal  $p$  von  $A$  aufgeht (bei fester Maximalordnung von  $A$ ), und Satz 2 dafür, daß dessen Verzweigungsordnung  $e$  und Relativgrad  $f$  übereinstimmen.

Satz 4.  $A_p$  ist als volles Matrizenystem aus einem Schiefkörper  $S_p$  mit dem Zentrum  $K_p$  darstellbar.

Beweis. Das folgt ohne weiteres aus den Sätzen 2 und 3 nach dem zweiten Wedderburnschen Struktursatz.

In den folgenden Paragraphen 2 bis 6 wird ein solcher Schiefkörper  $S_p$  über  $K_p$  eingehend untersucht, in § 7 werden diese Ergebnisse dann auf die Untersuchung des vollen Matrizenystems  $A_p$  aus  $S_p$  angewendet, und in § 8 wird schließlich der Übergang von den einzelnen Systemen  $A_p$  zum Ausgangssystem  $A$  vollzogen.

Der Einfachheit halber lasse ich in den Paragraphen 2 bis 7 den Index  $p$  bei  $K_p$ ,  $S_p$ ,  $A_p$  und einigen weiteren noch einzuführenden Zeichen fort; erst in § 8 betone ich wieder die Zugehörigkeit zu einem einzelnen Primideal  $p$  von  $K$  durch Anfügung eines Index  $p$ .

## § 2.

### Grundlegende Sätze über $p$ -adische Schiefkörper $S$ \*).

$S$  sei ein Schiefkörper über dem  $p$ -adischen Körper  $K$ .  $S$  habe über  $K$  den Rang  $m$  und den Grad  $n$ . Wenn  $K$  zugleich das Zentrum von  $S$  ist, ist bekanntlich  $m = n^2$ . Ich will aber zunächst — in Verfolg der Ausführungen in Fußnote \*) — von dieser speziellen Voraussetzung absehen. Dann ist jedenfalls  $n$  ein Teiler von  $m$ .

Satz 5. Jedes Element  $\alpha$  aus  $S$  ist Wurzel eines eindeutig bestimmten normierten irreduziblen Polynoms in  $K$ .

\*) Die Entwicklungen dieses Paragraphen und des ersten Teils des folgenden Paragraphen sind weitgehend parallel, ja fallen teilweise zusammen mit denen der in Fußnote \*) zitierten Henselschen Arbeit. Der Vollständigkeit halber führe ich aber hier alle Beweise noch einmal aus.

Beweis. Da in  $S$  keine Nullteiler vorhanden sind, kann das eindeutig bestimmte normierte Polynom niedrigsten Grades aus  $K$ , das  $\alpha$  zur Wurzel hat, nicht reduzibel in  $K$  sein. —

Neben der eben betrachteten irreduziblen Gleichung hat man für jedes Element  $\alpha$  aus  $S$  noch die *charakteristische Gleichung* vom Grade  $m$  und die *Hauptgleichung* vom Grade  $n$ . Die charakteristische Gleichung ist die charakteristische Gleichung derjenigen Matrizendarstellung  $m$ -ten Grades von  $S$ , die sich durch Vermittlung einer  $K$ -Basis von  $S$  ergibt (sogenannte reguläre Darstellung). Die Hauptgleichung ist die charakteristische Gleichung derjenigen Matrizendarstellung  $n$ -ten Grades von  $S$ , die sich nach den beiden Wedderburnschen Struktursätzen ergibt, wenn man den Koeffizientenkörper  $K$  von  $S$  algebraisch abschließt (oder auch nur hinreichend algebraisch erweitert). Ist  $r$  der Grad des Zentrums von  $S$ , so entsteht dabei eine direkte Summe von  $r$  vollen Matrizensystemen (übrigens gleichen Grades  $s = \frac{n}{r}$ ).

Satz 6. Die linke Seite der charakteristischen Gleichung von  $\alpha$  ist eine Potenz des zu  $\alpha$  gehörigen normierten irreduziblen Polynoms in  $K$ . Dasselbe gilt für die linke Seite der Hauptgleichung von  $\alpha$ .

Beweis. Das erstere ergibt sich unmittelbar, wenn man die charakteristische Gleichung von  $\alpha$  mittels einer  $K$ -Basis der besonderen Art  $\omega, \alpha^j$  ( $i = 0, \dots, l-1$ ;  $j = 0, \dots, k-1$ ) bildet, wo  $k$  der Grad des zu  $\alpha$  gehörigen irreduziblen Polynoms und  $l = \frac{m}{k}$  ist.

Das letztere ergibt sich dann daraus, daß die linke Seite der Hauptgleichung ein Teiler der linken Seite der charakteristischen Gleichung ist. Wie in A. § 4 ist nämlich auch hier, wo  $K$  nicht notwendig das Zentrum von  $S$  ist, für unbestimmte Koordinaten die Gleichung niedrigsten Grades invariant bei beliebiger algebraischer Erweiterung von  $K$ . Nach algebraischem Abschließen von  $K$  ist nun ersichtlich die oben definierte Hauptgleichung diese Gleichung niedrigsten Grades. Somit ist auch vorher diese Hauptgleichung für unbestimmte Koordinaten als die Gleichung niedrigsten Grades charakterisiert und als solche offenbar Teiler der charakteristischen Gleichung. —

Ich nenne ein Element  $\alpha$  aus  $S$  *ganz*, wenn die Koeffizienten des zugehörigen normierten irreduziblen Polynoms in  $K$  ganze Zahlen aus  $K$  sind.

Satz 7. Ein Element  $\alpha$  aus  $S$  ist dann und nur dann ganz, wenn seine Norm<sup>10)</sup> ganz ist.

Beweis. Nach Satz 6 kommt der Satz auf die folgende Behauptung über irreduzible Polynome aus  $K$  zurück:

<sup>10)</sup> Unter Norm und Spur eines Elements  $\alpha$  (Bezeichnung  $n(\alpha)$  und  $s(\alpha)$ ) verstehe ich in dieser Arbeit stets die aus der Hauptgleichung von  $\alpha$  definierte Norm und Spur.



Sind der erste und der letzte Koeffizient eines irreduziblen Polynoms aus  $K$  ganz, so sind auch alle mittleren Koeffizienten ganz.

Durch Übergang zum zugehörigen ganzzahligen primitiven Polynom ordnet sich diese Behauptung ohne weiteres der folgenden unter:

Ein ganzzahliges primitives Polynom  $f(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$  aus  $K$ , für das ein mittlerer Koeffizient  $a_r \not\equiv 0 \pmod p$ , aber der letzte  $a_k \equiv 0 \pmod p$  ist, ist reduzibel in  $K$ .

Ist  $a_r$  der letzte nicht durch  $p$  teilbare Koeffizient, so hat man jedenfalls  $\pmod p$  die Zerlegung

$$f(x) \equiv (a_0 x^r + \dots + a_r) x^{k-r} \pmod p$$

in zwei ganzzahlige,  $\pmod p$  teilerfremde, nicht-triviale Faktoren. So ordnet sich die Behauptung weiter dem folgenden, später noch anderweitig anzuwendenden Hilfssatz unter:

**Hilfssatz.** Zerfällt ein Polynom  $f(x)$  aus  $K \pmod p$  in zwei ganzzahlige,  $\pmod p$  teilerfremde Faktoren:

$$f(x) \equiv g_0(x) h_0(x) \pmod p,$$

so zerfällt  $f(x)$  in  $K$  in zwei zu jenen  $\pmod p$  kongruente Faktoren:

$$f(x) = g(x) h(x)$$

mit

$$g(x) \equiv g_0(x), \quad h(x) \equiv h_0(x) \pmod p.$$

Beweis.  $g_0(x)$ ,  $h_0(x)$  seien in ihren Restklassen  $\pmod p$  so gewählt, daß ihre Grade  $r, s$  als Summe  $r + s = k$  den Grad  $k$  von  $f(x)$  haben, und daß ihre höchsten Glieder als Produkt das höchste Glied von  $f(x)$  haben.

Angenommen, man habe, mit einem Primelement  $p$  zu  $p$ , schon zwei ganzzahlige Polynome

$$g_{r-1}(x) = g_0(x) + p u_1(x) + \dots + p^{r-1} u_{r-1}(x),$$

$$h_{s-1}(x) = h_0(x) + p v_1(x) + \dots + p^{s-1} v_{s-1}(x)$$

aus  $K$  der Grade  $r, s$  derart, daß

$$f(x) \equiv g_{r-1}(x) h_{s-1}(x) \pmod{p^r},$$

$$g_{r-1}(x) \equiv g_0(x), \quad h_{s-1}(x) \equiv h_0(x) \pmod p,$$

und daß das Produkt der höchsten Glieder von  $g_{r-1}(x)$ ,  $h_{s-1}(x)$  das höchste Glied von  $f(x)$  ist. Dann setze man an:

$$g_r(x) = g_{r-1}(x) + p^r u_r(x), \quad h_r(x) = h_{s-1}(x) + p^s v_r(x),$$

wo  $u_r(x)$ ,  $v_r(x)$  zu bestimmende ganzzahlige Polynome aus  $K$  sind. Damit dann

$$f(x) \equiv g_r(x) h_r(x) \pmod{p^{r+1}}$$



wird, ist notwendig und hinreichend, daß  $u_r(x)$ ,  $v_r(x)$  der Bedingung

$$h_{r-1}(x)u_r(x) + g_{r-1}(x)v_r(x) \equiv \frac{f(x) - g_{r-1}(x)h_{r-1}(x)}{p^r} \pmod{p}$$

genügen. Da  $g_{r-1}(x)$ ,  $h_{r-1}(x)$  wie  $g_0(x)$ ,  $h_0(x) \pmod{p}$  teilerfremd sind, können  $u_r(x)$ ,  $v_r(x)$  dieser Bedingung gemäß gewählt werden, und da der Grad der rechten Seite höchstens  $k-1 = r+s-1$  ist, während  $g_{r-1}(x)$ ,  $h_{r-1}(x)$  die Grade  $r, s$  haben, sogar so, daß  $u_r(x)$ ,  $v_r(x)$  höchstens die Grade  $r-1, s-1$  haben und folglich das Produkt der höchsten Glieder von  $g_r(x)$ ,  $h_r(x)$  unverändert gleich dem höchsten Glied von  $f(x)$  ist. Dann erfüllen  $g_r(x)$ ,  $h_r(x)$  die für  $g_{r-1}(x)$ ,  $h_{r-1}(x)$  angenommenen Voraussetzungen mit  $r$  statt  $r-1$ .

So erhält man zwei unendliche Polynomfolgen  $g_r(x)$ ,  $h_r(x)$ . Diese sind ersichtlich  $p$ -adisch konvergent, und ihre Grenzfunktionen  $g(x)$ ,  $h(x)$  leisten der Behauptung des Hilfssatzes Genüge.

**Satz 8.** Die ganzen Elemente  $\alpha$  aus  $S$  bilden eine Ordnung  $\mathfrak{o}$ .

**Beweis.** Es sind die Ordnungspostulate (A. § 1) zu bestätigen:

1a. Mit zwei Elementen  $\alpha, \beta$  ist auch das Produkt  $\alpha\beta$  ganz. Das folgt mittels Satz 7 ohne weiteres aus  $n(\alpha\beta) = n(\alpha)n(\beta)$ .

1b. Mit zwei Elementen  $\alpha, \beta$  ist auch deren Summe  $\alpha + \beta$  ganz. Ohne Einschränkung seien zum Beweis  $\alpha, \beta \neq 0$ . Dann ist entweder  $n(\alpha\beta^{-1}) = \frac{n(\alpha)}{n(\beta)}$  oder  $n(\beta\alpha^{-1}) = \frac{n(\beta)}{n(\alpha)}$  ganz. Ohne Einschränkung sei das erstere der Fall. Nach Satz 7 ist dann  $\alpha\beta^{-1}$  ganz, also das zugehörige irreduzible Polynom  $g(x)$  aus  $K$  mit höchstem Koeffizienten 1 ganzzahlig. Dann ist auch  $g(x-1)$ , das zu  $\alpha\beta^{-1}+1$  gehörige irreduzible Polynom aus  $K$  mit höchstem Koeffizienten 1, ganzzahlig, also  $\alpha\beta^{-1}+1$  ganz. Nach 1a. ist daher schließlich auch  $(\alpha\beta^{-1}+1)\beta = \alpha + \beta$  ganz.

1c. Jede ganze Zahl  $\alpha$  aus  $K$  ist auch als Element von  $S$  ganz<sup>11)</sup>. Das folgt ohne weiteres aus der Definition der Ganzheit in  $S$ .

2. Für jedes  $\alpha$  aus  $S$  gibt es ein ganzes  $g$  aus  $K$  derart, daß  $g\alpha$  ganz ist. Ist nämlich nicht schon  $\alpha$  selbst ganz, also  $n(\alpha)$  genau durch  $p^{-k}$  mit  $k > 0$  teilbar, so ist doch  $p^{\left\{\frac{k}{n}\right\}}\alpha$  ganz, wegen  $n(p) = p^n$ .

3. Die bei der Darstellung der ganzen Elemente durch eine  $K$ -Basis von  $S$  in den Koordinaten auftretenden Nenner sind beschränkt. Zum Beweis seien — nach 2. ohne Einschränkung — die  $\omega_i$  eine aus ganzen Elementen bestehende  $K$ -Basis von  $S$ . Dann bestimmen sich die Koor-

<sup>11)</sup> Dieses Postulat muß hier zu denen in A. § 1 hinzugenommen werden; es folgt hier nicht, wie in A. § 1, für Maximalordnungen aus den übrigen Postulaten, weil hier der Koeffizientenkörper nicht der rationale Zahlkörper ist.

dinaten  $x_i$  eines Elementes  $\alpha = \sum_{i=1}^m x_i \omega_i$  durch Spurbildung aus dem linearen Gleichungssystem

$$s(\alpha \omega_k) = \sum_{i=1}^m s(\omega_i \omega_k) x_i \quad (k = 1, \dots, m),$$

dessen Determinante  $|s(\omega_i \omega_k)|$  nicht verschwindet, weil  $S$  halbeinfach ist. Ist  $\alpha$  ganz, so sind nach Teil 1a. dieses Beweises und Satz 6 die  $s(\alpha \omega_k)$  ganz. Daher sind die Nenner der Koordinaten  $x_i$  durch die (aus denselben Gründen ganze) Determinante  $|s(\omega_i \omega_k)|$  beschränkt. —

$\mathfrak{o}$  bedeute die Maximalordnung der ganzen Elemente aus  $K$ .

Satz 9.  $\mathfrak{o}$  und auch jede weitere Ordnung in  $S$  besitzt eine  $\mathfrak{o}$ -Basis, und zwar ist die Anzahl der Basiselemente gleich dem Rang  $m$  von  $S$ .

Beweis. Das folgt in geläufiger Weise aus den Ordnungspostulaten 1 bis 3 und der Tatsache, daß die Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $K$  ein Hauptidealring ist.

Satz 10.  $\mathfrak{o}$  ist Maximalordnung. Weitere Maximalordnungen gibt es in  $S$  nicht.

Beweis. Jede weitere Ordnung  $\mathfrak{o}^*$  ist in  $\mathfrak{o}$  enthalten. Denn durch Bildung der charakteristischen Gleichungen mittels einer  $\mathfrak{o}$ -Basis von  $\mathfrak{o}^*$  folgt in geläufiger Weise unter Beachtung von Satz 6, daß alle Elemente aus  $\mathfrak{o}^*$  ganz sind. —

Elemente aus  $S$ , deren Norm eine Einheit, d. h. ganz und nicht durch  $p$  teilbar ist, nenne ich *Einheiten*. Ferner sei  $\pi$  ein ganzes Element aus  $S$ , dessen Norm durch eine möglichst niedrige, aber positive Potenz von  $p$  genau teilbar ist.

Satz 11. Jedes Element  $\alpha \neq 0$  aus  $S$  besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$\alpha = \varepsilon \pi^a$$

in eine Einheit  $\varepsilon$  und eine Potenz von  $\pi$  mit ganz-rationalem Exponenten  $a$ .

Beweis. Ist  $n(\alpha)$  genau durch  $p^{\bar{a}}$ ,  $n(\pi)$  genau durch  $p^f$  teilbar, so muß  $\bar{a} = af$  ein Multiplum von  $f$  sein, weil sonst  $n(\alpha \pi^{-\bar{a}}) = \frac{n(\alpha)}{n(\pi)^{\bar{a}}}$  bei geeignetem  $b$  durch eine positive niedrigere Potenz als  $p^f$  genau teilbar wäre, im Widerspruch zur Wahl von  $\pi$ . Also ist  $n(\alpha \pi^{-\bar{a}})$  eine Einheit aus  $K$ , d. h.  $\alpha \pi^{-\bar{a}} = \varepsilon$  eine Einheit aus  $S$ . —

Der Exponent  $a$ , den ich auch die *Ordnungszahl* von  $\alpha$  nenne, ist durch die in bezug auf  $p$  verstandene Ordnungszahl  $\bar{a} = af$  von  $n(\alpha)$  eindeutig bestimmt, und damit auch die Zerlegung  $\alpha = \varepsilon \pi^a$ .

Die Ordnungszahl  $a$  von  $\alpha$  hat nichts mit der in Satz 11 zugrunde gelegten Reihenfolge der Faktoren zu tun; denn aus  $\alpha = \varepsilon \pi^a$  folgt  $\alpha = \pi^a \cdot \pi^{-a} \varepsilon \pi^a = \pi^a \varepsilon'$ , wo  $\varepsilon' = \pi^{-a} \varepsilon \pi^a$  wegen  $n(\varepsilon') = n(\varepsilon)$  mit  $\varepsilon$  Einheit ist.

Satz 12. Ein Element  $\alpha$  aus  $S$  ist dann und nur dann ganz, wenn seine Ordnungszahl  $a \geq 0$  ist, und dann und nur dann Einheit, wenn  $a = 0$  ist.

Beweis. In den Bezeichnungen des vorigen Beweises ist » $\alpha$  ganz« bzw. » $\alpha$  Einheit« nach Satz 7 gleichbedeutend mit » $\bar{a} \geq 0$ « bzw. » $\bar{a} = 0$ «, d. h. mit » $a \geq 0$ « bzw. » $a = 0$ «. —

Das Element  $\pi$  hat die Ordnungszahl 1 und kann durch jedes andere solche Element ersetzt werden.

Satz 13. Haben die Elemente  $\alpha, \beta$  aus  $S$  die Ordnungszahlen  $a, b$ , so hat  $\alpha\beta$  die Ordnungszahl  $a + b$  und  $\alpha + \beta$  mindestens die Ordnungszahl  $\min(a, b)$ .

Beweis. Es sei

$$\alpha = \varepsilon \pi^a, \quad \beta = \eta \pi^b$$

im Sinne von Satz 11. Dann hat  $\alpha\beta$  im Sinne von Satz 11 die Zerlegung:

$$\alpha\beta = \zeta \pi^{a+b}, \quad \text{wo } \zeta = \varepsilon \cdot \pi^a \eta \pi^{-a};$$

denn  $n(\zeta) = n(\varepsilon) n(\eta)$  ist eine Einheit, also  $\zeta$  eine Einheit. Daher hat  $\alpha\beta$  die Ordnungszahl  $a + b$ .

Ist ferner etwa  $a \leq b$ , so hat man:

$$\alpha + \beta = (\varepsilon + \eta \pi^{b-a}) \pi^a,$$

wo der erste Faktor jedenfalls ganz ist. Daher ist die Ordnungszahl von  $\alpha + \beta$  mindestens  $a$ .

Satz 14. Die Elemente  $\alpha$  aus  $S$  mit einer Ordnungszahl  $a > 0$  (also  $a \geq 1$ ) bilden ein zweiseitiges  $\mathfrak{o}$ -Ideal  $\varphi$ .

Beweis. Es sind die Idealpostulate (A. § 2) zu bestätigen:

1. Gehören  $\alpha$  und  $\beta$  zu  $\varphi$ , so gehört auch  $\alpha + \beta$  zu  $\varphi$ . Das ist klar nach Satz 13.

2. Gehört  $\alpha$  zu  $\varphi$  und ist  $\gamma$  ganz, so gehören auch  $\alpha\gamma$  und  $\gamma\alpha$  zu  $\varphi$ . Das ist klar nach den Sätzen 12 und 13.

3. Es gibt eine feste ganze Zahl  $g > 0$  aus  $K$  derart, daß  $g\alpha$  ganz ist für alle  $\alpha$  aus  $\varphi$ . Das leistet etwa  $g = 1$ .

4. Es gibt in  $\varphi$  ein ganzes Element  $h$  aus  $K$ . Das leistet etwa ein Primelement  $h = p$  zu  $p$ , weil ja  $n(p) = p^n$  ganz und keine Einheit ist, also  $p$  auch als Element von  $S$  ganz und keine Einheit ist, d. h. eine Ordnungszahl  $e > 0$  hat.

Satz 15.  $\varphi$  ist Primideal.

Beweis. Das Produkt zweier ganzen Elemente hat nach den Sätzen 12 und 13 nur dann eine positive Ordnungszahl, d. h. gehört zu  $\varphi$ , wenn dies für mindestens einen der Faktoren gilt.

Satz 16.  $\varphi$  ist Hauptideal, nämlich  $\varphi = (\pi)$ .

Beweis.  $\varphi$  besteht aus den Elementen  $\alpha$  von  $S$ , deren Ordnungszahl  $\alpha \geq 1$  ist. Nach den Sätzen 11 bis 13 besagt das  $\varphi = (\pi)$ . —

Das Element  $\pi$  kann also auch als ein beliebiges Primelement zu dem Primideal  $\varphi$  von  $S$  charakterisiert werden.

Satz 17. Jedes  $\sigma$ -Ideal aus  $S$  ist eine Potenz des Primideals  $\varphi$ , insbesondere also zweiseitig und Hauptideal, und  $\varphi$  ist also das einzige Primideal von  $S$ .

Beweis. Ist  $\sigma$  ein  $\sigma$ -Ideal aus  $S$ , so sind wegen des dritten Idealpostulates die Ordnungszahlen der Elemente aus  $\sigma$  nach unten beschränkt. Es gibt also in  $\sigma$  ein Element niedrigster Ordnungszahl  $a$ . Nach den Sätzen 11 bis 13 und den übrigen Idealpostulaten besteht dann  $\sigma$  aus der Gesamtheit aller Elemente von  $S$ , deren Ordnungszahl  $\geq a$  ist; d. h. aber  $\sigma = \varphi^a$ . —

Zusammenfassend hat man also:

Satz 18. Die  $\sigma$ -Ideale aus  $S$  bilden eine multiplikative Gruppe mit  $\sigma = (1)$  als Einheitsselement. Diese Gruppe ist ein unendlicher Zyklus mit  $\varphi = (\pi)$  als erzeugendem Element.

Ferner gilt:

Satz 19. Der Restklassenring von  $\sigma \bmod \varphi$  ist ein Körper.

Beweis. Nach Definition von  $\varphi$  werden die von Null verschiedenen Restklassen  $\bmod \varphi$  durch die Einheiten repräsentiert und bilden mithin nach den Sätzen 12 und 13 eine multiplikative Gruppe. Da der Restklassenring  $\bmod \varphi$  zudem der Primidealeigenschaft wegen keine Nullteiler hat, ist er ein Schiefkörper. Wie sich aus Satz 9 und dem vierten Idealpostulat in geläufiger Weise ergibt, ist er ferner endlich. Als endlicher Schiefkörper ist er aber nach einem bekannten Wedderburnschen Satz<sup>12)</sup> ein gewöhnlicher (kommutativer) Körper.

Satz 20. Durchlaufen  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$  unabhängig voneinander je ein volles Restsystem  $\bmod \varphi$ , und bedeutet  $\pi_i$  für jedes  $i$  ein festes genau durch  $\varphi^i$  teilbares Element aus  $S$  (speziell etwa  $\pi_i = \pi^i$ ), so durchläuft

$\gamma_0 \pi_0 + \gamma_1 \pi_1 + \dots + \gamma_{k-1} \pi_{k-1}$  (speziell also  $\gamma_0 + \gamma_1 \pi + \dots + \gamma_{k-1} \pi^{k-1}$ ) ein volles Restsystem  $\bmod \varphi^k$ .

Beweis. Das folgt in geläufiger Weise aus Satz 16. —

Es sei  $p = \varepsilon \pi^e$  die eindeutige Zerlegung eines Primelements  $p$  zu  $p$  im Sinne von Satz 11, oder also kurz  $p = \varphi^e$ , indem hier, wie im folgenden

<sup>12)</sup> J. H. MacLagan Wedderburn, A theorem on finite algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905). — Siehe auch D. § 127 und E. Artin, Über einen Satz von Herrn J. H. MacLagan Wedderburn, Abh. Mathem. Sem. Hamburg 5 (1927).

in entsprechenden Fällen stets,  $p$  gleichzeitig als Zeichen für das durch  $p$  in  $S$  bestimmte  $\mathfrak{o}$ -Ideal  $\mathfrak{p}$  genommen wird. Den Exponenten  $e$  nenne ich die *Verzweigungsordnung* von  $S$ .

Ferner sei  $q$  die Restklassenzahl mod  $p$  in  $K$ . Da der Restklassenkörper mod  $\varphi$  in  $S$  eine endliche Erweiterung des Restklassenkörpers mod  $p$  in  $K$  darstellt, so ist die Restklassenzahl mod  $\varphi$  in  $S$  eine Potenz  $q^f$ . Den Exponenten  $f$  nenne ich, als Grad des Restklassenkörpers mod  $\varphi$  in  $S$  über dem Restklassenkörper mod  $p$  in  $K$ , den *Restklassengrad* von  $S$ .

**Satz 21.** *Der Rang  $m$  von  $S$  ist das Produkt aus der Verzweigungsordnung  $e$  von  $S$  und dem Restklassengrad  $f$  von  $S$ .*

**Beweis.** Ist  $\omega_1, \dots, \omega_m$  eine  $\mathfrak{o}$ -Basis von  $\mathfrak{o}$ , so durchläuft  $c_1\omega_1 + \dots + c_m\omega_m$  ein volles Restsystem mod  $p$  in  $S$ , wenn  $c_1, \dots, c_m$  unabhängig voneinander je ein volles Restsystem mod  $p$  in  $K$  durchlaufen. Die Restklassenanzahl mod  $p$  in  $S$  ist also gleich  $q^m$ .

Andrerseits ist nach Satz 20 diese Restklassenanzahl gleich  $(q^f)^e$ .

**Satz 22.** *Die Festsetzungen*

$|0| = 0; \quad |\alpha| = w^a \text{ für } \alpha \neq 0, \text{ wenn } a \text{ die Ordnungszahl von } \alpha,$   
*wo  $w$  eine feste reelle Zahl mit  $0 < w < 1$  ist, liefern eine nichtarchimedische Bewertung von  $S$ .*

**Beweis.** Aus Satz 13 ergeben sich ohne weiteres die Bewertungspostulate:

$$|\alpha\beta| = |\alpha| |\beta|, \quad |\alpha + \beta| \leq \text{Max}(|\alpha|, |\beta|). \quad -$$

Diese Bewertung von  $S$  ist *diskret*, denn das System der Werte besteht aus den Potenzen mit ganz-rationalen Exponenten von  $w$ . Der Teilkörper  $K$  ist bei ihr wegen  $p = \varphi^e$  in der bekannten Weise  $p$ -adisch bewertet. Ich nenne sie die  $\varphi$ -adische Bewertung von  $S$  und daher  $S$  einen  $\varphi$ -adischen Schiefkörper.

**Satz 23.** *Jedes Element  $\alpha \neq 0$  aus  $S$  besitzt eine eindeutige  $\varphi$ -adisch konvergente Entwicklung:*

$$\alpha = \gamma_0 \pi_a + \gamma_1 \pi_{a+1} + \dots \quad (\gamma_0 \not\equiv 0 \pmod{\varphi}),$$

deren Koeffizienten  $\gamma_0, \gamma_1, \dots$  einem festen vollen Restsystem mod  $\varphi$  entstammen, während  $\pi_i$  für jedes  $i$  ein festes genau durch  $\varphi^i$  teilbares Element aus  $S$  bedeutet; speziell also mit  $\pi_i = \pi^i$ :

$$\alpha = \gamma_0 \pi^a + \gamma_1 \pi^{a+1} + \dots \quad (\gamma_0 \not\equiv 0 \pmod{\varphi}).$$

**Beweis.** Durch Übergang zu  $\alpha' = \alpha \pi_a^{-1}$ , wo  $a$  die Ordnungszahl von  $\alpha$  ist, und zu den  $\pi_i \pi_a^{-1} = \pi'_{i-a}$  reduziert sich der Beweis zunächst auf den Fall, daß  $\alpha$  eine Einheit ist ( $a = 0$ ). Nach Satz 20 bestimmt dann  $\alpha$  eindeutig eine Folge  $\gamma_0, \gamma_1, \dots$  ( $\gamma_0 \not\equiv 0 \pmod{\varphi}$ ) derart, daß

$$\alpha = \gamma_0 \pi_0 + \gamma_1 \pi_1 + \dots + \gamma_{k-1} \pi_{k-1} \pmod{\varphi^k} \text{ für jedes } k \geq 0.$$

Das bedeutet aber, daß die Partialsummenfolge  $\gamma_0 \pi_0 + \gamma_1 \pi_1 + \dots + \gamma_{k-1} \pi_{k-1}$  gegen  $\alpha$   $\varphi$ -adisch konvergiert.

Satz 24. *S ist bezüglich der  $\varphi$ -adischen Bewertung perfekt.*

Beweis. Stellt man die Glieder einer  $\varphi$ -adisch konvergenten Folge aus  $S$  durch eine  $\sigma$ -Basis von  $\sigma$  dar, so bilden wegen  $p = \varphi^\sigma$  die einzelnen Koordinaten  $p$ -adisch konvergente Folgen aus  $K$ . Da  $K$  bezüglich der  $p$ -adischen Bewertung perfekt ist, haben also die einzelnen Koordinaten Grenzwerte in  $K$ . Das mit diesen Grenzwerten als Koordinaten gebildete Element aus  $S$  ist dann Grenzwert der gegebenen Folge aus  $S$ .

### § 3.

#### Der (die) Trägheitskörper $W$ von $S$ .

##### I.

Ich betrachte zunächst — in Verfolg der Ausführungen in Fußnote <sup>9)</sup> — den Spezialfall, daß  $S$  kommutativ ist. Rang  $m$  und Grad  $n$  von  $S$  stimmen dann bekanntlich überein:  $m = n$ .

Satz 25. *S enthält den Körper  $W = K(\omega)$ , wo  $\omega$  eine primitive  $(q^f - 1)$ -te Einheitswurzel ist. Diese ist zugleich primitive Wurzel mod  $\varphi$ .  $W$  hat über  $K$  den Restklassengrad  $f$  und die Verzweigungsordnung 1.  $S$  hat über  $W$  den Restklassengrad 1 und die Verzweigungsordnung  $e$ . Es ist*

$$S = W(\pi) = K(\omega, \pi).$$

Beweis. Es sei  $\omega_0$  eine beliebige primitive Wurzel mod  $\varphi$  aus  $S$ , also ein erzeugendes Element des Restklassenkörpers mod  $\varphi$  von  $S$ .

$\omega_0$  ist Wurzel der Kongruenz  $x^{q^f-1} - 1 \equiv 0 \pmod{\varphi}$ . Daher besteht eine Zerlegung:

$$x^{q^f-1} - 1 \equiv (x - \omega_0) \varphi_0(x) \pmod{\varphi},$$

wo  $\varphi_0(x)$  ein Polynom in  $S$  bedeutet. Durch Anwendung des Hilfssatzes aus § 2 (mit  $S$  als Grundkörper!<sup>13)</sup>) folgt daraus das Bestehen einer Zerlegung:

$$x^{q^f-1} - 1 = (x - \omega) \varphi(x) \quad \text{mit} \quad \omega \equiv \omega_0 \pmod{\varphi},$$

wo auch  $\varphi(x)$  ein Polynom in  $S$  bedeutet.  $S$  enthält also eine primitive  $(q^f - 1)$ -te Einheitswurzel  $\omega$ , die zugleich primitive Wurzel mod  $\varphi$  ist, und enthält also auch deren Körper  $W = K(\omega)$ .

Ferner ist  $\omega_0$  Wurzel einer irreduziblen Kongruenz  $g_0(x) \equiv 0 \pmod{\varphi}$  vom Grade  $f$  mit Koeffizienten aus  $K$ . Es besteht also eine Zerlegung:

$$x^{q^f-1} - 1 \equiv g_0(x) h_0(x) \pmod{\varphi},$$

<sup>13)</sup> Hier wird die Voraussetzung, daß  $S$  kommutativ sei, wesentlich benutzt. Denn wie man leicht einsieht, verliert der Hilfssatz aus § 2 in nichtkommutativen  $\varphi$ -adischen Schiefkörpern seine allgemeine Gültigkeit.

wo auch  $h_0(x)$  ein Polynom in  $K$  bedeutet. Durch nochmalige Anwendung des Hilfssatzes aus § 2 (jetzt mit  $K$  als Grundkörper!) folgt daraus das Bestehen einer Zerlegung

$$x^{\varphi-1} - 1 = g(x) h(x)$$

in ein Polynom  $g(x) = g_0(x) \bmod p$  vom Grade  $f$  und ein Polynom  $h(x)$  aus  $K$ . Es ist dann jedenfalls  $g(\omega) \equiv 0 \bmod \varphi$ . Weil aber die Wurzeln  $1, \omega, \dots, \omega^{\varphi-2}$  von  $x^{\varphi-1} - 1$  untereinander inkongruent  $\bmod \varphi$  sind —  $\omega$  ist ja primitive Wurzel  $\bmod \varphi$  —, so muß sogar  $g(\omega) = 0$  gelten. Daher hat  $\omega$  und also auch  $W = K(\omega)$  den Grad  $f$  über  $K$ . Da der Restklassengrad von  $W$  über  $K$  nach Konstruktion mindestens gleich  $f$  ist, so folgt jetzt nach Satz 21, daß er genau  $f$  und die Verzweigungsordnung von  $W$  über  $K$  gleich 1 ist.

Für den Restklassengrad von  $S$  über  $W$  bleibt dann nur der Wert 1 übrig, während die Verzweigungsordnung von  $S$  über  $W$  den vollen Wert  $e$  haben muß.

Nimmt man  $0, 1, \omega, \dots, \omega^{\varphi-2}$  als volles Restsystem  $\bmod \varphi$  und  $1, \pi, \dots, \pi^{e-1}; p, p\pi, \dots, p\pi^{e-1}; \dots$ , wo  $p$  ein Primelement zu  $p$  in  $K$  bedeutet, als Folge  $\pi_i$  im Sinne von Satz 23, so folgt aus der dort festgestellten Entwickelbarkeit der Elemente von  $S$ , daß  $\pi$  primitives Element von  $S$  in bezug auf  $W$  ist, d. h.  $S = W(\pi) = K(\omega, \pi)$ . —

Der durch  $S$  eindeutig bestimmte Teilkörper  $W$  kann in Anlehnung an die Hilbertsche Theorie des Galoisschen Körpers der *Trägheitskörper* von  $S$  genannt werden.

**Satz 26.**  *$W$  ist zyklisch in bezug auf  $K$ , und  $\omega \rightarrow \omega^q$  liefert einen primitiven Automorphismus von  $W$ .*

**Beweis.** Ist wieder  $g(x)$  das in  $K$  irreduzible Polynom, das  $\omega$  zur Wurzel hat, so ist jedenfalls  $g(\omega^q) \equiv 0 \bmod \varphi$  ( $q$  ist eine Potenz der zu  $\varphi$  gehörigen natürlichen Primzahl). Wie im Beweis zu Satz 25 folgt aber daraus  $g(\omega^q) = 0$ . Daher liefert  $\omega \rightarrow \omega^q$  einen Automorphismus von  $W$  in bezug auf  $K$ , ebenso auch  $\omega \rightarrow \omega^q, \dots, \omega \rightarrow \omega^{\varphi} = \omega$ . Damit ist ein Zyklus von  $f$  verschiedenen solchen Automorphismen aufgewiesen. Da  $W$  den Grad  $f$  über  $K$  hat, folgen die Behauptungen.

**Satz 27<sup>14)</sup>.** *Ein Element aus  $K$  ist dann und nur dann Norm eines Elementes aus  $W$ , wenn seine (in bezug auf  $p$  verstandene) Ordnungszahl durch  $f$  teilbar ist. Insbesondere sind alle Einheiten aus  $K$  Normen von Einheiten aus  $W$ .*

<sup>14)</sup> Siehe hierzu K. Hensel, Über ein neues Normensymbol und sei e Anwendung auf die Theorie der Normenreste in allgemeinen algebraischen Körpern, Journ. f. Mathem. 152 (1923), Satz C'.



Beweis. Weil  $W$  die Verzweigungsordnung 1 hat, behält ein Prim-  
element  $p$  zu  $p$  aus  $K$  seine Rolle in  $W$  bei. Jedes Element  $\alpha \neq 0$  aus  $W$   
besitzt also nach Satz 11 eine Darstellung  $\alpha = \varepsilon p^a$ , wo  $\varepsilon$  eine Einheit aus  
 $W$  ist. Weil  $f$  der Grad von  $W$  ist, ist dann  $n(\alpha) = n(\varepsilon) p^{af}$ , wobei  $n(\varepsilon)$   
eine Einheit aus  $K$  ist. Daher sind die Ordnungszahlen aller Normen durch  
 $f$  teilbar.

Umgekehrt sei  $g$  ein Element von durch  $f$  teilbarer Ordnungszahl  
aus  $K$ , also  $g = h p^{af}$ , wo  $h$  eine Einheit aus  $K$  ist. Wegen  $p^{af} = n(p^a)$   
genügt es dann zu zeigen, daß die beliebige Einheit  $h$  aus  $K$  als Norm  
darstellbar ist.

$h$  kann weiter in der Form  $h = w^b k$  zerlegt werden, wo  $w$  eine pri-  
mitive  $(q-1)$ -te Einheitswurzel und  $k$  eine *Einseinheit* aus  $K$  ist, d. h.  
 $k \equiv 1 \pmod p$ . Da offenbar  $n(w) = \omega^{1+q+\dots+q^{f-1}}$  (nach Satz 26)  $= \omega^{\frac{q^f-1}{q-1}}$   
eine primitive  $(q-1)$ -te Einheitswurzel aus  $K$  ist, also als  $w$  gewählt  
werden kann, so bleibt zu zeigen, daß die beliebige Einseinheit  $k$  aus  $K$   
als Norm aus  $W$  darstellbar ist.

Angenommen nun, man habe bereits eine Einseinheit

$$\varepsilon_{r-1} = (1 + \xi_1 p) \dots (1 + \xi_{r-1} p^{r-1}),$$

wo  $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$  Restklassenrepräsentanten mod  $p$  aus  $W$  sind, derart, daß

$$k \equiv n(\varepsilon_{r-1}) \pmod{p^r}$$

ist. Dann wird ein Restklassenrepräsentant  $\xi_r$  mod  $p$  aus  $W$  derart gesucht,  
daß für die Einseinheit

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r-1} (1 + \xi_r p^r)$$

sogar gilt:

$$k \equiv n(\varepsilon_r) \pmod{p^{r+1}}.$$

Wegen

$$n(1 + \xi_r p^r) \equiv 1 + s(\xi_r) p^r \pmod{p^{r+1}}$$

ist dazu notwendig und hinreichend, daß  $\xi_r$  der Bedingung

$$s(\xi_r) \equiv \frac{1}{p^r} \left( \frac{k}{n(\varepsilon_{r-1})} - 1 \right) \pmod p$$

genügt. Da nun die Kongruenz

$$s(\xi) \equiv \xi + \xi^q + \dots + \xi^{q^{f-1}} \equiv 0 \pmod p$$

vom Grade  $q^{f-1}$  nicht für alle  $q^f$  Elemente des Restklassenkörpers mod  $p$   
von  $W$  erfüllt sein kann, gibt es ein ganzes  $\gamma$  in  $W$  mit  $s(\gamma) \not\equiv 0 \pmod p$ ;  
dann ist  $s\left(\frac{c}{s(\gamma)} \gamma\right) \equiv c \pmod p$  für beliebiges ganzes  $c$  aus  $K$ . Da somit  
jede ganze Zahl aus  $K \pmod p$  als Spur aus  $W$  darstellbar ist, kann die  
obige Bedingung für  $\xi_r$  stets erfüllt werden.



Man erhält also eine unendliche Folge  $\varepsilon_v$ , die ersichtlich  $p$ -adisch konvergent ist, also nach Satz 24 einen Grenzwert  $\varepsilon$  in  $W$  hat. Für diesen ist nach Konstruktion:

$$n(\varepsilon) \equiv n(\varepsilon_v) \equiv k \pmod{p^{v+1}} \quad \text{für jedes } v,$$

so daß nach Satz 11  $n(\varepsilon) = k$  sein muß.

Satz 28.  $1, \omega, \dots, \omega^{f-1}$  ist eine  $o$ -Basis für die ganzen Elemente aus  $W$ .

Beweis. Das folgt in geläufiger Weise daraus, daß  $\omega$  der Gleichung  $x^{e^{f-1}} - 1 = 0$  mit zu  $p$  primärer Diskriminante genügt.

Satz 29.  $1, \pi, \dots, \pi^{e-1}$  ist eine Basis für die ganzen Elemente aus  $S$  in bezug auf die Maximalordnung der ganzen Elemente aus  $W$ .

Beweis. Das folgt ohne weiteres aus der schon zuvor herangezogenen  $\varphi$ -adischen Entwicklung mit  $0, 1, \omega, \dots, \omega^{e^{f-2}}$  als vollem Restsystem  $\pmod{\varphi}$  und  $1, \pi, \dots, \pi^{e-1}; p, p\pi, \dots, p\pi^{e-1}; \dots$  als Folge  $\pi_i$  im Sinne von Satz 23.

Satz 30.  $\omega^\mu \pi^\nu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, f-1; \nu = 0, 1, \dots, e-1$ ) ist eine  $o$ -Basis für die ganzen Elemente aus  $S$ .

Beweis. Das folgt ohne weiteres aus den Sätzen 28 und 29.

## II.

Ich betrachte nunmehr wieder den allgemeinen nicht-kommutativen Fall, und mache überdies von jetzt an durchweg die schon in der Einleitung eingeführte Annahme über das Zentrum, die sich nach Satz 4 auf  $S$  überträgt. Es sei also der Grundkörper  $K$  zugleich das Zentrum von  $S$ . Diese Annahme bedeutet das strikte Gegenteil zum kommutativen Fall; denn alles Kommutative wird jetzt in den Grundkörper einbezogen gedacht. Wie schon zu Beginn von § 2 festgestellt, stehen dann Rang  $m$  und Grad  $n$  von  $S$  in der Beziehung  $m = n^2$ .

Satz 31. Jede primitive Wurzel  $\omega_0 \pmod{\varphi}$  erzeugt einen Teilkörper  $W = K(\omega_0)$  von  $S$  vom Restklassengrad  $n$  und der Verzweigungsordnung 1.

Jedes Primelement  $\pi$  zu  $\varphi$  erzeugt einen Teilkörper  $P = K(\pi)$  von  $S$  vom Restklassengrad 1 und der Verzweigungsordnung  $n$ .

Restklassengrad  $f$  und Verzweigungsordnung  $e$  von  $S$  stimmen mit dem Grad  $n$  von  $S$  überein:

$$e = f = n.$$

Beweis.  $W$  hat den Restklassengrad  $f$ , also nach Satz 21 einen Rang  $\geq f$ , und da  $W$  Körper ist, ist dieser Rang zugleich der Grad.

$P$  hat die Verzweigungsordnung  $e$ , also nach Satz 21 einen Rang  $\geq e$ , und da  $P$  Körper ist, ist dieser Rang zugleich der Grad.

Während hiernach einerseits die Grade von  $W$  und  $P$  resp.  $\geq f$  und  $\geq e$  sind, sind sie andererseits beide  $\leq n$ , weil  $S$  den Grad  $n$  hat. So ergibt sich:

$$e \leq n, \quad f \leq n.$$

Nach Satz 21 ist aber  $ef = m = n^2$ . Daher muß überall das Gleichheitszeichen gelten. Das ergibt alle Behauptungen.

Satz 32.  *$S$  enthält einen Körper  $W = K(\omega)$ , wo  $\omega$  eine primitive  $(q^n - 1)$ -te Einheitswurzel ist. Diese ist zugleich primitive Wurzel mod  $\varphi$ . Es ist*

$$S = W(\pi) = K(\omega, \pi).$$

Beweis. Es sei  $\omega_0$  eine beliebige primitive Wurzel mod  $\varphi$  aus  $S$ . Nach Satz 31 hat dann  $W = K(\omega_0)$  den Restklassengrad  $n$  und die Verzweigungsordnung 1. Nach Satz 25 ist also  $W = K(\omega)$ , wo  $\omega$  eine primitive  $(q^n - 1)$ -te Einheitswurzel ist, und  $\omega$  ist zugleich primitive Wurzel nach dem Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $W$ . Da dessen Restklassenanzahl  $q^n$  bereits die volle Restklassenanzahl mod  $\varphi$  in  $S$  darstellt, ist  $\omega$  auch primitive Wurzel mod  $\varphi$ .

Wie im Beweis von Satz 25 folgt dann weiter  $S = W(\pi) = K(\omega, \pi)$ . —

Der Teilkörper  $W = K(\omega)$  von  $S$  ist jetzt nicht mehr eindeutig bestimmt. Denn die Gleichung  $x^{q^n-1} - 1 = 0$  hat in  $S$  außer  $\omega$  und seinen Potenzen noch alle transformierten  $\omega' = \alpha \omega \alpha^{-1}$  ( $\alpha \neq 0$  beliebig aus  $S$ ) und deren Potenzen zu Wurzeln. Nach einem grundlegenden Satze von Herrn Artin<sup>15)</sup> gibt es in  $S$  außer diesen keine weiteren Wurzeln jener Gleichung.  $W$  ist also bis auf transformierte eindeutig bestimmt. Ich nenne  $W$  und seine transformierten *Trägheitskörper* von  $S$ .

Nach dem Muster der Sätze 28 bis 30 beweist man hier noch:

Satz 33.  $\omega^\mu \pi^\nu$  ( $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1$ ) ist eine  $o$ -Basis für die Maximalordnung  $o$  der ganzen Elemente aus  $S$ .

#### § 4.

##### Normierung des Primelementes $\pi$ von $S$ .

Es sei eine primitive  $(q^n - 1)$ -te Einheitswurzel  $\omega$  in  $S$  und damit ein Trägheitskörper  $W = K(\omega)$  von  $S$  fest gewählt.

Satz 34. Zu  $\omega$  existiert ein Primelement  $\pi$  in  $S$  derart, daß

$$\pi \omega \pi^{-1} = \omega^q$$

mit einem gewissen Exponenten  $r$  gilt.

Beweis. Es sei  $\pi_0$  ein beliebiges Primelement zu  $\varphi$  in  $S$ . Die Transformation mit  $\pi_0$  bewirkt einen Automorphismus des Restklassenkörpers

<sup>15)</sup> Siehe Satz 1 der in Fußnote <sup>12)</sup> zitierten Artin'schen Arbeit.

mod  $\varphi$ , bei dem die Restklassen aus  $K$  invariant bleiben. Es gilt also jedenfalls:

$$\pi_0 \omega \pi_0^{-1} \equiv \omega^{q^r} \pmod{\varphi}$$

mit einem gewissen Exponenten  $r$ .

Angenommen, man habe bereits ein Primelement zu  $\varphi$ :

$$\pi_r = \pi_0 + \xi_1 \pi_0^2 + \dots + \xi_r \pi_0^r,$$

wo  $\xi_1, \dots, \xi_r$  Restklassenrepräsentanten mod  $\varphi$  sind, derart, daß

$$\pi_r \omega \pi_r^{-1} \equiv \omega^{q^r} \pmod{\varphi^r}, \quad \text{d. h.} \quad \pi_r \omega \equiv \omega^{q^r} \pi_r \pmod{\varphi^{r+1}}$$

ist. Es wird dann ein Restklassenrepräsentant  $\xi_{r+1}$  mod  $\varphi$  derart gesucht, daß diese Kongruenzen mit dem Primelement

$$\pi_{r+1} = \pi_r + \xi_{r+1} \pi_0^{r+1}$$

statt  $\pi$  auch nach um 1 höheren Potenzen von  $\varphi$  als Moduln gelten:

$$(\pi_r + \xi_{r+1} \pi_0^{r+1}) \omega \equiv \omega^{q^r} (\pi_r + \xi_{r+1} \pi_0^{r+1}) \pmod{\varphi^{r+2}}.$$

Weil nun durch Iteration der Ausgangskongruenz folgt:

$$\pi_0^{r+1} \omega \pi_0^{-(r+1)} \equiv \omega^{q^{(r+1)r}} \pmod{\varphi}, \quad \text{d. h.} \quad \pi_0^{r+1} \omega \equiv \omega^{q^{(r+1)r}} \pi_0^{r+1} \pmod{\varphi^{r+2}},$$

während nach Satz 19  $\xi_{r+1}$  und  $\omega$  mod  $\varphi$  vertauschbar sind, so ergibt sich zur Bestimmung von  $\xi_{r+1}$  die Forderung:

$$(\pi_r \omega - \omega^{q^r} \pi_r) \pi_0^{-(r+1)} + \xi_{r+1} (\omega^{q^{(r+1)r}} - \omega^{q^r}) \equiv 0 \pmod{\varphi}.$$

Wird nun  $n_0 = \frac{n}{(r, n)}$  gesetzt, so ist diese Forderung erfüllbar, wenn  $\omega^{q^{(r+1)r}} \not\equiv \omega^{q^r} \pmod{\varphi}$ , d. h.  $q^{(r+1)r} \not\equiv q^r \pmod{(q^n - 1)}$ , d. h.  $q^{r^2} \not\equiv 1 \pmod{(q^n - 1)}$ , d. h.  $r^2 \not\equiv 0 \pmod{n}$ , d. h.  $r \not\equiv 0 \pmod{n_0}$  ist.

Ist aber  $r \equiv 0 \pmod{n_0}$ , d. h.  $\omega^{q^{(r+1)r}} \equiv \omega^{q^r} \pmod{\varphi}$ , so zeige ich, daß die Forderung identisch erfüllt ist, indem dann auch der erste Summand links mod  $\varphi$  verschwindet:

$$\alpha_r = (\pi_r \omega - \omega^{q^r} \pi_r) \pi_0^{-(r+1)} \equiv 0 \pmod{\varphi}.$$

Das ergibt sich, indem man die  $\alpha_r$  definierende Relation

$$\pi_r \omega \pi_r^{-1} = \omega^{q^r} + \alpha_r \pi_0^{r+1} \pi_r^{-1},$$

die man wegen  $\pi_r \equiv \pi_0 \pmod{\varphi^2}$ , also  $\pi_0 \pi_r^{-1} \equiv 1 \pmod{\varphi}$  auch in der Form

$$\pi_r \omega \pi_r^{-1} \equiv \omega^{q^r} + \alpha_r \pi_0^r \pmod{\varphi^{r+1}}$$

schreiben kann, mit  $q^n$  potenziert. Wegen  $r \equiv 0 \pmod{n_0}$  sind dabei  $\pi_0^r$  und  $\omega$  mod  $\varphi$  vertauschbar, wie sich ohne weiteres durch Iteration der Ausgangskongruenz  $\pi_0 \omega \pi_0^{-1} \equiv \omega^{q^r} \pmod{\varphi}$  ergibt. Ferner sind wieder  $\alpha_r$  und  $\omega$  mod  $\varphi$  vertauschbar. Die Potenzierung mit  $q^n$  kann also mod  $\varphi^{r+1}$  nach dem

binomischen Satz ausgeführt werden und ergibt:

$$\begin{aligned}\pi_r \omega \pi_r^{-1} &\equiv \omega^{q^r} + q^n (\omega^{q^r})^{q^{r-1}} \alpha_r \pi_r \pmod{\varphi^{r+1}} \\ &\equiv \omega^{q^r} \pmod{\varphi^{r+1}} \quad \text{wegen } q \equiv 0 \pmod{\varphi}.\end{aligned}$$

Das bedeutet aber in der Tat  $\alpha_r \equiv 0 \pmod{\varphi}$ , wie behauptet.

Man erhält also eine unendliche Folge von Primelementen  $\pi_r$ , die ersichtlich  $\varphi$ -adisch konvergiert, also nach Satz 24 einen Grenzwert  $\pi$  in  $S$  besitzt. Dieser Grenzwert leistet der Behauptung des Satzes Genüge; denn für ihn gilt nach Konstruktion:

$$\pi \omega \pi^{-1} - \omega^{q^r} \equiv \pi_r \omega \pi_r^{-1} - \omega^{q^r} \equiv 0 \pmod{\varphi^r} \quad \text{für jedes } r,$$

so daß nach Satz 11  $\pi \omega \pi^{-1} - \omega^{q^r} = 0$  sein muß.

**Satz 35.** *Es ist  $(r, n) = 1$ . Die Transformation mit dem normierten Primelement  $\pi$  von  $S$  bewirkt also einen primitiven Automorphismus des Trägheitskörpers  $W = K(\omega)$ .*

**Beweis.** Es werde wieder  $n_0 = \frac{n}{(r, n)}$  gesetzt. Dann folgt aus Satz 34, daß  $\pi^{n_0} \omega \pi^{-n_0} = \omega^{q^{n_0 r}} = \omega$ , also  $\pi^{n_0}$  mit  $\omega$  vertauschbar ist. Folglich ist  $K(\omega, \pi^{n_0}) = W(\pi^{n_0})$  ein Teilkörper von  $S$ . Als solcher ist er höchstens vom Grade  $n$ . Nun hat aber bereits  $W$  den Grad  $n$ . Daher gehört  $\pi^{n_0}$  zu  $W$ . Weil ferner nach Satz 31 die Verzweigungsordnung von  $W$  gleich 1 ist, muß  $n_0 \equiv 0 \pmod{n}$  sein. Das ergibt  $(r, n) = 1$ .

Anderer Beweis der Sätze 34 und 35.

Unter Berufung auf den bereits in Fußnote <sup>15)</sup> zitierten Artinschen Satz kann der Beweis der beiden vorangehenden Sätze auch so geführt werden:

Nach jenem Satz und unter Beachtung von Satz 26 existiert ein  $\alpha \neq 0$  in  $S$  derart, daß  $\alpha \omega \alpha^{-1} = \omega^q$  ist. Es sei  $\alpha$  genau durch  $\varphi^a$  teilbar. Ich zeige dann zunächst, daß  $(a, n) = 1$  ist.

Sei dazu  $n_1 = \frac{n}{(a, n)}$ , so daß  $\alpha^{n_1}$  als früheste Potenz von  $\alpha$  die Form  $\varepsilon p^b$  hat, wo  $p$  ein Primelement zu  $p$  aus  $K$  und  $\varepsilon$  eine Einheit aus  $S$  ist. Dann ergibt sich  $\alpha^{n_1} \omega \alpha^{-n_1} = \omega^{q^{n_1}}$ . Führt man hierin  $\alpha^{n_1} = \varepsilon p^b$  ein und beachtet, daß natürlich  $p$  mit  $\omega$  vertauschbar ist, während  $\varepsilon$  mit  $\omega$  nach Satz 19 jedenfalls  $\pmod{\varphi}$  vertauschbar ist, so ergibt sich  $\omega \equiv \omega^{q^{n_1}} \pmod{\varphi}$ , also  $n_1 \equiv 0 \pmod{n}$ . Das bedeutet aber  $(a, n) = 1$ , wie behauptet.

Ist nun  $ar - nl = 1$ , so leisten ersichtlich das Primelement  $\pi = \frac{\alpha^r}{p^l}$  und der Exponent  $r$  den Behauptungen der Sätze 34 und 35 Genüge.

**Satz 36.** *Das normierte Primelement  $\pi$  von  $S$  genügt einer reinen Gleichung in  $K$ :*

$$\pi^n = p,$$

wo  $p$  ein Primelement aus  $K$  ist.

Beweis.  $\pi^n$  ist erstens mit  $\omega$  vertauschbar, weil  $\pi^n \omega \pi^{-n} = \omega^{q^n} = \omega$  ist, und zweitens trivialerweise mit  $\pi$  vertauschbar.  $\pi^n$  ist also mit jedem Element von  $S = K(\omega, \pi)$  vertauschbar und gehört daher zum Zentrum  $K$  von  $S$ .

Satz 37. Das Primelement  $\pi$  von  $S$  kann, unter Einhaltung der Bedingung  $\pi \omega \pi^{-1} = \omega^{q^r}$ , noch so gewählt werden, daß  $\pi^n = p$  ein beliebig vorgegebenes Primelement aus  $K$  wird.

Beweis. Es sei  $\pi^*$  ein beliebiges Primelement von  $S$ , also  $\pi^* = \varepsilon \pi$  mit einer Einheit  $\varepsilon$  aus  $S$ . Damit auch  $\pi^* \omega \pi^{*-1} = \omega^{q^r}$  ist, ist notwendig und hinreichend, daß  $\varepsilon \omega \varepsilon^{-1} = \omega$ , also  $\varepsilon$  mit  $\omega$  vertauschbar ist. Wie im Beweis zu Satz 35 bedeutet das, daß  $\varepsilon$  im Teilkörper  $W = K(\omega)$  liegt. Dann wird aber nach den Sätzen 34 und 35

$$\pi^{*n} = (\varepsilon \pi)^n = \varepsilon \pi \dots \varepsilon \pi = \varepsilon \varepsilon' \dots \varepsilon^{(n-1)} \pi^n = n(\varepsilon) p,$$

wo  $\varepsilon', \varepsilon'', \dots$  die aus  $\varepsilon$  durch die Automorphismen  $\omega \rightarrow \omega^{q^r}, \omega \rightarrow \omega^{q^{r^2}}, \dots$  entstehenden konjugierten Elemente aus  $W$  bedeuten. Da nach Satz 27  $n(\varepsilon)$  alle Einheiten aus  $K$  durchläuft, wenn  $\varepsilon$  alle Einheiten aus  $W$  durchläuft, ergibt sich die Behauptung.

## § 5.

### Die Typen $\wp$ -adischer Schiefkörper.

Im vorhergehenden wurde, noch einmal zusammengefaßt, gezeigt:

Satz 38. Ein  $\wp$ -adischer Schiefkörper  $S$  vom Grade  $n$  über dem  $\wp$ -adischen Zentrum  $K$  läßt sich in der Form  $S = K(\omega, \pi)$  durch zwei Elemente  $\omega, \pi$  mit den Relationen

$$g_n(\omega) = 0, \quad \pi^n = p, \quad \pi \omega \pi^{-1} = \omega^{q^r}$$

erzeugen.

Dabei bezeichnet  $q$  die Restklassenanzahl nach dem Primideal  $\wp$  von  $K$ , ferner ist  $g_n(x)$  ein beliebiger in  $K$  irreduzibler Teiler  $n$ -ten Grades von  $x^{q^n-1} - 1$ ,  $p$  ein beliebiges Primelement zu  $\wp$  und  $r$  ein zu  $n$  primier Exponent.

Hiernach ist  $S$  von derjenigen Art, die Herr Dickson (D. § 35) als „Typus D“ bezeichnet.

Nach Satz 37 ist das Primelement  $p$  nicht als invariantes Bestimmungsstück von  $S$  anzusehen. Als solches bleibt demnach außer dem Grade  $n$  einzig und allein noch der Exponent  $r$ . Dieser hat wirklich eine invariante Bedeutung für  $S$ . Der Restklassenkörper nach dem Primideal  $\wp$  von  $S$  erfährt bei Transformation mit einem beliebigen Primelement zu  $\wp$  den Automorphismus »Potenzierung mit  $q^r$ «. Natürlich kommt es auf  $r$  nur mod  $n$  an. Somit gilt:

**Satz 39.** Für jeden Grad  $n$  gibt es höchstens  $\varphi(n)$  Typen  $\varphi$ -adischer Schiefkörper vom Grade  $n$  über  $K$ , entsprechend den  $\varphi(n)$  primen Restklassen, denen der Exponent  $r \bmod n$  angehören kann.

Ich zeige jetzt weiter:

**Satz 40.** Jeder dieser  $\varphi(n)$  Typen existiert.

**Beweis.** Ich gebe eine Realisierung durch Matrizen an.

Sei dazu  $\omega$  eine zum Polynom  $g_n(x)$  gehörige primitive  $(q^n - 1)$ -te Einheitswurzel,  $W = K(\omega)$ , und werde die Anwendung der Automorphismen  $\omega \rightarrow \omega^{q^r}$ ,  $\omega \rightarrow \omega^{q^{2r}}$ , ... von  $W$  auf ein Element  $\alpha$  aus  $W$  durch  $\alpha', \alpha'', \dots$  gekennzeichnet.

$S$  sei das Matrixsystem, welches durch Adjunktion der folgenden beiden Matrizen zu  $K$  entsteht:

$$\omega = \begin{vmatrix} \omega & & & \\ & \omega' & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad \pi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ p & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

In  $S$  sind zunächst die formalen Relationen von Satz 38 erfüllt, wie man ohne weiteres bestätigt.

Ferner hat  $S$  den Rang  $n^2$ . Denn auf Grund jener Relationen läßt sich jedes  $\alpha$  aus  $S$  in der Form

$$\alpha = \sum_{\mu, \nu=0}^{n-1} a_{\mu\nu} \omega^\mu \pi^\nu$$

mit Koeffizienten  $a_{\mu\nu}$  aus  $K$  darstellen. Führt man dann die Elemente

$$\alpha_\nu = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu\nu} \omega^\mu \quad (\nu = 0, \dots, n-1)$$

aus  $W$  ein, so hat die Matrix  $\alpha$  die Gestalt

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ p \alpha_{n-1}' & \alpha_0' & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_1^{(n-2)} \\ p \alpha_1^{(n-1)} & \dots & p \alpha_{n-1}^{(n-1)} & \alpha_0^{(n-1)} \end{vmatrix}^{18)}$$

Aus  $\alpha = 0$  folgt daher, daß alle  $\alpha_\nu = 0$  sind, und daraus, weil  $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$  eine  $K$ -Basis von  $W$  ist, weiter, daß alle  $a_{\mu\nu} = 0$  sind. In der Tat hat also  $S$  den Rang  $n^2$ .

Weiter besitzt  $S$  keinen Nullteiler. Diesen wichtigsten Nachweis führe ich folgendermaßen: Angenommen,  $\alpha$  sei ein Nullteiler aus  $S$ . Dann ist

<sup>18)</sup> Mit einer solchen Matrizendarstellung arbeitet auch Dickson (D. § 41) bei der Konstruktion von Schiefkörpern vom „Typus D“.

die Determinante  $|\alpha| = 0$ . Da mit  $\alpha$  auch  $c\alpha$  für jedes  $c \neq 0$  aus  $K$  Nullteiler ist, kann ohne Einschränkung vorausgesetzt werden, daß die Koeffizienten  $\alpha_{\mu\nu}$  in obiger Darstellung ganz und ohne gemeinsamen Teiler sind. Aus der angegebenen Gestalt der Matrix  $\alpha$  liest man dann ohne weiteres ab:

$$|\alpha| \equiv n(\alpha_0) \pmod{p}.$$

Es wäre daher:

$$n(\alpha_0) \equiv 0 \pmod{p},$$

und also, weil  $p$  in  $W$  nicht verzweigt ist, auch

$$\alpha_0 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Setzt man demgemäß  $\alpha_0 = p\beta_0$  mit ganzem  $\beta_0$  aus  $W$  und vertauscht in der angegebenen Matrix  $\alpha$  die erste Spalte mit der letzten, so erhält man weiter ähnlich wie vorher:

$$|\alpha| = (-1)^{n-1} p n(\alpha_1) \pmod{p^2}.$$

Es folgte somit:

$$n(\alpha_1) \equiv 0 \pmod{p},$$

also

$$\alpha_1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

So fortfahrend zeigt man, daß alle  $\alpha_\nu \equiv 0 \pmod{p}$  sein müßten. Nach Satz 28 bedeutet das, daß alle  $\alpha_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod{p}$  sein müßten. Das steht im Widerspruch zu der vorausgesetzten Teilerfremdheit der  $\alpha_{\mu\nu}$ .

Auf andere Art ergibt sich die Nullteilerfreiheit von  $S$  unmittelbar durch Kombination von Satz 27 mit einem Dickson'schen Satz (D. § 42), der aussagt, daß ein System vom „Typus D“ nullteilerfrei ist, wenn die  $n$ -te Potenz von  $p$  als früheste als Norm eines Elementes aus  $W = K(\omega)$  darstellbar ist.

Nachdem gezeigt ist, daß  $S$  nullteilerfrei, also ein Schiefkörper ist, bleibt noch zu zeigen, daß  $K$  das Zentrum und  $n$  der Grad von  $S$  ist. Weil schon feststeht, daß  $n^2$  der Rang von  $S$  ist, genügt es, das erstere zu zeigen. Das ergibt sich nun nach analogen Schlüssen wie im Beweis zu Satz 2, wenn man einen Erweiterungskörper von  $K$  hat, über dem das durch  $S$  bestimmte Matrizen-system  $n$ -ten Grades das vollständige Matrizen-system ist. Ein solcher Erweiterungskörper ist aber der Körper  $W = K(\omega)$ . In der Tat ergibt sich aus der obigen Gestalt der Matrix  $\alpha$ , daß diese jede beliebige Matrix aus  $W$  darstellt, wenn man für die Koordinaten  $\alpha_{\mu\nu}$  jetzt beliebige Elemente  $\alpha_{\mu\nu}$  aus  $W$  zuläßt; denn die  $\alpha_{\mu\nu}$  ( $\mu = 0, \dots, n-1$ ) bestimmen sich dann für jedes feste  $\nu = 0, \dots, n-1$  aus einem linearen Gleichungssystem in  $W$ , dessen Determinante bis auf eine Potenz von  $p$  als Faktor die Cauchysche Determinante von  $\omega, \omega', \dots, \omega^{(n-1)}$  ist und daher nicht verschwindet. —



Auf Grund der Resultate von R. Brauer und E. Noether<sup>17)</sup> folgt aus den Resultaten dieses Paragraphen:

**Satz 41.** Für eine irreduzible Gruppe linearer Substitutionen, deren Charakter in  $K$  liegt, vom Schurschen Index  $n$  in bezug auf  $K$  ist der zyklische Körper  $W = K(\omega)$  der  $(q^n - 1)$ -ten Einheitswurzel über  $K$  ein minimaler Zerfällungskörper.

## § 6.

Die Differente von  $S$ .

Unter der *Differente*  $\partial$  von  $S$  ist das durch folgende Relation definierte  $\mathfrak{o}$ -Ideal aus  $S$  zu verstehen:

Ein Element  $\alpha$  aus  $S$  gehört dann und nur dann zu  $\partial^{-1}$ , wenn die Spur  $s(\alpha\gamma)$  ganz ist für jedes ganze Element  $\gamma$  aus  $S$ .

**Satz 42** Die Differente von  $S$  ist  $\partial = \varphi^{n-1}$ .

**Beweis.** Die Spur berechnet sich als Matrixspur aus der in § 5 angegebenen Matrizendarstellung. Es ist also

$$s(\alpha) = s(\alpha_0),$$

wenn

$$\alpha = \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_v \pi^v \quad \text{mit} \quad \alpha_v = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu v} \omega^\mu \quad (v = 0, \dots, n-1)$$

die Darstellung von  $\alpha$  durch die  $\mathfrak{o}$ -Basis  $\omega^\mu \pi^v$  von  $S$  ist.

Nach den Sätzen 33 und 17 ist nun  $\omega^\mu \pi^{v-(n-1)} = \frac{1}{p} \omega^\mu \pi^{v+1}$  eine  $\mathfrak{o}$ -Basis für das Ideal  $\varphi^{-(n-1)} = (\pi^{-(n-1)})$ . Für diese Basiselemente findet sich nach dem zuvor Bemerkten:

$$s\left(\frac{1}{p} \omega^\mu \pi^{v+1}\right) = 0 \quad \text{für} \quad v = 0, \dots, n-2,$$

$$s\left(\frac{1}{p} \omega^\mu \pi^n\right) = s(\omega^\mu) \quad \text{jedenfalls ganz.}$$

Daher gehören alle Elemente von  $\varphi^{-(n-1)}$  zu  $\partial^{-1}$ .

Dagegen gehören nicht alle Elemente von  $\varphi^{-n}$  zu  $\partial^{-1}$ . Denn für das Element  $\frac{1}{p}$  hat man:

$$s\left(\frac{\gamma}{p}\right) = \frac{1}{p} s(\gamma),$$

und dies ist nicht für jedes ganze  $\gamma$  aus  $S$  ganz; denn es gilt nicht durchweg  $s(\gamma) \equiv 0 \pmod{p}$ , wie schon im Beweis zu Satz 27 festgestellt wurde.

Zusammengenommen ergibt sich  $\varphi^{-(n-1)} = \partial^{-1}$  und damit die Behauptung.

<sup>17)</sup> R. Brauer und E. Noether, Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen, Berliner Akad.-Ber. 1927. — Siehe dazu auch die in Fußnote <sup>9)</sup> zitierte Arbeit von E. Noether, sowie R. Brauer, Über Systeme hyperkomplexer Zahlen, Math. Zeitschr. 30 (1929).



## § 7.

Übergang zur Arithmetik im Matrixensystem  $A$  aus  $S$ .

$A$  sei als das System aller  $k$ -reihigen Matrizen aus Elementen des  $p$ -adischen Schiefkörpers  $S$  darstellbar. Es gibt unendlich viele solche Darstellungen, die aber alle auseinander durch Transformation mit Elementen aus  $A$  (innere Automorphismen von  $A$ ) hervorgehen<sup>18)</sup>. Bei einer festen solchen Matrixendarstellung bezeichne ich mit  $\varepsilon_{ij}$  die speziellen Matrizen, die nur im Schnitt der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte ein von Null verschiedenes Element, nämlich 1 haben (Matrizeneinheiten).

**Satz 43.** *Die Elemente aus  $A$ , die bei einer festen Matrixendarstellung von  $A$  Matrizen aus Elementen der Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $S$  sind, bilden eine Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$ .*

**Beweis** (vgl. D. § 114). Diese Elemente bilden jedenfalls eine Ordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$ , die alle Matrizeneinheiten  $\varepsilon_{ij}$  enthält. Angenommen,  $\mathfrak{o}$  wäre in einer umfassenderen Ordnung  $\mathfrak{o}^*$  enthalten. Dann gäbe es in  $\mathfrak{o}^*$  eine Matrix  $\alpha = \|\alpha_{ij}\| = \sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij} \varepsilon_{ij}$ , in der mindestens ein Element  $\alpha_{ij}$  nicht zu  $\mathfrak{o}$  gehört. Mit  $\alpha$  ist nun auch  $\varepsilon_{ii} \alpha \varepsilon_{jj} = \alpha_{ij} \varepsilon_{ij}$  in  $\mathfrak{o}^*$  enthalten, also weiter auch  $\alpha_{ij} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} = \alpha_{ij} \varepsilon_{ii}$ , und allgemeiner  $\varepsilon_{il} \alpha_{ij} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jl} = \alpha_{ij} \varepsilon_{il}$  für  $l = 1, \dots, k$ , mithin schließlich auch die Diagonalmatrix  $\alpha_{ij} \sum_{l=1}^k \varepsilon_{il} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{ij} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{ij} \end{matrix} \right\|$ . Das geht aber nicht; denn wie bereits im Beweis zu Satz 10 festgestellt, haben die charakteristischen Gleichungen aller Elemente einer Ordnung ganze Koeffizienten, also auch die Hauptgleichungen, als Teiler der charakteristischen Gleichungen, während die Hauptgleichung des Elements  $\left\| \begin{matrix} \alpha_{ij} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{ij} \end{matrix} \right\|$  aus  $A$ , d. i. die  $k$ -te Potenz der zu  $\alpha_{ij}$  gehörigen irreduziblen Gleichung in  $K$ , gebrochene Koeffizienten hat.

**Satz 44.**  $\omega^\mu \pi^v \varepsilon_{ij} (\mu, v = 0, \dots, n-1; i, j = 1, \dots, k)$  ist eine  $\mathfrak{o}$ -Basis von  $\mathfrak{o}$ .

**Beweis.** Das folgt ohne weiteres aus Satz 33.

**Satz 45.** *In  $A$  gibt es an zweiseitigen  $\mathfrak{o}$ -Idealen nur ein einziges Primideal  $\mathfrak{p}$  und dessen Potenzen.  $\mathfrak{p}$  und somit alle zweiseitigen  $\mathfrak{o}$ -Ideale sind Hauptideale.*

*Die zweiseitigen  $\mathfrak{o}$ -Ideale bilden also eine multiplikative Gruppe mit  $\mathfrak{o}$  als Einheitselement. Diese Gruppe ist ein unendlicher Zyklus mit  $\mathfrak{p}$  als erzeugendem Element.*

*Es ist  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^n$ .*

<sup>18)</sup> Siehe Satz 11 der in Fußnote <sup>4)</sup> zitierten Artinschen Arbeit.

Beweis. Das folgt ohne weiteres aus den Sätzen 17, 18 und 31, wenn man die zweiseitigen  $\mathfrak{o}$ -Ideale  $\mathfrak{a}$  aus  $A$  und die  $\mathfrak{o}$ -Ideale  $\alpha$  aus  $S$  in bekannter Weise eindeutig zuordnet:

$\alpha$  = Gesamtheit aller Elemente  $\alpha_{ij}$ , die in den Matrizen  $\alpha = \|\alpha_{ij}\|$  aus  $\mathfrak{a}$  vorkommen,

$\mathfrak{a}$  = Gesamtheit aller Matrizen  $\alpha = \|\alpha_{ij}\|$ , deren Elemente  $\alpha_{ij}$  zu  $\alpha$  gehören.

Insbesondere wird so:

$\mathfrak{p}$  = Gesamtheit aller Matrizen  $\alpha = \|\alpha_{ij}\|$ , deren Elemente  $\alpha_{ij}$  durch  $\varphi = (\pi) = \pi \mathfrak{o}$  teilbar sind, d. h.  $\mathfrak{p} = (\pi) = \pi \mathfrak{o}$ .

Satz 46. Auch jedes  $\mathfrak{o}$ -Rechtsideal oder  $\mathfrak{o}$ -Linksideal aus  $A$  ist Hauptideal.

Beweis.  $\mathfrak{a}$  sei ein  $\mathfrak{o}$ -Rechtsideal. Dann bildet die Menge aller Spalten, aus denen sich die Matrizen aus  $\mathfrak{a}$  zusammensetzen, einen  $\mathfrak{o}$ -Modul im Bereich aller  $k$ -gliedrigen Spalten von Elementen aus  $S$ . Nun gelten in einem Schiefkörper  $S$  die Sätze der determinantenfreien linearen Algebra (unter Beachtung der Faktorenfolge). Es gibt also höchstens  $k$  rechtsseitig linear unabhängige  $k$ -gliedrige Spalten von Elementen aus  $S$ . Weil ferner  $\mathfrak{o}$  nach Satz 17 ein Hauptidealring ist, folgt in geläufiger Weise, daß jener  $\mathfrak{o}$ -Modul eine  $\mathfrak{o}$ -Basis aus höchstens  $k$  rechtsseitig linear unabhängigen Spalten besitzt. Diese Basisspalten seien, eventuell unter Hinzufügung von Nullspalten<sup>19)</sup>, zu einer  $k$ -reihig quadratischen Matrix  $\alpha$  zusammengestellt. Zuzufolge der Basiseigenschaft ist dann jede Matrix  $\alpha^*$  aus  $\mathfrak{a}$  in der Form  $\alpha^* = \alpha \gamma$  mit einer Matrix  $\gamma$  aus  $\mathfrak{o}$  darstellbar. Es ist dann also  $\mathfrak{a} = \alpha \mathfrak{o}$ . Zuzufolge des vierten Idealpostulates ist dabei  $\alpha$  kein Nullteiler, wie es der Definition eines Hauptideals (A. § 2) entspricht.

Satz 47. Jede Maximalordnung von  $A$  ist von dem in Satz 43 genannten Typus. Die Sätze 44—46 gelten also für eine beliebige Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$ .

Beweis. Sei  $\mathfrak{o}$  eine Maximalordnung des in Satz 43 genannten Typus,  $\mathfrak{o}^*$  eine beliebige Maximalordnung von  $A$ . Dann ist  $\mathfrak{o} \mathfrak{o}^*$  ein  $\mathfrak{o}$ -Linksideal, also nach Satz 46 von der Form  $\mathfrak{o} \mathfrak{o}^* = \mathfrak{o} \alpha$ . Ferner ist  $\mathfrak{o} \mathfrak{o}^*$  ein  $\mathfrak{o}^*$ -Rechtsideal und daher  $\mathfrak{o} \mathfrak{o}^* \leq \mathfrak{o} \alpha$ , insbesondere also, weil  $\mathfrak{o}$  die Haupteinheit 1 enthält,  $\mathfrak{o} \mathfrak{o}^* \leq \mathfrak{o} \alpha$ ,  $\mathfrak{o}^* \leq \alpha^{-1} \mathfrak{o} \alpha$ . Nun ist mit  $\mathfrak{o}$  auch  $\alpha^{-1} \mathfrak{o} \alpha$  eine Ordnung (Maximalordnung). Als Maximalordnung ist mithin  $\mathfrak{o}^* = \alpha^{-1} \mathfrak{o} \alpha$ . Somit

<sup>19)</sup> Diese kommen in Wahrheit nicht vor. Denn  $\mathfrak{a}$  enthält wegen des vierten Idealpostulates ein ganzes Element  $h$  aus  $K$ , also auch die  $k$  linear unabhängigen

Spalten von  $\begin{vmatrix} h & & \\ & \ddots & \\ & & h \end{vmatrix}$ .

entsteht  $\sigma^*$  aus  $\sigma$  bei dem durch die Transformation mit  $\alpha$  bewirkten inneren Automorphismus von  $A$  und ist also in der Tat ebenfalls von dem in Satz 43 genannten Typus. —

Die nachfolgenden Sätze haben die von Herrn Brandt<sup>20)</sup> skizzierte Theorie der einseitigen Ideale zum Vorbild.

**Satz 48.** *Jedes Rechtsideal in bezug auf eine Maximalordnung  $\sigma$ , von  $A$  ist Linksideal in bezug auf eine Maximalordnung  $\sigma_1$  von  $A$ , und umgekehrt.*

**Beweis.** Ist  $a$  ein  $\sigma$ -Rechtsideal und gemäß den Sätzen 46 und 47  $a = \alpha \sigma$ , so ist  $a$  ersichtlich ein  $\sigma_1$ -Linksideal, wo  $\sigma_1 = \alpha \sigma \alpha^{-1} = \alpha \sigma \alpha^{-1}$ .

**Satz 49.**  $\sigma_1$  und  $\sigma$  sind durch  $a$  eindeutig bestimmt, nämlich  $\sigma_1$  als Gesamtheit aller  $\lambda$  aus  $A$  mit  $\lambda a \leq a$ , und  $\sigma$  als Gesamtheit aller  $\rho$  aus  $A$  mit  $a \rho \leq a$ .

**Beweis.** Diese Gesamtheiten sind ersichtlich Ordnungen, und sie umfassen die in Satz 48 festgestellten Maximalordnungen  $\sigma_1$  und  $\sigma$ . —

Ich nenne  $\sigma_1$  und  $\sigma$  die *Linksordnung* und die *Rechtsordnung* von  $a$ .

Wegen der in Satz 49 ausgesprochenen Eigenschaft nenne ich ferner die echten Rechtsideale und Linksideale nach dem Vorgange von Herrn Brandt *ungleichseitige* Ideale, weil für sie die Rechtsordnung und Linksordnung verschieden sind, im Gegensatz zu den bisher zweiseitig genannten *gleichseitigen* Idealen, für die Rechtsordnung und Linksordnung übereinstimmen. Mit der Bezeichnung *Ideal* aus  $A$  schlechthin fasse ich im folgenden die gleichseitigen und ungleichseitigen Ideale in bezug auf irgendwelche Maximalordnungen von  $A$  zusammen.

Weiter nenne ich mit Herrn Brandt das Produkt  $ab$  zweier (gleichseitiger oder ungleichseitiger) Ideale *eigentlich*, wenn es nicht möglich ist,  $a$  oder  $b$  unter Erhaltung des Produktes durch einen echten Teiler zu ersetzen.

**Satz 50.** *Dann und nur dann ist ein Idealprodukt  $ab$  aus  $A$  eigentlich, wenn die Rechtsordnung von  $a$  mit der Linksordnung von  $b$  übereinstimmt.*

**Beweis.** Ist  $\sigma$  die Rechtsordnung von  $a$  und  $\sigma_1$  die Linksordnung von  $b$ , also  $a \sigma = a$ ,  $\sigma_1 b = b$ , so ist jedenfalls  $ab = a \sigma b = a \sigma_1 b$ . Ist das Produkt  $ab$  eigentlich, so muß also  $\sigma b = b$  und  $a \sigma_1 = a$  sein, d. h.  $\sigma = \sigma_1$  nach Satz 49.

Es sei umgekehrt  $\sigma = \sigma_1$ . Sei dann  $b_0$  ein Teiler von  $b$ ,  $b_0 \geq b$ , mit  $ab = ab_0$ . Diese Relation multipliziert man mit dem Reziproken  $a^{-1}$ ,

<sup>20)</sup> H. Brandt, Idealtheorie in einer Dedekindschen Algebra, Vortrag auf der Klassinger Tagung der D. M.-V. 1927, Jahresber. d. D. M.-V. 37 (1928).

dessen Existenz hier wegen der nach Satz 46 bestehenden Hauptideal-darstellung  $a = a o_r$  trivial ist:

$$a^{-1} = o_r a^{-1}, \quad a^{-1} a = o_r.$$

Es folgt  $o_r b = o_r b_0$ , also nach der Voraussetzung  $b = o_r b_0$ , und daher, weil  $o_r$  die 1 enthält,  $b \geq b_0$ , so daß der Teiler  $b_0$  mit  $b$  zusammenfallen muß. Daher ist das Produkt  $ab$  eigentlich.

**Satz 51.** *Die sämtlichen Ideale aus  $A$  bilden im Sinne der eigentlichen Multiplikation ein Gruppoid mit den Maximalordnungen von  $A$  als Einheiten.*

**Beweis.** Das folgt ohne weiteres aus den Sätzen 46, 48 bis 50, insbesondere das Divisionspostulat, wie schon im Beweis zu Satz 50 festgestellt wurde, aus Satz 46. —

Ein Ideal  $a$  aus  $A$  heißt *ganz*, wenn es seine Rechtsordnung  $o_r$  als Teiler enthält:  $a \leq o_r$ . Diese Definition ist symmetrisch, weil dann für die Linksordnung  $o_l = a a^{-1} = a o_r a^{-1}$  folgt:  $o_l \geq a a a^{-1} = a o_l \geq a$ .

Ein ganzes Ideal heißt ferner *primitiv*<sup>20a)</sup>, wenn es keinen zu seiner Rechtsordnung gehörigen ganzen gleichseitigen Teiler hat, von seiner Rechtsordnung selbst abgesehen. Auch diese Definition ist symmetrisch.

**Satz 52.** *Zwei Ideale  $a, b$  aus  $A$  stehen dann und nur dann in der Beziehung:*

$$b \text{ ist Teiler von } a,$$

*wenn sie im Sinne der eigentlichen Multiplikation in einer Beziehung stehen:*

$$a = lbr \text{ mit ganzen Idealen } l, r.$$

**Beweis.** Sei im Sinne der eigentlichen Multiplikation

$$a = lbr \text{ mit ganzen } l, r.$$

Dann stimmt die Linksordnung  $o'_l$  von  $b$  mit der Rechtsordnung von  $l$  überein, und es ist  $l \leq o'_l$ ; entsprechend stimmt die Rechtsordnung  $o'_r$  von  $b$  mit der Linksordnung von  $r$  überein, und es ist  $r \leq o'_r$ . Daraus ergibt sich, daß

$$a = lbr \leq o'_l b o'_r = b,$$

also  $b$  Teiler von  $a$  ist.

Sei umgekehrt  $b$  Teiler von  $a$ . Mit  $o_l, o_r$  seien Links- und Rechtsordnung von  $a$ , mit  $o'_l, o'_r$  wieder Links- und Rechtsordnung von  $b$  bezeichnet. Es sei dann  $l^*$  ein links zu  $o_l$ , rechts zu  $o'_l$  gehöriges Ideal und  $r^*$  ein

<sup>20a)</sup> Anmerkung bei der Korrektur. Wie mir Herr Brandt mitteilt, gebraucht er die Bezeichnung „primitiv“ (in Anlehnung an die geläufige Bedeutung dieses Begriffes in der Formentheorie und Substitutionstheorie) in etwas anderer Bedeutung, nämlich „ohne ganze Zentrumsideale als Teiler“.

links zu  $\mathfrak{o}'_r$ , rechts zu  $\mathfrak{o}_r$ , gehöriges Ideal, etwa zunächst  $\mathfrak{l}^* = \mathfrak{o}_i \mathfrak{o}'_i$  und  $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{o}'_i \mathfrak{o}_r$ . Man hat dann die Transformationsbeziehungen:

$$\alpha^{-1} \mathfrak{o}_i \alpha = \mathfrak{o}_r, \quad \mathfrak{l}^{*-1} \mathfrak{o}_i \mathfrak{l}^* = \mathfrak{o}'_i, \quad \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{o}'_i \mathfrak{b} = \mathfrak{o}'_r, \quad \mathfrak{r}^{*-1} \mathfrak{o}'_r \mathfrak{r}^* = \mathfrak{o}_r,$$

aus denen sich zusammengenommen

$$(\alpha^{-1} \mathfrak{l}^* \mathfrak{b} \mathfrak{r}^*)^{-1} \mathfrak{o}_r (\alpha^{-1} \mathfrak{l}^* \mathfrak{b} \mathfrak{r}^*) = \mathfrak{o}_r$$

ergibt. Hiernach ist  $\alpha^{-1} \mathfrak{l}^* \mathfrak{b} \mathfrak{r}^*$  ein gleichseitiges  $\mathfrak{o}_r$ -Ideal. Nach den Sätzen 45 und 47 ist dieses eine Potenz des zu  $\mathfrak{o}_r$  gehörigen Primideals  $\mathfrak{p}_r$ :

$$\mathfrak{l}^* \mathfrak{b} \mathfrak{r}^* = \alpha \mathfrak{p}_r^a.$$

Durch die Konstruktionsvorschrift ist nun  $\mathfrak{l}^*$  nur bis auf ein gleichseitiges  $\mathfrak{o}_i$ -Ideal, also eine Potenz des zugehörigen Primideals  $\mathfrak{p}_i$  als vorderen Faktor bestimmt, und ebenso  $\mathfrak{r}^*$  nur bis auf eine Potenz von  $\mathfrak{p}_r$  als hinteren Faktor. Diese Potenzen kann man zunächst auf die rechte Seite ziehen und dann ferner mit der dort schon stehenden Potenz von  $\mathfrak{p}_r$  vereinigen, wenn man beachtet, daß  $\alpha^{-1} \mathfrak{o}_i \alpha = \mathfrak{o}_r$  und daher  $\alpha^{-1} \mathfrak{p}_i \alpha = \mathfrak{p}_r$  ist. Eine Änderung in der Wahl von  $\mathfrak{l}^*$  und  $\mathfrak{r}^*$  bedeutet also nur eine Änderung des Exponenten  $a$ .

Es werde nun über die in  $\mathfrak{l}^*$  und  $\mathfrak{r}^*$  noch verfügbaren Primidealpotenzen eindeutig so verfügt, daß  $\mathfrak{l}^*$  und  $\mathfrak{r}^*$  ganze primitive Ideale werden. Die Möglichkeit dazu liegt auf der Hand, wenn man gemäß Satz 47  $\mathfrak{o}_i$  bzw.  $\mathfrak{o}_r$  als Maximalordnung vom in Satz 43 genannten Typus darstellt. Ich zeige, daß bei dieser Normierung der Exponent  $a \leq 0$  sein muß, was ersichtlich mit  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}^*$ ,  $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^* \mathfrak{p}_r^{-a}$  die Behauptung ergibt.

Um diesen Nachweis zu erbringen, ziehe ich die bisher noch gar nicht benutzte Voraussetzung  $\alpha \leq \mathfrak{b}$  heran. Durch (a priori nicht überall eigentliche!) Multiplikation mit  $\mathfrak{l}^*$  und  $\mathfrak{r}^*$  ergibt sich daraus nach dem vorhergehenden:

$$\mathfrak{l}^* \alpha \mathfrak{r}^* \leq \alpha \mathfrak{p}_r^a,$$

also

$$\alpha^{-1} \mathfrak{l}^* \alpha \cdot \mathfrak{r}^* \leq \mathfrak{p}_r^a.$$

Nun ist  $\mathfrak{l}^* \mathfrak{o}_i$  ein gleichseitiges  $\mathfrak{o}_i$ -Ideal. Da  $\mathfrak{l}^*$  ganz, also  $\mathfrak{l}^* \leq \mathfrak{o}_i$  ist, gilt für dieses Ideal  $\mathfrak{l}^* \mathfrak{o}_i \leq \mathfrak{o}_i$ , während andererseits, weil  $\mathfrak{o}_i$  die Haupteinheit 1 enthält,  $\mathfrak{l}^* \leq \mathfrak{l}^* \mathfrak{o}_i$  ist, zusammengenommen also:

$$\mathfrak{l}^* \leq \mathfrak{l}^* \mathfrak{o}_i \leq \mathfrak{o}_i.$$

Da  $\mathfrak{l}^*$  primitiv ist, muß dann aber notwendig  $\mathfrak{l}^* \mathfrak{o}_i = \mathfrak{o}_i$  sein, und daher

$$\alpha^{-1} \mathfrak{l}^* \alpha = \alpha^{-1} \mathfrak{l}^* \mathfrak{o}_i \alpha = \alpha^{-1} \mathfrak{o}_i \alpha = \mathfrak{o}_r.$$

Es folgt also:

$$\mathfrak{o}_r \mathfrak{r}^* \leq \mathfrak{p}_r^a.$$

Für  $\mathfrak{o}_r \tau^*$  hat man, analog zu  $\tau^* \mathfrak{o}_r$ , die Relation  $\mathfrak{o}_r \tau^* = \mathfrak{o}_r$ . Es folgt also weiter:

$$\mathfrak{o}_r \leq \mathfrak{p}_r^a,$$

was in der Tat  $a \leq 0$  besagt.

Satz 53. Bei eigentlicher Idealmultiplikation gilt für die Norm<sup>21)</sup> das Produktgesetz:

$$N(\mathfrak{a} \mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{b}).$$

Beweis. Es sei  $\mathfrak{o}$  die gemeinsame Linksordnung von  $\mathfrak{b}$  und Rechtsordnung von  $\mathfrak{a}$ . Gemäß Satz 46 seien

$$\mathfrak{a} = \alpha \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{o} \beta$$

HauptidealDarstellungen von  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$ . Bedeutet  $\epsilon$  eine  $\mathfrak{o}$ -Basisspalte für  $\mathfrak{o}$ , so ist dann  $\alpha \epsilon$  eine  $\mathfrak{o}$ -Basisspalte für  $\mathfrak{a}$  und  $\epsilon \beta$  eine  $\mathfrak{o}$ -Basisspalte für  $\mathfrak{b}$ .

Es sei nun

$$\alpha \epsilon = T_\alpha \epsilon, \quad \epsilon \beta = S_\beta \epsilon$$

mit Matrizen  $T_\alpha, S_\beta$  aus  $K$  vom Grade  $n^2 k^2$  (reguläre Darstellung von  $A$ !). Dann ist nach Definition der Idealnorm:

$$N(\mathfrak{a}) = |T_\alpha|, \quad N(\mathfrak{b}) = |S_\beta|,$$

genauer: die Normen sind die durch die rechten Seiten erzeugten  $\mathfrak{o}$ -Hauptideale in  $K$ .

Um analog  $N(\mathfrak{a} \mathfrak{b})$  auszudrücken, sei  $\mathfrak{o}^* = \alpha \mathfrak{o} \alpha^{-1}$  die Linksordnung von  $\alpha$ . Sie besitzt  $\epsilon^* = \alpha \epsilon \alpha^{-1}$  als  $\mathfrak{o}$ -Basisspalte. Wegen  $\mathfrak{a} \mathfrak{b} = \alpha \mathfrak{o} \beta = \mathfrak{o}^* \alpha \beta$  ist dann  $\epsilon^* \alpha \beta$  eine  $\mathfrak{o}$ -Basisspalte für  $\mathfrak{a} \mathfrak{b}$ . Für sie ist nach obigem:

$$\epsilon^* \alpha \beta = \alpha \epsilon \beta = T_\alpha \epsilon \beta = T_\alpha S_\beta \epsilon = T_\alpha S_\beta \alpha^{-1} \epsilon^* \alpha.$$

Es sei dann weiter ähnlich wie vorher:

$$\epsilon^* \alpha = S_\alpha^* \epsilon^*, \quad \alpha^{-1} \epsilon^* = T_\alpha^{*-1} \epsilon^* = T_\alpha^{*-1} \epsilon^*,$$

also auch

$$|S_\alpha^*| = |T_\alpha^*| = N(\alpha).$$

Damit ergibt sich:

$$\epsilon^* \alpha \beta = T_\alpha S_\beta \alpha^{-1} \epsilon^* \alpha = T_\alpha S_\beta T_\alpha^{*-1} \epsilon^* \alpha = T_\alpha S_\beta T_\alpha^{*-1} S_\alpha^* \epsilon^*,$$

und demgemäß

$$N(\mathfrak{a} \mathfrak{b}) = |T_\alpha| |S_\beta| |T_\alpha^*|^{-1} |S_\alpha^*| = N(\alpha) N(\mathfrak{b}).$$

<sup>21)</sup> Die Norm eines Ideals  $\mathfrak{a}$  (Bezeichnung  $N(\mathfrak{a})$ ) verstehe ich hier im selben Sinne, wie in A. § 2, also aus der  $\mathfrak{o}$ -Basisdarstellung definiert. Diese Idealnorn korrespondiert mit der aus der charakteristischen Gleichung definierten Elementnorm  $N(\alpha)$ . Eine mit der Norm  $n(\alpha)$  aus der Hauptgleichung korrespondierende Idealnorn ist bisher nirgends eingeführt worden. Wie mir Herr Brandt mitteilte, kann er eine sinngemäße Definition dieser  $n(\alpha)$  geben.

Ich nenne ein ganzes Ideal  $u$  *unzerlegbar*, wenn es keine Maximalordnung ist und im Sinne der eigentlichen Multiplikation keine Zerlegung in zwei ganze Ideale besitzt, von den trivialen Abspaltungen  $u = o, u = u o$ , der Links- und Rechtsordnung abgesehen.

Satz 54. *Ein ganzes Ideal ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn es, von sich selbst und seinen zugehörigen Maximalordnungen abgesehen, keinen ganzen Teiler besitzt.*

Beweis. Das folgt ohne weiteres aus Satz 52.

Satz 55. *Jedes ganze Ideal ist im Sinne der eigentlichen Multiplikation in ganze unzerlegbare Ideale zerlegbar.*

Beweis. Das folgt ohne weiteres mit Hilfe von Satz 53, wenn man beachtet, daß die Norm eines ganzen Ideals ganz ist.

Satz 56. *Alle ganzen unzerlegbaren Ideale entstehen auseinander durch Transformation mit Elementen aus  $A$ .*

Beweis.  $u$  sei ein ganzes unzerlegbares Ideal,  $o$  seine Rechtsordnung und  $u = v o$  eine zugehörige Hauptidealdarstellung. Die Matrizendarstellung von  $A$  sei so gewählt, daß  $o$  den in Satz 43 genannten Typus hat.  $v$  ist dann also eine Matrix aus Elementen der Maximalordnung  $o$  von  $S$ .

Wie schon einmal angeführt, gelten in einem Schiefkörper die Sätze der determinantenfreien linearen Algebra (unter Beachtung der Faktorenfolge). Nimmt man hinzu, daß die Maximalordnung  $o$  von  $S$  ein Hauptidealring mit nur einem Primideal ist, so lassen sich auch die Schlüsse der arithmetischen Elementarteilertheorie in  $S$  durchführen. In geläufiger Weise beweist man so: Es gibt zwei Einheiten  $\varepsilon, \eta$  aus  $o$  (d. h. auch  $\varepsilon^{-1}, \eta^{-1}$  gehören zu  $o$ ) derart, daß  $\varepsilon v \eta$  eine Diagonalmatrix der Gestalt

$$v^* = \varepsilon v \eta = \begin{vmatrix} \pi^{a_1} & & \\ & \pi^{a_1+a_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \pi^{a_1+\dots+a_k} \end{vmatrix}$$

ist, wo  $a_1, \dots, a_k$  nicht-negative ganze Zahlen sind. (Weil  $v$  kein Nullteiler ist, treten keine Nullglieder in der Diagonale auf.)

Ich betrachte dann das aus  $u$  durch Transformation entstehende Ideal

$$u^* = \varepsilon u \varepsilon^{-1} = \varepsilon u o \varepsilon^{-1} = \varepsilon v \eta \cdot \eta^{-1} o \varepsilon^{-1} = v^* o.$$

Weil auch  $u^*$  unzerlegbar ist, muß notwendig  $a_1, \dots, a_{k-1} = 0$  und  $a_k = 1$  sein. Denn sonst zerfällt ersichtlich  $v^*$  in  $o$  in zwei Faktoren:  $v^* = v_1^* v_2^*$ , deren keiner eine Einheit ist, und dann ist

$$u^* = v^* o = v_1^* o' \cdot v_2^* o \quad \text{mit} \quad o' = v_2^* o v_2^{*-1}$$

eine echte Zerlegung von  $u^*$ , die es nicht geben darf.



Damit ist gezeigt, daß ein beliebiges unzerlegbares Ideal  $u$  durch Transformation auf den Typus

$$u^* = v^* o = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & \pi \end{array} \right\| o$$

zurückgeführt werden kann, der sich bei der eingangs eingeführten,  $o$  auf den in Satz 43 genannten Typus bringenden Matrizendarstellung von  $A$  dadurch charakterisieren läßt, daß die letzte Zeile der Matrizen aus  $u^*$  durch  $\varphi$  teilbar ist. —

Der allgemeine Typus eines unzerlegbaren Ideals ist daher übrigens — bei Darstellung als  $o$ -Rechts- bzw. Linkshauptideal — durch eine lineare Kongruenz mod  $\varphi$  für die Zeilen bzw. Spalten der Matrizen aus  $u$  charakterisiert.

Satz 57. Die Anzahl der unzerlegbaren Faktoren im Sinne von Satz 55 ist eine Invariante für alle möglichen Zerlegungen.

Beweis. Das folgt ohne weiteres mittels Satz 53 durch Normbildung, wenn man beachtet, daß die nach Satz 56 alle untereinander ähnlichen unzerlegbaren Ideale natürlich dieselbe Norm haben.

Satz 58. Insbesondere ist das Primideal  $p$  einer Maximalordnung  $o$  das eigentliche Produkt von  $k$  unzerlegbaren Faktoren:

$$p = u_1 \dots u_k.$$

Beweis. Es ist

$$p = \pi o = \left\| \begin{array}{ccc} \pi & & \\ & \ddots & \\ & & \pi \end{array} \right\| o$$

und jedenfalls

$$\pi = \left\| \begin{array}{ccc} \pi & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{array} \right\| \dots \left\| \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pi \end{array} \right\| = v_1 \dots v_k.$$

Daraus folgt aber die Zerlegung im Sinne der eigentlichen Multiplikation:

$$p = \pi o = v_1 o_1 \cdot v_2 o_2 \dots v_{k-1} o_{k-1} \cdot v_k o_k$$

mit

$$o_k = o, \quad o_{k-1} = v_k o_k v_k^{-1}, \quad \dots, \quad o_1 = v_2 o_2 v_2^{-1}. \quad -$$

Unter der *Differente*  $b$  einer Maximalordnung  $o$  von  $A$  ist wieder das durch folgende Relation definierte gleichseitige  $o$ -Ideal aus  $A$  zu verstehen:

Ein Element  $\alpha$  aus  $A$  gehört dann und nur dann zu  $b^{-1}$ , wenn  $s(\alpha\gamma)$  ganz ist für jedes Element  $\gamma$  aus  $o$ .

Satz 59. Die Differente  $b$  einer Maximalordnung  $o$  von  $A$  ist die Potenz  $p^{n-1}$  des zugehörigen Primideals  $p$ .



Beweis. Die Matrizendarstellung von  $A$  sei so gewählt, daß  $\mathfrak{o}$  den in Satz 43 genannten Typus hat. Nach Satz 44 ist dann  $\omega^\mu \pi^r \epsilon_{ij}$  ( $\mu, r = 0, \dots, n-1; i, j = 1, \dots, k$ ) eine  $\mathfrak{o}$ -Basis von  $\mathfrak{o}$ .

Die Spur der Elemente aus  $A$  berechnet sich aus derjenigen  $kn$ -reihigen Matrizendarstellung von  $A$ , die man erhält, wenn man in den  $k$ -reihigen Matrizen aus  $A$  für die Elemente aus  $S$  die  $n$ -reihige Matrizendarstellung aus § 5 einführt, also durch Summation der Spuren der Diagonalelemente der  $k$ -reihigen Matrizen aus  $A$ .

Für die  $\mathfrak{o}$ -Basiselemente  $\omega^\mu \pi^{r-(n-1)} \epsilon_{ij} = \frac{1}{p} \omega^\mu \pi^{r+1} \epsilon_{ij}$  des Ideals  $\mathfrak{p}^{-(n-1)}$  hat man also wieder:

$$s\left(\frac{1}{p} \omega^\mu \pi^{r+1} \epsilon_{ij}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 0 & \text{für } i = j; r = 0, \dots, n-2 \\ k s(\omega^\mu) & \text{für } i = j; r = n-1 \end{cases},$$

so daß alle Elemente von  $\mathfrak{p}^{-(n-1)}$  ganze Spuren haben und somit zu  $\mathfrak{d}^{-1}$  gehören.

Dagegen gehören wieder nicht alle Elemente von  $\mathfrak{p}^{-n} = \mathfrak{p}^{-1}$  zu  $\mathfrak{d}^{-1}$ . Denn für das Element  $\frac{1}{p}$  hat man:

$$s\left(\frac{\gamma}{p}\right) = \frac{1}{p} s(\gamma),$$

und dies ist nicht für jedes  $\gamma$  aus  $\mathfrak{o}$  ganz, z. B. nicht für  $\gamma = \gamma_0 \epsilon_{11} = \left\| \begin{smallmatrix} \gamma_0 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{smallmatrix} \right\|$ ,

wo  $\gamma_0$  ein ganzes Element aus  $S$  mit  $s(\gamma_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$  ist, wie es im Beweis zu Satz 27 als vorhanden festgestellt wurde; für  $\gamma$  ist nämlich  $s(\gamma) = s(\gamma_0)$ .

Zusammengenommen ergibt sich  $\mathfrak{p}^{-(n-1)} = \mathfrak{d}^{-1}$  und damit die Behauptung.

## § 8.

### Übergang zur Arithmetik im einfachen Ausgangssystem $A$ .

$A$  habe den Grad  $N$ , also den Rang  $M = N^2$  über seinem Zentrum  $K$ . Für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K$  besteht dann eine Aufspaltung  $N = nk$  derart, daß die in § 1 eingeführte Erweiterung  $A_{\mathfrak{p}}$  von  $A$  sich als System aller  $k$ -reihigen Matrizen aus einem  $\mathfrak{p}$ -adischen Schiefkörper  $S_{\mathfrak{p}}$  vom Grade  $n$  darstellen läßt.

Ist  $\mathfrak{M}$  eine beliebige Menge von Elementen aus  $A$  und  $\mathfrak{p}$  ein Primideal von  $K$ , so verstehe ich unter der  $\mathfrak{p}$ -adischen Grenzmengung  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$  die Menge aller  $\mathfrak{p}$ -adischen Grenzwerte  $\mathfrak{p}$ -adisch konvergenter Folgen von Elementen aus  $\mathfrak{M}$ . Grenzwert und Konvergenz im  $\mathfrak{p}$ -adischen Sinne sind dabei koordinatenweise in bezug auf eine feste  $K$ -Basis von  $A$  verstanden, hängen jedoch von der besonderen Wahl dieser Basis nicht ab. Speziell

ist in diesem Sinne  $A_p$  die  $p$ -adische Grenzmenge von  $A$ ,  $K_p$  die  $p$ -adische Grenzmenge von  $K$ , und die Maximalordnung  $\mathfrak{o}_p$  von  $K_p$  die  $p$ -adische Grenzmenge der Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $K$ .

**Satz 60.** Für eine Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$  ist die  $p$ -adische Grenzmenge  $\mathfrak{o}_p$  eine Maximalordnung von  $A_p$ .

**Beweis.** Man bestätigt zunächst, daß  $\mathfrak{o}_p$  eine Ordnung ist:

1. Mit zwei Elementen  $\alpha, \beta$  gehören auch  $\alpha + \beta$  und  $\alpha\beta$  zu  $\mathfrak{o}_p$ . Jede ganze Zahl  $a$  aus  $K_p$  gehört zu  $\mathfrak{o}_p$ . Das folgt ohne weiteres aus dem ersten Ordnungspostulat für  $\mathfrak{o}$ .

2. Zu jedem Element  $\alpha$  aus  $A_p$  gibt es eine ganze Zahl  $g \neq 0$  aus  $K_p$  derart, daß  $g\alpha$  zu  $\mathfrak{o}_p$  gehört. Ist nämlich  $\alpha = \sum_{i=1}^M x_i \omega_i$  die Darstellung von  $\alpha$  durch eine  $K$ -Basis von  $A$  mit Koordinaten  $x_i$  aus  $K_p$ , so wähle man ein ganzes  $g_1$  aus  $K_p$  so, daß alle  $g_1 x_i$  ganz werden, und ein ganzes  $g_2$  aus  $K$  so, daß alle  $g_2 \omega_i$  zu  $\mathfrak{o}$  gehören. Letzteres geht nach dem zweiten Ordnungspostulat für  $\mathfrak{o}$ . Dann leistet  $g = g_1 g_2$  das Verlangte. Denn die  $g x_i \omega_i = g_1 x_i \cdot g_2 \omega_i$  gehören nach der Definition von  $\mathfrak{o}_p$  zu  $\mathfrak{o}_p$ .

3. Die bei der Darstellung der Elemente aus  $\mathfrak{o}_p$  durch eine  $K_p$ -Basis von  $A_p$  in den Koordinaten auftretenden Nenner sind beschränkt. Das folgt ohne weiteres aus dem dritten Ordnungspostulat für  $\mathfrak{o}$ .

Angenommen nun,  $\mathfrak{o}_p$  wäre keine Maximalordnung, und es wäre  $\mathfrak{o}_p^*$  eine  $\mathfrak{o}_p$  echt umfassende Ordnung in  $A_p$ . Dann sei  $\mathfrak{o}^*$  das System derjenigen Elemente  $\alpha$  aus  $A$ , die den folgenden beiden Bedingungen genügen:

- a)  $\alpha$  gehört zu  $\mathfrak{o}_p^*$ .
- b) Der größte gemeinsame Teiler aller  $g$  aus  $K$ , für die  $g\alpha$  zu  $\mathfrak{o}$  gehört, ist eine Potenz von  $p$ .

Man bestätigt zunächst wieder, daß  $\mathfrak{o}^*$  eine Ordnung ist:

1. Das erste Ordnungspostulat folgt ohne weiteres aus dem ersten Ordnungspostulat für  $\mathfrak{o}_p^*$  und  $\mathfrak{o}$ .

2. Das zweite Ordnungspostulat folgt ebenfalls ohne weiteres aus dem zweiten Ordnungspostulat für  $\mathfrak{o}_p^*$  und  $\mathfrak{o}$ .

3. Das dritte Ordnungspostulat ergibt sich, indem die in den Koordinatennennern der Elemente aus  $\mathfrak{o}^*$  möglichen Potenzen von  $p$  nach a) und dem dritten Ordnungspostulat für  $\mathfrak{o}_p^*$  beschränkt sind, während nach b) und dem dritten Ordnungspostulat für  $\mathfrak{o}$  die in jenen Koordinatennennern möglichen zu  $p$  primen Bestandteile beschränkt sind.

Da nun  $\mathfrak{o} \leq \mathfrak{o}_p$  ist, so folgt nach der Definition von  $\mathfrak{o}^*$  jedenfalls  $\mathfrak{o} \leq \mathfrak{o}^*$ . Um ferner aus  $\mathfrak{o}_p < \mathfrak{o}_p^*$  auf  $\mathfrak{o} < \mathfrak{o}^*$  und damit auf einen Widerspruch mit der Maximalitätseigenschaft von  $\mathfrak{o}$  zu schließen, gehe ich so vor:

Es sei zunächst  $\alpha$  ein beliebiges zu  $\mathfrak{o}_p^*$ , aber nicht zu  $\mathfrak{o}_p$  gehöriges Element.  $\alpha$  werde durch eine  $K$ -Basis  $\omega_i$  von  $A$  mit Koordinaten  $x_i$  aus  $K_p$  dargestellt:  $\alpha = \sum_{i=1}^M x_i \omega_i$ . Ist das ganze  $h \neq 0$  aus  $K_p$  gemäß dem zweiten Ordnungspostulat so gewählt, daß alle  $h\omega_i$  zu  $\mathfrak{o}_p$  gehören, so mögen die  $p$ -adischen Entwicklungen der Koordinaten  $x_i$  von  $\alpha$  derart abgebrochen werden, daß die Reste durch  $h$  teilbar werden. Damit wird  $\alpha$  zerspalten in ein Anfangsglied  $\alpha_0$  und einen in  $\mathfrak{o}_p$  liegenden Rest  $\gamma$ . Mit  $\alpha$  ist auch  $\alpha_0$  ein zu  $\mathfrak{o}_p^*$ , aber nicht zu  $\mathfrak{o}_p$  gehöriges Element;  $\alpha_0$  gehört sogar zu  $A$ . Ist ferner das ganze  $k \neq 0$  aus  $K$  gemäß dem zweiten Ordnungspostulat so gewählt, daß  $k\alpha$  zu  $\mathfrak{o}$  gehört, und ist  $k$  der zu  $p$  prime Bestandteil von  $k$ , sowie  $k'$  eine durch  $k$  teilbare, zu  $p$  prime Zahl aus  $K$ , so gehört  $k'\alpha_0$  ebenfalls zu  $\mathfrak{o}_p^*$ , aber nicht zu  $\mathfrak{o}_p$ ;  $k'\alpha_0$  gehört ferner natürlich zu  $A$ , und es genügt schließlich nach Konstruktion der Bedingung b). Daher gehört  $k'\alpha_0$  zu  $\mathfrak{o}^*$ . Dagegen gehört  $k'\alpha_0$  nicht zu  $\mathfrak{o}$ , weil es ja nicht einmal zu  $\mathfrak{o}_p$  gehört. Damit ist der Widerspruch  $\mathfrak{o} < \mathfrak{o}^*$  nachgewiesen.

Satz 61. Für ein Rechts- bzw. Links- bzw. zweiseitiges  $\mathfrak{o}$ -Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $A$  ist die  $p$ -adische Grenzmenge  $\mathfrak{a}_p$  ein Rechts- bzw. Links- bzw. zweiseitiges  $\mathfrak{o}_p$ -Ideal von  $A_p$ .

Beweis. Man bestätigt ohne weiteres, daß die Idealpostulate für  $\mathfrak{a}_p$  aus denen für  $\mathfrak{a}$  folgen. —

Unter einer  $p$ -Basis von  $\mathfrak{a}$  verstehe ich eine derartige  $K$ -Basis  $\alpha_i$ , daß erstens die  $\alpha_i$  zu  $\mathfrak{a}$  gehören, und daß zweitens die Koordinaten  $x_i$  der Elemente  $\alpha = \sum_{i=1}^M x_i \alpha_i$  aus  $\mathfrak{a}$  zu  $p$  prime Nenner haben. Die Existenz einer solchen  $p$ -Basis für jedes  $\mathfrak{a}$  erschließt man in geläufiger Weise (siehe für den Spezialfall  $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$  in A. § 4).

Satz 62. Eine  $p$ -Basis von  $\mathfrak{a}$  ist eine  $\mathfrak{o}_p$ -Basis von  $\mathfrak{a}_p$ .

Beweis. Benutzt man eine  $p$ -Basis  $\alpha_i$  von  $\mathfrak{a}$  für die zu  $\mathfrak{a}_p$  führende Grenzbildung, so erkennt man sofort, daß alle  $\alpha$  aus  $\mathfrak{a}$  bei der Darstellung durch sie  $p$ -adisch ganze Koordinaten haben. Da die Basiselemente  $\alpha_i$  selbst zu  $\mathfrak{a}_p$  gehören, ergibt sich in der Tat, daß sie eine  $\mathfrak{o}_p$ -Basis von  $\mathfrak{a}_p$  bilden.

Satz 63. Für ein  $\mathfrak{o}$ -Links- oder Rechtsideal  $\mathfrak{a}$  von  $A$  ist  $\mathfrak{a}_p = \mathfrak{a}\mathfrak{o}_p$ .

Beweis. Nach Satz 62 ist jedes Element  $\alpha$  aus  $\mathfrak{a}_p$  als Summe von  $M$  Produkten je eines Elementes  $\alpha_i$  aus  $\mathfrak{a}$  und eines Elementes  $x_i$  aus der Maximalordnung  $\mathfrak{o}_p$  von  $K_p$  darstellbar. Es ist also  $\mathfrak{a}_p \leq \mathfrak{a}\mathfrak{o}_p$ .

Umgekehrt ist jedes Element aus  $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_p$  eine Summe endlich vieler Produkte je eines Elementes aus  $\mathfrak{a}$  mit einem  $p$ -adischen Grenzwert einer

$p$ -adisch konvergenten Folge aus  $\mathfrak{o}$ , also eine Summe endlich vieler Grenzwerte  $p$ -adisch konvergenter Folgen aus  $\mathfrak{a}$ , und diese Grenzwerte gehören zu  $\mathfrak{a}_p$ . Es folgt also auch  $\mathfrak{a} \mathfrak{o}_p \leq \mathfrak{a}_p$ .

Satz 64. Es gilt  $(\mathfrak{a} \mathfrak{b})_p = \mathfrak{a}_p \mathfrak{b}_p$ .

Beweis. Das folgt ohne weiteres aus Satz 63.

Satz 65. Die Norm von  $\mathfrak{a}_p$  ist die in der Norm von  $\mathfrak{a}$  steckende Potenz von  $p$ :

$$N(\mathfrak{a}_p) = N(\mathfrak{a})_p.$$

Insbesondere sind also bei gegebenem  $\mathfrak{a}$  nur endlich viele der  $\mathfrak{a}_p$  von  $\mathfrak{o}_p$  verschieden.

Beweis.  $N(\mathfrak{a})_p$  ist definiert als die in der Determinante der Übergangssubstitution von einer  $p$ -Basis für  $\mathfrak{o}$  zu einer  $p$ -Basis für  $\mathfrak{a}$  steckende Potenz von  $p$ .<sup>29)</sup> Daraus ergibt sich die Behauptung sofort nach Satz 62.

Satz 66. Jedes Links- oder Rechtsideal  $\mathfrak{a}$  in bezug auf eine Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$  ist der Durchschnitt von  $A$  und allen ihm zugeordneten Idealen  $\mathfrak{a}_p$  aus den  $A_p$ . Hiernach ist auch umgekehrt  $\mathfrak{a}$  durch die  $\mathfrak{a}_p$  eindeutig bestimmt.

Insbesondere ist jede Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$  der Durchschnitt von  $A$  und allen ihr zugeordneten Maximalordnungen  $\mathfrak{o}_p$  der  $A_p$ , d. h. auch:

Ein Element  $\alpha$  aus  $A$  ist dann und nur dann »ganz im Sinne  $\mathfrak{o}$ «, wenn es »ganz im Sinne  $\mathfrak{o}_p$ « ist für jedes Primideal  $p$  von  $K$ .

Beweis. Wie sich aus der Definition der  $p$ -adischen Grenzmenge ergibt, ist  $\alpha \leq \mathfrak{a}_p$  für jedes  $p$ . Es bleibt also zu zeigen, daß ein zu allen  $\mathfrak{a}_p$  gehöriges Element  $\alpha$  aus  $A$  zu  $\mathfrak{a}$  gehört.

Nach dem dritten und vierten Idealpostulat gibt es nun jedenfalls ganze  $g \neq 0$  aus  $K$ , für die  $g\alpha$  zu  $\mathfrak{a}$  gehört. Die Gesamtheit dieser  $g$  (einschließlich 0) bildet ein ganzes Ideal  $\mathfrak{g}$  aus  $K$ .

Da  $\alpha$  zu jedem Ideal  $\mathfrak{a}_p$  gehören soll, so existiert für jedes  $p$  eine Folge  $\alpha_p^{(v)}$  von Elementen aus  $\mathfrak{a}$  derart, daß im  $p$ -adischen Sinne  $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_p^{(v)} = \alpha$  ist. Sei  $\alpha = \alpha_p^{(v)} + \gamma_p^{(v)}$  gesetzt, so werden also die Koordinaten der  $\gamma_p^{(v)}$  in bezug auf eine  $K$ -Basis  $\omega_i$  von  $A$  durch beliebig hohe Potenzen von  $p$  teilbar, wenn nur  $v$  hinreichend groß gewählt wird. Nach dem dritten und vierten Idealpostulat existiert nun ein ganzes  $h \neq 0$  aus  $K$  derart, daß alle  $h\omega_i$  zu  $\mathfrak{a}$  gehören. Da die Koordinaten der  $\gamma_p^{(v)}$  schließlich auch durch diejenige Potenz von  $p$  teilbar werden, die in  $h$  steckt, so existiert also eine zu  $p$  prime ganze Zahl  $h_p$  aus  $K$  derart, daß  $h_p \gamma_p^{(v)}$  zu  $\mathfrak{a}$  gehört. Dann gehört aber auch  $h_p \alpha$  zu  $\mathfrak{a}$ , d. h.  $h_p$  zu  $\mathfrak{g}$ .

<sup>29)</sup> Weil nicht notwendig eine  $\mathfrak{o}$ -Basis von  $\mathfrak{o}$  und von  $\mathfrak{a}$  vorhanden ist, ist man auf diese Definition von  $N(\mathfrak{a})$  angewiesen.

Für jedes Primideal  $p$  von  $K$  existiert also in  $g$  eine zu  $p$  prime Zahl  $h_p$ . Hiernach ist das ganze Ideal  $g$  aus  $K$  durch kein Primideal von  $K$  teilbar, und daher  $g = o = (1)$ . Das bedeutet aber, daß  $\alpha$  selbst zu  $a$  gehört, was zu zeigen war. —

Ich nenne die  $p$ -adische Grenzmenge  $a_p$  auch die  $p$ -Komponente von  $a$ .

**Satz 67.** *Zu jedem vorgegebenen System von Rechtsidealen  $a^{(p)}$  in bezug auf die zu einer festen Maximalordnung  $o$  von  $A$  gehörigen  $p$ -Komponenten  $o_p$ , wobei nur endlich viele der  $a^{(p)}$  von  $o_p$  verschieden seien, gibt es ein  $o$ -Rechtsideal  $a$ , dessen  $p$ -Komponenten  $a_p$  gerade die vorgegebenen  $a^{(p)}$  sind. Entsprechend für Linksideale.*

**Beweis.** Wenn überhaupt ein  $o$ -Rechtsideal  $a$ , so leistet nach Satz 66 der Durchschnitt von  $A$  und allen  $a^{(p)}$  der Behauptung Genüge.

In der Tat ist nun dieser Durchschnitt zunächst ein  $o$ -Rechtsideal  $a$ . Die Idealpostulate ergeben sich nämlich wie folgt: Das erste und das zweite sind evident, das dritte und das vierte folgen unter Berücksichtigung der Endlichkeit der Anzahl der  $a^{(p)} + o_p$  aus Satz 66.

Für das Durchschnittsideal  $a$  wird ferner  $a_p = a^{(p)}$ . Zunächst ist nämlich  $a_p = a o_p \leq a^{(p)} o_p = a^{(p)}$ . Um umgekehrt  $a^{(p)} \leq a_p$  zu zeigen, sei  $\alpha^{(p)}$  ein beliebiges Element aus  $a^{(p)}$  und  $\omega_i$  eine — nach dem zweiten Ordnungs-  
postulat vorhandene — zu  $o$  gehörige  $K$ -Basis von  $A$ . Es sei dann  $\alpha^{(p)} = \sum_{i=1}^M x_i \omega_i$  mit  $x_i$  aus  $K_p$ . Ferner sei die Potenz  $p^s$  so hoch gewählt, daß sie in  $a^{(p)}$  enthalten ist. Schließlich sei für die endlich vielen Primideale  $q \neq p$  von  $K$  mit  $a^{(q)} + o_q$  entsprechend eine zu  $a^{(q)}$  gehörige Potenz von  $q$  gewählt, und diese Potenzen seien zu dem Produkt  $g$  vereinigt. Bestimmt man dann für jedes  $r \geq 0$  ein System von Zahlen  $x_{i,r}$  aus  $K$  mit den Eigenschaften:

$$x_{i,r} \equiv x_i \pmod{p^{s+r}g},$$

die  $x_{i,r}$  haben höchstens Potenzen der Primidealfaktoren von  $pg$  im Nenner,

und bildet mit ihnen  $\alpha_r^{(p)} = \sum_{i=1}^M x_{i,r} \omega_i$ , so wird einerseits im  $p$ -adischen Sinne  $\alpha^{(p)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_r^{(p)}$ , andererseits gehören die  $\alpha_r^{(p)}$  zu  $A$ , ferner zu  $a^{(p)}$  und zu allen  $a^{(q)}$  mit  $q|g$  wegen der Kongruenzen für die  $x_{i,r}$ , schließlich zu allen übrigen  $a^{(q)} = o_q$ , weil die  $x_{i,r}$  diese  $q$  nicht im Nenner haben. Daher gehören die  $\alpha_r^{(p)}$  zu  $a$ , und es ist daher wirklich das beliebige Element  $\alpha^{(p)}$  aus  $a^{(p)}$  als  $p$ -adischer Grenzwert einer Folge  $\alpha_r^{(p)}$  aus  $a$  dargestellt, also  $a^{(p)} \leq a_p$ . —

Nach diesen vorbereitenden Sätzen, die in gewisser Analogie zur Prüfer-v. Neumannschen Theorie der idealen Zahlen bei algebraischen Zahlkörpern<sup>22a)</sup> stehen, entwickle ich zunächst die Theorie der zu einer festen Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$  gehörigen zweiseitigen Ideale, indem ich sie auf die Theorie der zweiseitigen Ideale bezüglich der  $p$ -Komponenten  $\mathfrak{o}_p$  aus den  $A_p$  zurückführe. Ich bezeichne dabei dasjenige eindeutig bestimmte zweiseitige  $\mathfrak{o}$ -Ideal, dessen  $p$ -Komponente das zu  $p$  gehörige Primideal  $\mathfrak{p}_p$  ist, während für jedes andere  $q$  die  $q$ -Komponente gleich  $\mathfrak{o}_q$  ist, mit  $p$ .

**Satz 68.**  $p$  ist ein Primideal von  $A$ .

**Beweis.**  $p$  ist zunächst ein ganzes Ideal, d. h.  $p \leq \mathfrak{o}$ , wie sich aus  $p \leq \mathfrak{p}_p \leq \mathfrak{o}_p$  und  $p \leq \mathfrak{o}_q$  nach Satz 66 ergibt.

Sind ferner  $a$  und  $b$  zweiseitige  $\mathfrak{o}$ -Ideale und ist  $p|ab$ , so folgt durch Grenzbildung  $p_p|(ab)_p = a_p b_p$  nach Satz 64, also  $p_p|a_p$  oder  $p_p|b_p$  wegen der Primidealeigenschaft von  $p_p$ , und daraus nach Satz 66 durch Durchschnittsbildung mit  $A$  und den übrigen  $\mathfrak{o}_q$  schließlich  $p|a$  oder  $p|b$ .

**Satz 69.** Die zu einer festen Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$  gehörigen zweiseitigen Ideale bilden eine Abelsche Gruppe. Diese ist das direkte Produkt von unendlich vielen Zyklen, die den Primidealen  $p$  von  $K$  ein-eindeutig zugeordnet sind und durch die zugehörigen Primideale  $p$  erzeugt werden.

Diese  $p$  sind also die einzigen  $\mathfrak{o}$ -Primideale, und jedes zweiseitige  $\mathfrak{o}$ -Ideal  $\alpha$  besitzt eine eindeutige Darstellung als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen:

$$\alpha = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}.$$

Dann und nur dann ist  $\alpha$  ganz, wenn alle Exponenten  $a_i \geq 0$  sind. Es ist

$$p = p^n,$$

wo  $n$  ein gewisser Teiler des Grades  $N$  von  $A$  ist.

**Beweis.** Das ergibt sich mittels der vorstehenden Sätze 60, 61, 64 bis 68 unmittelbar aus den früheren Sätzen 45 und 47.

**Satz 70.** Die Differente  $\mathfrak{d}$  einer Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$  ist genau durch  $p^{n-1}$  teilbar<sup>22b)</sup>.

**Beweis.** Auf Grund von Satz 59 genügt es zu zeigen, daß  $\mathfrak{d}$  die Differente  $\mathfrak{d}^{(p)} = p_p^{n-1}$  von  $A_p$  zur  $p$ -Komponente  $\mathfrak{d}_p$  hat.

<sup>22a)</sup> H. Prüfer, Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie, Math. Annalen 94 (1925). — J. v. Neumann, Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen, Acta litt. ac scient. Szeged 2 (1926).

<sup>22b)</sup> Dieser Satz wurde zuerst von Herrn Brandt, in der in Fußnote 7) zitierten Arbeit, bewiesen.

Ist nun  $\omega_i$  eine  $p$ -Basis von  $\mathfrak{o}$ , so ist in einer von der algebraischen Zahlentheorie her geläufigen Weise das mittels der linearen Gleichungen

$$\sum_{j=1}^M s(\omega_i \omega_j) x_{ji} = e_{ii} \quad (i, l = 1, \dots, M)$$

bestimmte System

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^M x_{ji} \omega_j$$

eine  $p$ -Basis von  $\mathfrak{b}^{-1}$ , also nach Satz 62 auch eine  $\mathfrak{o}_p$ -Basis der  $p$ -Komponente  $(\mathfrak{b}^{-1})_p = \mathfrak{b}_p^{-1}$ . Da, wiederum nach Satz 62, die  $\omega_i$  gleichzeitig eine  $\mathfrak{o}$ -Basis von  $\mathfrak{o}_p$  sind, so sind ferner  $\alpha_i$  nach Definition der Differenten  $\mathfrak{b}^{(p)}$  von  $A_p$  auch eine  $\mathfrak{o}_p$ -Basis von  $\mathfrak{b}^{(p)-1}$ . Daher ist in der Tat  $\mathfrak{b}_p^{-1} = \mathfrak{b}^{(p)-1}$ , also  $\mathfrak{b}_p = \mathfrak{b}^{(p)}$ . —

Zu Satz 70 sei noch bemerkt:  $n$  hängt gemäß § 1 nur von dem Primideal  $p$  des Grundkörpers  $K$  ab, und ist somit eine Invariante für alle Maximalordnungen  $\mathfrak{o}$  von  $A$ . Dagegen sind  $\mathfrak{b}$  und die  $p$  nicht invariant. Beim Übergang zu einer anderen Maximalordnung  $\mathfrak{o}^* = c^{-1} \mathfrak{o} c$  — auf diese Weise entstehen alle solchen,  $c = \mathfrak{o} \mathfrak{o}^* -$  treten  $\mathfrak{b}^* = c^{-1} \mathfrak{b} c$  und  $p^* = c^{-1} p c$  an die Stelle von  $\mathfrak{b}$  und  $p$ .

Ich wende mich ferner zur Theorie der einseitigen Ideale von  $A$  <sup>23)</sup>.

Satz 71. *Jedes Rechtsideal in bezug auf eine Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$  ist Linksideal in bezug auf eine Maximalordnung  $\mathfrak{o}$  von  $A$ , und umgekehrt.*

Beweis. Das folgt nach Satz 66 ohne weiteres aus dem entsprechenden Satz 48 für die einzelnen  $p$ -Komponenten.

Satz 72.  $\mathfrak{o}_l$  und  $\mathfrak{o}_r$  sind durch  $\alpha$  eindeutig bestimmt, nämlich  $\mathfrak{o}_l$  als Gesamtheit aller  $\lambda$  aus  $A$  mit  $\lambda \alpha \leq \alpha$ , und  $\mathfrak{o}_r$  als Gesamtheit aller  $\varrho$  aus  $A$  mit  $\alpha \varrho \leq \alpha$ .

Beweis. Diese Gesamtheiten sind ersichtlich Ordnungen, und sie umfassen die in Satz 71 festgestellten Maximalordnungen  $\mathfrak{o}$ , bzw.  $\mathfrak{o}_r$ . —

Links- und Rechtsordnung, Ideal schlechthin, gleichseitiges und ungleichseitiges Ideal, ganzes Ideal, unzerlegbares Ideal, eigentliche Multiplikation seien nun für  $A$  entsprechend definiert, wie in § 7 für  $A_p$ .

Satz 73. *Dann und nur dann ist ein Idealprodukt  $\alpha \mathfrak{b}$  aus  $A$  eigentlich, wenn die Rechtsordnung von  $\alpha$  mit der Linksordnung von  $\mathfrak{b}$  übereinstimmt; oder also auch dann und nur dann, wenn alle Produkte  $\alpha_p \mathfrak{b}_p$  eigentlich sind.*

<sup>23)</sup> Die folgenden Sätze haben wieder die Brandtsche Theorie der einseitigen Ideale zum Vorbild. Vgl. Fußnote <sup>20)</sup>.



**Beweis.** Wie der Beweis von Satz 50. — Die Existenz des Reziproken  $a^{-1}$  ist hier durch Zurückführung auf die  $a_p$  nach den Sätzen 66, 67 trivial:  $a^{-1}$  ist dasjenige Ideal, dessen Komponenten die  $a_p^{-1}$  sind.

**Satz 74.** *Die sämtlichen Ideale aus  $A$  bilden im Sinne der eigentlichen Multiplikation ein Gruppoid mit den Maximalordnungen von  $A$  als Einheiten.*

**Beweis.** Das folgt aus den Sätzen 71 bis 73 und der schon eben festgestellten Existenz des Reziproken.

**Satz 75.** *Zwei Ideale  $a, b$  aus  $A$  stehen dann und nur dann in der Beziehung:*

$$b \text{ ist Teiler von } a,$$

*wenn sie im Sinne der eigentlichen Multiplikation in einer Beziehung stehen:*

$$a = lbr \text{ mit ganzen Idealen } l, r.$$

**Beweis.** Das folgt ohne weiteres aus Satz 52 nach den Sätzen 61, 63, 64, 66, 67, 73.

**Satz 76.** *Bei eigentlicher Idealmultiplikation gilt für die Norm das Produktgesetz:*

$$N(ab) = N(a)N(b) \text{ }^{24)}.$$

**Beweis.** Das folgt ohne weiteres aus Satz 53 nach den Sätzen 65 und 73.

**Satz 77.** *Ein ganzes Ideal ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn es, von sich selbst und seinen zugehörigen Maximalordnungen abgesehen, keinen ganzen Teiler hat.*

**Beweis.** Das folgt ohne weiteres aus Satz 75.

**Satz 78.** *Ist  $u^{(p)}$  ein ganzes unzerlegbares Ideal aus  $A_p$  und  $u$  ein Ideal aus  $A$ , für das  $u_p = u^{(p)}$  ist, aber alle anderen  $u_q$  Maximalordnungen sind<sup>25)</sup>, so ist  $u$  unzerlegbar.*

**Beweis.** Das folgt ohne weiteres aus Satz 77 nach den Sätzen 66 und 67, oder auch aus der Definition der Unzerlegbarkeit nach den Sätzen 73, 66, 67.

<sup>24)</sup> In A. § 3 findet sich dieses Gesetz nur für den Spezialfall eines gleichseitigen und eines beliebigen Idealfaktors. — Wie mir Herr Brandt mitteilt, hat jedoch Herr Artin in einer Hamburger Vorlesung, sowie er selbst in einem Hamburger Vortrag, auch schon den Beweis im allgemeinen Falle geführt.

<sup>25)</sup> Da die Rechtsordnung  $\sigma_p$  von  $u^{(p)}$  aus verschiedenen Maximalordnungen  $\sigma, \sigma', \dots$  als  $p$ -adische Grenzmenge entspringt, so gibt es verschiedene Ideale  $u, u', \dots$  mit dieser Eigenschaft. — Mittels Satz 47 überlegt man sich leicht, daß zu jeder Maximalordnung  $\sigma_p$  (sogar zu jedem endlichen System von Maximalordnungen  $\sigma_{p_1}, \dots, \sigma_{p_r}$ ) eine erzeugende Maximalordnung  $\sigma$  existiert.

**Satz 79.** *Jedes ganze Ideal ist im Sinne der eigentlichen Multiplikation in ganze unzerlegbare Ideale des in Satz 78 genannten Typus zerlegbar.*

*Andere unzerlegbare Ideale gibt es nicht.*

*Die zum selben  $p$  gehörigen unzerlegbaren Ideale haben dieselbe Norm.*

**Beweis.** Es seien  $p_1, \dots, p_r$  die endlich vielen Primideale von  $K$ , für die die Komponenten  $a_{p_1}, \dots, a_{p_r}$  des gegebenen ganzen Ideals  $a$  von Maximalordnungen verschieden sind. Ist  $v_1$  die Linksordnung von  $a$ , so sei zunächst  $a_1$  das nach Satz 67 vorhandene eindeutig bestimmte  $v_1$ -Linksideal, das als einzige wesentliche Komponente  $a_{1p_1} = a_{p_1}$  besitzt. Dessen Rechtsordnung sei  $v_2$ . Dann sei  $a_2$  das eindeutig bestimmte  $v_2$ -Linksideal, das als einzige wesentliche Komponente  $a_{2p_2} = a_{p_2}$  besitzt. So fortfahrend erhält man die Ideale  $a_1, \dots, a_r$ , deren Produkt  $a_1 \dots a_r$  eigentlich ist. Nach Satz 64 sind dessen Komponenten gerade die Komponenten von  $a$ . Nach Satz 66 hat man also im Sinne der eigentlichen Multiplikation die Zerlegung

$$a = a_1 \dots a_r.$$

Die Faktoren  $a_i$  zerfallen ferner, entsprechend einer Zerlegung der  $a_{ip_i}$  gemäß Satz 55, in unzerlegbare Faktoren vom in Satz 78 genannten Typus.

Nach den Sätzen 56 und 65 haben unzerlegbare Ideale dieses Typus, die zum selben  $p$  gehören, dieselbe Norm (eine Potenz von  $p$ ).

Andere unzerlegbare Ideale kann es nach dem ersten Teil des Beweises nicht geben.

**Satz 80.** *Die Anzahl der unzerlegbaren Faktoren im Sinne von Satz 79 ist eine Invariante für alle möglichen Zerlegungen.*

**Beweis.** Das folgt ohne weiteres aus Satz 57.

**Satz 81.** *Insbesondere ist ein Primideal  $p$ , für das  $p = p^n$  ist, das eigentliche Produkt von  $k = \frac{N}{n}$  unzerlegbaren Faktoren.*

**Beweis.** Das folgt ohne weiteres aus Satz 58.

Halle, den 26. Februar 1930.

(Eingegangen am 18. 6. 1930.)

# Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen.

Von

St. Pietrkowski in Göttingen.

---

## Literaturverzeichnis.

R. Baer, Zur Topologie der Gruppen, *Crelle* **160**, 4 (zitiert als B.).

W. Krull, Galoissche Theorie der unendlichen Normalkörper, *Math. Annalen* **100** (zitiert als K.).

v. Neumann, Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen, *Szegeder Berichte* **2**, 4.

H. Prüfer, Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen, **1**, **2**, *Math. Zeitschr.* **20** und **22** (zitiert als P1, P2).

H. Prüfer, Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie, *Math. Annalen* **94** (zitiert als PZ).

## Einleitung<sup>1)</sup>.

Diese Arbeit setzt sich zum Ziel einen Satz über Zerlegung in direkte primäre Summanden des Ranges 1 und zugehörigen Isomorphiesatz für unendliche Abelsche Gruppen aufzufinden, der dem bekannten Basissatz für endliche Abelsche Gruppen entspricht.

Nachdem engere spezielle Fälle von unendlichen Abelschen Gruppen von F. Levi und H. Prüfer untersucht worden waren, schuf H. Prüfer dann die entscheidenden Methoden für die Untersuchung des allgemeinen Problems in P 1 und P 2. Er erkannte, daß ein Zerlegungssatz für beliebige Abelsche Gruppen sich nicht aufstellen läßt, und legte seinen Untersuchungen eine gewisse Sonderklasse, seine sogenannten idealen Gruppen zugrunde. Diese Klasse ist, wie er zeigte, immerhin so allgemein, daß man jede beliebige Abelsche Gruppe in eine ideale einbetten kann. Es gelang Prüfer, die Zerlegung idealer Gruppen mit endlich vielen direkten Summanden zu

---

<sup>1)</sup> Diese Arbeit hat im Mai 1930 der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen als Inauguraldissertation vorgelegen. Meinem Lehrer Herrn W. Krull bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit wie für die unermüdliche Unterstützung bei Abfassung derselben zu größtem Dank verpflichtet.

erhalten und Methoden zu entwickeln, die uns hier nach leichter Verallgemeinerung im allgemeinsten Falle zum Ziele führen.

Wir wählen eine etwas andere Darstellung als Herr Prüfer. Nach bekannten Mustern<sup>2)</sup> stellen wir eine unendliche Abelsche Gruppe als topologischen Punktraum dar, indem wir jedes Gruppenelement als einen Punkt auffassen und gewisse Untergruppen (sie gehören zu den Prüferschen „großen Untergruppen“) mit ihren Restklassen zu Umgebungen machen. Dabei können, je nach Wahl des Untergruppensystems, wesentlich verschiedene (nicht homöomorphe) topologische Räume entstehen. Prüfers ideale Gruppen haben dann als topologische Punkträume eine Abgeschlossenheitseigenschaft, die sich ungefähr mit der Eigenschaft kompakter Räume vergleichen läßt<sup>2a)</sup>. Doch ist diese Eigenschaft insofern eine relative, als sie von der Wahl des Untergruppensystems, also von der gewählten Topologisierung abhängt. Eine Gruppe kann nach einem Untergruppensystem, also bei einer gewissen Topologisierung, abgeschlossen sein, einen kompakten Raum bilden; nach einem andern System nicht.

Wir bezeichnen die idealen Gruppen wegen ihrer topologischen Eigenschaft in dieser Arbeit als abgeschlossene Gruppen. Die topologische Wendung läßt die wichtigen Sondereigenschaften der abgeschlossenen (= idealen) Gruppen klarer zutage treten.

Bei zweckmäßiger Übertragung der Begriffe zyklische Gruppe, Ordnung, direkte Summe, insbesondere Einführung unendlicher Summen von Gruppenelementen<sup>3)</sup> gelangt man zu dem gesuchten Zerlegungssatz.

Betrachtet man gewöhnliche Abelsche Gruppen als verallgemeinerte Abelsche Gruppen<sup>4)</sup> mit ganzrationalem Operatorenbereich, so läßt sich bei den abgeschlossenen Gruppen der Operatorenring auf „natürliche Weise“

<sup>2)</sup> Vgl. PZ, v. Neumann, Zur Theorie der Prüferschen idealen Zahlen, B., K.

<sup>2a)</sup> Es ist die Eigenschaft der Bikompaktheit. Vgl. P. Alexandroff, Math. Annalen 92, S. 260.

<sup>3)</sup> Die Einführung unendlicher Summen von Gruppenelementen geht nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn G. Köthe parallel zu dessen Einführung unendlicher Summen von Ringelementen in transzendent vollreduziblen Ringen. (Vgl. Abstrakte Theorie nichtkommutativer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen, Math. Annalen 103 (1930), S. 545–572.) Doch während Herr Köthe auf diesen Begriff die Definition unendlicher direkter Summen von Ringen stützt, müssen wir die Definition unendlicher direkter Summen von Gruppen anders fassen (vgl. Def. 3, § 3), um sicher zu sein, daß wir wieder eine abgeschlossene Gruppe erhalten. Wir weisen dann nachträglich die Äquivalenz unserer Definition mit der Kötheschen nach (Satz 3, § 3).

<sup>4)</sup> Verallgemeinerte Abelsche Gruppen sind Abelsche Gruppen, bei denen für alle Elemente distributive Operatoren erklärt sind. Vgl. W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Heidelberger Sitzungsberichte oder die Wiedergabe bei Haupt, Algebra S. 617.

abschließen zum Ring der ganzen  $g$ -adischen<sup>5)</sup> Zahlen, den man genau so wie die abgeschlossenen Gruppen erhält, wenn man nach Prüfer-v. Neumannschem Vorbild<sup>6)</sup> auf die Gruppe der ganzen rationalen Zahlen ebenfalls die Topologie anwendet.

Die abgeschlossenen Gruppen, die durch den Zerlegungssatz einen einfachen Aufbau erhalten, sind auch mathematisch wichtig. Es sind gerade die, von denen W. Krull in K. gezeigt hat, daß sie allein in der Theorie der unendlichen relativ-Abelschen Körper eine Rolle spielen. Auf diesen Punkt gedenke ich später einmal zurückzukommen.

Wir wollen noch einen kurzen Überblick über die Anordnung im einzelnen geben. In § 1 werden zum großen Teil aus P 1 bekannte Tatsachen über große Untergruppen abgeleitet. In § 2 werden die abgeschlossenen Gruppen topologisch gekennzeichnet und ihre Eigenschaften behandelt. § 3 enthält die Definition des direkten Durchschnitts und der direkten Summe, ferner zwei Sätze über die Äquivalenz dieser Begriffe und einen für die Behandlung allgemeinsten abgeschlossener Gruppen fundamentalen Konstruktionssatz. § 4 bis 6 enthalten gruppentheoretische Überlegungen: Die Zerlegung in direkte primäre Summanden, die Konstruktion direkter Summanden des Ranges 1, die den endlichen zyklischen Summanden entsprechen. § 7 enthält den Beweis des Zerlegungssatzes, § 8 den des Isomorphie- und Auswechselsatzes<sup>6a)</sup>. Hiermit ist die allgemeine Theorie der abgeschlossenen Gruppen erledigt. Es bleiben noch drei wichtige Fragen offen. Erstens: Wie verhalten sich die nichtabgeschlossenen Gruppen zu den abgeschlossenen? Wir zeigen in § 9, daß man zu jeder beliebigen unendlichen Abelschen Gruppe  $\mathfrak{G}$  eine abgeschlossene Hülle  $\mathfrak{H}$  konstruieren kann, d. h. eine abgeschlossene Obergruppe, die aus lauter Häufungspunkten von  $\mathfrak{G}$  besteht. Die Konstruktion ist i. allg. auf mehrere Weisen möglich. Wir untersuchen und beantworten daher zweitens in § 9 die Frage: Wie verhalten sich alle verschiedenen abgeschlossenen Hüllen von  $\mathfrak{G}$  zueinander? Es wird sich ergeben, daß sie alle zu Quotientengruppen einer „größten“ unter ihnen isomorph sind. Schließlich geben wir in § 10 noch ein Beispiel einer Gruppe, die bei zwei verschiedenen Topologisierungen als abgeschlossener topologischer Raum anzusehen ist, und zeigen, daß aber wenigstens bei geeigneter Festlegung des Operatorenbereiches die Zerlegungen der Gruppe

<sup>5)</sup> Unter dem Ring der  $g$ -adischen Zahlen soll der Ring der zu den rationalen Zahlen gehörigen idealen Zahlen (PZ) verstanden werden, *nicht* wie bei Hensel der der formalen Potenzreihen in  $g$ .

<sup>6)</sup> Vgl. PZ. Die Umgebungen sind hier die Gruppen der durch eine feste ganze rationale Zahl teilbaren Elemente und deren Restklassen.

<sup>6a)</sup> Von hier bis zum Ende des Absatzes bei der Korrektur (November 1930) zugefügt.

bis auf Isomorphie identisch sind. Als Anhang bringen wir ein Beispiel einer nicht abgeschlossenen und nicht zerlegbaren Gruppe und schließen diese dann nach dem Vorbilde von § 9 ab.

Die Definitionen dieser Arbeit stammen mit Ausnahme der topologischen Fassung und der unendlichen direkten Summe schon von Prüfer (P 1 und P 2). Die Sätze aus den Paragraphen 1, 4, 5, 6 sind zum Teil ebenfalls von Prüfer, insbesondere der ganze § 6 mit Ausnahme des Hilfssatzes. Die mitgeteilten Beweise sind mit Ausnahme der des § 6 fast alle neu. In § 6 glaubten wir des Zusammenhangs halber die Prüferschen Konstruktionen und Beweise noch einmal anführen zu müssen.

### Bezeichnungen.

In dieser Arbeit werden Gruppen additiv geschrieben. Das Zeichen für die Gruppenverknüpfung ist also  $+$ . Das Nullelement bezeichnen wir mit  $\omega$ . Für die Anwendung eines Operators verwenden wir das Zeichen  $\cdot$ . Unter der Vereinigungsgruppe einer Menge von Untergruppen einer Gruppe verstehen wir die Gruppe der Summen aus je einem Element aus je endlich vielen Gruppen der Menge. Unter der durch das Element  $\alpha$  repräsentierten Restklasse<sup>7)</sup> einer Untergruppe  $\mathfrak{F}$  in  $\mathfrak{G}$ :  $(\alpha + \mathfrak{F})$  verstehen wir die Gesamtheit der Elemente, die Summe aus  $\alpha$  und einem Element von  $\mathfrak{F}$  sind. Diese Elemente sind alle Lösungen der Kongruenz

$$\xi \equiv \alpha (\mathfrak{F}), \quad \text{d. i. mod } \mathfrak{F},$$

wo  $\alpha$  ein beliebiges Element der Restklasse ist. Die Vereinigungsgruppe heißt direkte Summe von endlich vielen Gruppen, wenn jede Gruppe mit der Vereinigungsgruppe aller übrigen nur  $\omega$  zum Durchschnitt hat.

### § 1.

#### Große Untergruppen<sup>8)</sup>.

Ein wichtiges Hilfsmittel der Untersuchungen der folgenden Abschnitte werden die großen Untergruppen sein. Wir führen diesen Begriff hier für verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit ganz rationalem Operatorenring = gewöhnliche Abelsche Gruppen ein, obwohl die folgenden Sätze sich für jeden kommutativen Operatorenring mit Hauptidealzerlegung beweisen lassen.

Wie immer bei verallgemeinerten Abelschen Gruppen, sollen als Untergruppen nur die gewöhnlichen Untergruppen betrachtet werden, deren Operatorenbereich mit dem der Gesamtgruppe identisch ist. Die Begriffe

<sup>7)</sup> Restklasse = Nebenschar = Nebengruppe.

<sup>8)</sup> Alle Sätze bis auf Satz 5 stammen aus P 1. Die Beweise, die angegeben sind, sind neu, die anderen sehe man in P 1, S. 181/182 nach. Der Prüferschen Definition der großen Untergruppen haben wir eine andere Fassung gegeben.

„Summe zweier Gruppen“, „Restklasse nach einer Untergruppe“ übertragen sich sofort auf verallgemeinerte Abelsche Gruppen. Es gilt auch hier die fundamentale Beziehung

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) | \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{A} | (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}). ^*)$$

Wir definieren nun

$\mathfrak{F}$  ist eine große Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ , wenn jede Untergruppenkette

$$\mathfrak{G} > \mathfrak{G}_1 > \mathfrak{G}_2 > \dots > \mathfrak{F} ^*)$$

endlich ist, d. h. wenn in  $\mathfrak{G} | \mathfrak{F}$  der Untergruppenkettensatz gilt.

Z. B. sind alle Untergruppen von endlichem Index große Untergruppen.

Für große Untergruppen gelten folgende Sätze:

Satz 1. Ist  $\mathfrak{F}$  große Untergruppe von  $\mathfrak{H}$ , und  $\mathfrak{H}$  große Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ , so ist  $\mathfrak{F}$  große Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ .

Ist nämlich  $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_0 > \mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}_2 > \dots > \mathfrak{F}$  irgendeine endliche oder unendliche Kette, so bilden wir  $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{B}_i$ , dann ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_0 \geq \mathfrak{B}_1 \geq \mathfrak{B}_2 \geq \dots \geq \mathfrak{F}.$$

In dieser Kette kann es nach Voraussetzung nur endlich viele verschiedene Glieder geben. Es gibt aber auch nur endlich viele gleiche. Denn ist  $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_{n+1} = \dots$ , so bedeute  $\mathfrak{C}_n = \mathfrak{A}_n + \mathfrak{H}$ , dann ist  $\mathfrak{C}_n | \mathfrak{H} \leftrightarrow \mathfrak{A}_n | \mathfrak{B}_n$ . Wegen  $\mathfrak{A}_n > \mathfrak{A}_{n+1} > \dots$  und  $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_{n+1} = \dots$  gibt es in  $\mathfrak{A}_n | \mathfrak{B}_n$  eine absteigende Kette  $\mathfrak{A}_n | \mathfrak{B}_n > \mathfrak{A}_{n+1} | \mathfrak{B}_n > \dots$ . Dann gibt es aber wegen der Isomorphie auch eine absteigende Kette  $\mathfrak{C}_n | \mathfrak{H} > \mathfrak{C}_{n+1} | \mathfrak{H} > \dots$ . Diese muß nach Voraussetzung endlich sein, also auch die der  $\mathfrak{B}_i$ , also auch die der  $\mathfrak{A}_i$ , w. z. b. w.

Satz 2. Der Durchschnitt endlich vieler großer Untergruppen ist selbst eine große Untergruppe.

Satz 3. Ist  $\mathfrak{G}_1$  große Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{F}$  beliebige Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ , so ist  $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_1$  große Untergruppe von  $\mathfrak{F}$ .

Denn  $\mathfrak{G} | \mathfrak{G}_1$  ist Obergruppe von  $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{F}) | \mathfrak{G}_1 \leftrightarrow \mathfrak{F} | \mathfrak{F}_1$ . Da  $\mathfrak{G}_1$  große Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  und damit von  $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{F}$ , so ist es  $\mathfrak{F}_1$  von  $\mathfrak{F}$ .

Ist  $\mathfrak{E}$  eine Gruppe derart, daß ein Element  $\varepsilon$  in allen ihren Untergruppen vorkommt, so heiße  $\mathfrak{E}$  durch das Element  $\varepsilon$  beherrscht.

Satz 4.  $\mathfrak{E}$  ist entweder eine endliche zyklische Gruppe von der Ordnung  $p^k$  ( $k$  endlich,  $p$  Primzahl) oder vom Typus der Additionsgruppe der rationalen Brüche, in deren Nennern alle Potenzen der Primzahl  $p$  vorkommen, mod 1 reduziert,  $\omega$  ist also immer eine große Untergruppe.

<sup>\*)</sup>  $\cap$  bedeute Durchschnitt,  $\mathfrak{G}_1 > \mathfrak{G}_2$  bedeute:  $\mathfrak{G}_2$  ist echte Untergruppe von  $\mathfrak{G}_1$ ,  $\leftrightarrow$  bedeute holoeidrische Gruppenisomorphie (hier kurz Isomorphie genannt),  $\mathfrak{G} | \mathfrak{F}$  Quotientengruppe (Faktorgruppe).



Satz 5. Enthält die Untergruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{H}$  das Element  $\delta$  nicht, so gibt es eine größte  $\mathfrak{F}$ , aber nicht  $\delta$  enthaltende große Untergruppe von  $\mathfrak{H}$ .

Wir ordnen die nicht in  $\mathfrak{F}$  enthaltenen Elemente von  $\mathfrak{H}$  wohl

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\sigma, \dots \quad [\sigma < \varrho]$$

( $\sigma$  = Limeszahl entspricht kein  $\alpha_\sigma$ ).

$\beta_1$  ist das erste  $\alpha_\sigma$ , für das  $(\mathfrak{F} + \{\alpha_\sigma\})$ ,  $\delta$  nicht enthält.

Ist  $\tau$  ≠ Limeszahl,  $\mathfrak{F}_{\tau-1}$  schon gebildet, so sei  $\beta_\tau$  das erste  $\alpha_\sigma$ , das hinter  $\alpha_{\sigma_{\tau-1}}$  steht, für das  $(\mathfrak{F}_{\tau-1} + \{\alpha_\sigma\})$   $\delta$  nicht enthält.

Ist  $\tau$  = Limeszahl, so sei  $\mathfrak{F}_\tau$  die Vereinigungsgruppe aller  $\mathfrak{F}_\sigma$  [ $\sigma < \tau$ ]. Da jedes Element von  $\mathfrak{F}$  schon in einem  $\mathfrak{F}_\nu$  [ $\nu < \tau$ ] enthalten ist, so enthält  $\mathfrak{F}_\tau$   $\delta$  nicht. Der Prozeß bricht spätestens bei  $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}_\varrho$  ab. Jede Obergruppe von  $\mathfrak{D}$  enthält  $\delta$ , denn sie enthält mindestens ein einem  $\alpha_\sigma$  in der Wohlordnung vorangehendes Element, das selbst kein  $\beta_\tau = \alpha_\sigma$  ist.  $\mathfrak{H}|\mathfrak{D}$  wird durch  $(\delta + \mathfrak{D})$  beherrscht,  $\mathfrak{D}$  ist also große Untergruppe.

Satz 6. Jede große Untergruppe  $\mathfrak{H}$  von  $\mathfrak{G}$  ist Durchschnitt endlich vieler großer Untergruppen, deren Quotientengruppen durch ein Element beherrscht werden.

Ist das Element  $\delta_1$  nicht in  $\mathfrak{H}$  enthalten, so konstruiere man nach Satz 5 eine größte  $\delta_1$  nicht enthaltende Obergruppe  $\mathfrak{H}_1$  von  $\mathfrak{H}$ . Sind  $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_n$  schon konstruiert, und gibt es ein Element  $\delta_{n+1}$  aus  $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{H}_n$ , das nicht in  $\mathfrak{H}$  enthalten ist, so konstruiere man eine größte  $\delta_{n+1}$  nicht enthaltende Obergruppe  $\mathfrak{H}_{n+1}$  von  $\mathfrak{H}$ . Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab, weil  $\mathfrak{H}$  große Untergruppe ist. Dann ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{H}_m.$$

Aus den vorhergehenden Sätzen folgt leicht

Satz 7. Ist  $\mathfrak{F}$  große Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ , so ist  $\mathfrak{G}|\mathfrak{F}$  eine abzählbare Gruppe mit Elementen nur endlicher Ordnung.

## § 2.

### Abgeschlossene Abelsche Gruppen<sup>10)</sup>.

Will man versuchen, den Zerlegungssatz für endliche Abelsche Gruppen auf unendliche Abelsche Gruppen zu übertragen, so zeigen schon sehr einfache Beispiele (siehe Anhang), daß dies sicher nicht für ganz allgemeine

<sup>10)</sup> Die Definitionen und Sätze 1 bis 7 und Hilfssatz 3 dieses Paragraphen gelten in ähnlicher Form auch für nichtkommutative Gruppen. Vgl. B., S. 220 ff., wo die abgeschlossenen Hüllen der  $S$ -Gruppen ungefähr unseren abgeschlossenen Gruppen entsprechen. Sie werden sich wohl auch leicht für beliebige verallgemeinerte Abelsche Gruppen übertragen lassen.

unendliche Abelsche Gruppen möglich ist. Wir legen daher eine besondere Klasse von unendlichen Abelschen Gruppen unseren Untersuchungen zugrunde, für die wir dann die Gültigkeit eines Zerlegungssatzes im folgenden nachweisen. Es wird sich zeigen, daß jede unendliche Abelsche Gruppe in eine Gruppe unserer Sonderklasse eingebettet werden kann, so daß uns der Zerlegungssatz auch über allgemeinste Abelsche Gruppen Auskunft gibt.

Damit die Eigenschaften unserer Sonderklasse unendlicher Abelscher Gruppen — wir nennen sie abgeschlossene Gruppen — besser zur Geltung kommen, stellen wir eine unendliche Abelsche Gruppe als topologischen Punktraum dar<sup>11)</sup>, indem wir jedes Gruppenelement zu einem Punkte machen und gewisse Untergruppen mit ihren Restklassen als Umgebungen einführen.

Wir definieren daher:

*Eine abgeschlossene Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist eine Abelsche Gruppe, die folgenden Postulaten genügt:*

1. *Man kann in  $\mathfrak{G}$  ein System von großen Untergruppen mit ihren Restklassen so auswählen, daß es ein topologisches Umgebungssystem bildet, und daß*

2. *jedes verträgliche Kongruenzsystem<sup>12)</sup> nach den großen Untergruppen dieses Systems in  $\mathfrak{G}$  eine Lösung hat<sup>13)</sup> 14).*

Hierbei soll unser Umgebungssystem gegenüber den von Hausdorff, Mengenlehre, 2. Aufl. S. 228 aufgestellten Axiomen folgenden verschärften<sup>14a)</sup> Bedingungen genügen:

B'. Jede Umgebung ist Umgebung aller ihrer Punkte.

C'. Der Durchschnitt zweier Umgebungen ist selbst eine Umgebung.

1. ist für jede Abelsche Gruppe erfüllbar durch das System aller großen Untergruppen mit ihren Restklassen. Denn Axiom A ist selbstverständlich erfüllt, Offenheitsaxiom B' ebenfalls, da jede Restklasse nach einer großen Umgebungsuntergruppe für alle ihre Elemente Umgebung ist. Durchschnittsaxiom C' wird mit Satz 2 § 1 bewiesen. Auch das Trennungsaxiom D ist erfüllt, denn seien  $\alpha, \beta$  zwei Elemente von  $\gamma, + \delta$ , wo  $\delta$  große Untergruppe ist,

<sup>11)</sup> Vgl. Anm. 2).

<sup>12)</sup> Ein Kongruenzsystem soll verträglich heißen, wenn je endlich viele Kongruenzen eine gemeinsame Lösung haben.

<sup>13)</sup> Vgl. die analoge Definition der idealen Gruppen in P 2, S. 223 ff.

<sup>14)</sup> Die so definierten abgeschlossenen Gruppen  $\mathfrak{G}$  haben die Eigenschaft, daß sie in jedem umfassenden Gruppenraum  $\mathfrak{H}$  relativ abgeschlossen sind, dessen Umgebungen mit  $\mathfrak{G}$  entweder eine Umgebung von  $\mathfrak{G}$  zum Durchschnitt haben oder die Nullmenge, und der so beschaffen ist, daß jede Umgebung von  $\mathfrak{G}$  Durchschnitt einer Umgebung von  $\mathfrak{H}$  mit  $\mathfrak{G}$  ist.

<sup>14a)</sup> Die Verschärfung ist jedoch nur eine scheinbare.

so konstruiere man nach Satz 5 § 1 eine größte  $(\alpha - \beta)$  nicht enthaltende Untergruppe  $\mathfrak{H}_1$  von  $\mathfrak{G}$ .  $(\alpha + \mathfrak{H}_1) \cap (\gamma + \mathfrak{H}_1)$ ,  $(\beta + \mathfrak{H}_1) \cap (\gamma + \mathfrak{H}_1)$  sind punktfremd und nach Satz 2, § 1 Umgebungen, die zudem in  $(\gamma + \mathfrak{H}_1)$  liegen.

Zu 2. ist zu bemerken, daß ein verträgliches Kongruenzensystem nach allen großen Umgebungsuntergruppen sicher höchstens eine Lösung hat, weil nach 1. das Trennungssaxiom gilt.

Bei unseren Untersuchungen spielen nur gewisse Untergruppen einer abgeschlossenen Gruppe eine Rolle. Diese „abgeschlossenen“ Untergruppen müssen folgendem Postulat genügen:

3. Jede abgeschlossene Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  ist im topologischen Sinne relativ  $\mathfrak{G}$  abgeschlossen.

Satz 1. Jede relativ zur abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  abgeschlossene Untergruppe  $\mathfrak{F}$  ist eine abgeschlossene Gruppe, d. h. genügt den Postulaten 1 und 2.

Unter dem Umgebungssystem einer abgeschlossenen Untergruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{G}$  sind die Untergruppen  $\mathfrak{F}_\alpha$  von  $\mathfrak{F}$  mit ihren Restklassen zu verstehen, die Durchschnitt großer Umgebungsuntergruppen  $\mathfrak{G}_\alpha$  von  $\mathfrak{G}$  mit  $\mathfrak{F}$  sind. Die  $\mathfrak{F}_\alpha$  sind große Untergruppen in  $\mathfrak{F}$  (vgl. Satz 3 § 1), die mit ihren Restklassen in  $\mathfrak{F}$  die Umgebungsaxiome erfüllen.

Ein verträgliches Kongruenzensystem nach allen  $\mathfrak{F}_\alpha$  bestimmt eindeutig ein verträgliches Kongruenzensystem nach allen  $\mathfrak{G}_\alpha$ , das daher in  $\mathfrak{G}$  eine Lösung  $\delta$  hat. Dieser Punkt  $\delta$  ist aber ein  $\text{Hp}^{15)}$  von  $\mathfrak{F}$  in  $\mathfrak{G}$ , denn in jeder seiner Umgebungen kommt mindestens ein Element von  $\mathfrak{F}$  vor. Also gehört  $\delta$  schon zu  $\mathfrak{F}$  und jedes verträgliche Kongruenzensystem nach großen Umgebungsuntergruppen von  $\mathfrak{F}$  hat in  $\mathfrak{F}$  eine Lösung.

Man sieht sofort, daß mit  $\mathfrak{F}$  auch jede Restklasse von  $\mathfrak{F}$  zugleich abgeschlossen oder nicht abgeschlossen ist. Deshalb ist im folgenden bei Abgeschlossenheit immer nur von Gruppen die Rede.

Satz 2. Jede Umgebung ist in  $\mathfrak{G}$  abgeschlossen.

Jede Umgebung  $\mathfrak{U}$  ist offen. Ebenso die Restklassen  $(\alpha + \mathfrak{U})$  [ $\alpha \equiv \omega(\mathfrak{U})$ ] und deren Vereinigungsmenge  $\mathfrak{B}$ . Also ist  $\mathfrak{U}$  Komplement der offenen Menge  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{G}$ , und daher relativ  $\mathfrak{G}$  abgeschlossen, also nach Satz 2 abgeschlossen<sup>16)</sup>.

Satz 3. Jede Obergruppe einer Umgebung  $\mathfrak{U}$  und jede ihrer Restklassen  $\mathfrak{B}$  ist abgeschlossen.

<sup>15)</sup>  $\text{Hp}$  bedeute einen  $\alpha$ -Punkt im Hausdorffschen Sinne, d. h. einen Punkt, in dessen jeder Umgebung mindestens ein Punkt der zugehörigen Menge liegt. Mengenlehre 2. Aufl. S. 112.

<sup>16)</sup> Dieser elegante Beweis stammt von B., S. 210.

$\mathfrak{U}$  ist offen, ebenso seine in  $\mathfrak{B}$  enthaltenen Restklassen. Also ist  $\mathfrak{B}$  offen und nach dem Schluß im Beweise von Satz 2 auch abgeschlossen.

Wir können und wollen daher unser bisheriges Umgebungssystem erweitern durch alle Restklassen nach Obergruppen unserer bisherigen Umgebungen. Das neue System ist mit dem alten äquivalent im Hausdorffschen Sinne, denn jede Umgebung des neuen Systems enthält eine Umgebung des alten Systems und umgekehrt.

Die Wichtigkeit gerade der *großen* abgeschlossenen Untergruppen ergibt sich einerseits aus der Übersichtlichkeit ihrer Quotientengruppen, andererseits aus folgendem Satz:

**Satz 4.** *Jede abgeschlossene Untergruppe  $\mathfrak{F}$  einer abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist Durchschnitt großer Umgebungsuntergruppen.*

Durchlaufe  $\mathfrak{G}_\sigma$  alle (abgeschlossenen) Umgebungsuntergruppen von  $\mathfrak{G}$  und bedende  $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{G}_\sigma + \mathfrak{F}$ . Alle  $\mathfrak{H}_\sigma$  sind nach Satz 3 auch Umgebungsgruppen von  $\mathfrak{G}$ .  $\beta$  sei ein Element, das in allen  $\mathfrak{H}_\sigma$  vorkomme. Es genüge dem verträglichen Kongruenzsysteme in  $\mathfrak{G}$

$$\beta = \beta_\sigma (\mathfrak{G}_\sigma)$$

und damit auch dem verträglichen Kongruenzsystem in  $\mathfrak{G}$

$$\beta = \beta_\sigma (\mathfrak{H}_\sigma).$$

Da  $\beta$  Element von  $\mathfrak{H}_\sigma$  für jedes  $\sigma$ , so muß auch  $\beta_\sigma$  Element von  $\mathfrak{H}_\sigma$  sein. Also ist  $\beta_\sigma = \varphi_\sigma + \chi_\sigma$ , wo  $\varphi_\sigma$  aus  $\mathfrak{F}$ ,  $\chi_\sigma$  aus  $\mathfrak{G}_\sigma$ .  $\beta$  genügt also dem verträglichen Kongruenzsystem in  $\mathfrak{G}$

$$\beta = \varphi_\sigma (\mathfrak{G}_\sigma).$$

Es gibt also in jeder Umgebung von  $\beta$  ein Element von  $\mathfrak{F}$ . Dann ist  $\beta$  aber Hp von  $\mathfrak{F}$  und damit Element von  $\mathfrak{F}$ . Die  $\mathfrak{H}_\sigma$  haben also genau  $\mathfrak{F}$  zum Durchschnitt.

Aus dem Beweise von Satz 4 folgt sofort

**Satz 5.** *Die Gruppe  $\mathfrak{F}$  sei eine abgeschlossene Untergruppe der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$ . Dann ist die Gruppe  $\mathfrak{G}|\mathfrak{F}$  abgeschlossen hinsichtlich des Umgebungssystems aus allen  $\mathfrak{H}_\sigma|\mathfrak{F}$  und ihren Restklassen, wo  $\mathfrak{H}_\sigma$  alle Umgebungsgruppen von  $\mathfrak{G}$  durchlaufe, die Obergruppen von  $\mathfrak{F}$  sind.*

**Satz 6.** *Die Summe endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Gruppen ist abgeschlossen.*

Für den Durchschnitt behauptet der Satz eine bekannte topologische Tatsache. Sind  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  abgeschlossene Gruppen, so sind es auch  $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$  und nach Satz 5  $\mathfrak{G}_1|\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$ . Wegen  $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2)|\mathfrak{G}_2 \leftrightarrow \mathfrak{G}_1|\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$  ist  $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2)|\mathfrak{G}_2$  abgeschlossen hinsichtlich der Umgebungen, die Umgebungen

von  $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$  sind und  $\mathfrak{G}_2$  enthalten. Da jeder Hp von  $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2)$ , der nicht Hp von  $\mathfrak{G}_2$  ist, also nicht zu  $\mathfrak{G}_2$  und damit zu  $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2)$  gehört, einen Hp von  $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2) | \mathfrak{G}_2$  repräsentiert, ist  $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2)$  abgeschlossen.

Unser Umgebungssystem  $\mathfrak{S}$  enthält alle bezüglich  $\mathfrak{S}$  abgeschlossenen großen Untergruppen von  $\mathfrak{G}$ . Denn diese sind nach Satz 4 Durchschnitt großer Umgebungsuntergruppen von  $\mathfrak{S}$ . Sie sind sogar schon Durchschnitt endlich vieler, weil sie große Untergruppen sind, und daher nach Umgebungsaxiom C' schon in  $\mathfrak{S}$ . Unser Umgebungssystem ist also in gewissem Sinne maximal.

Mit Hilfe dieser Sätze können wir nun die fundamentale Eigenschaft einer abgeschlossenen Gruppe und ihrer abgeschlossenen Untergruppen herleiten, von der im folgenden immer wieder Gebrauch gemacht wird.

**Satz 7.** *Jedes verträgliche Kongruenzensystem nach abgeschlossenen Untergruppen einer abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  hat in  $\mathfrak{G}$  mindestens eine Lösung.*

Denn man kann aus diesem System nach Satz 4 ein verträgliches Kongruenzensystem nach Umgebungsuntergruppen von  $\mathfrak{G}$  ableiten, das nach Postulat 2 mindestens eine Lösung in  $\mathfrak{G}$  hat.

Eine feinere Eigenschaft der verträglichen Kongruenzensysteme nach beliebigen abgeschlossenen Untergruppen zeigt uns folgender oft zu verwendender

**Hilfsatz 1.** *Durchlaufe  $\mathfrak{F}_\alpha$  ein System abgeschlossener Untergruppen der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$ , das die Eigenschaft hat, mit je endlich vielen Gruppen auch deren Durchschnitt zu enthalten. Und sei*

$$\xi = \alpha_\alpha (\mathfrak{F}_\alpha)$$

*ein verträgliches Kongruenzensystem nach allen  $\mathfrak{F}_\alpha$ , in dem die  $\alpha_\alpha$  aus einer abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{A}$  gewählt werden können, dann hat das Kongruenzensystem mindestens ein Element von  $\mathfrak{A}$  zur Lösung.*

Nach Satz 7 hat das Kongruenzensystem in  $\mathfrak{G}$  überhaupt eine Lösung. Sind

$$\xi = \alpha_{\sigma_1} (\mathfrak{F}_{\sigma_1})$$

$$\dots$$

$$\xi = \alpha_{\sigma_n} (\mathfrak{F}_{\sigma_n})$$

beliebige endlich viele Kongruenzen des Systems, so haben diese nach Voraussetzung eine Lösung. Eine solche ist, wenn  $\mathfrak{F}_{\sigma_n} = \mathfrak{F}_{\sigma_1} \cap \mathfrak{F}_{\sigma_2} \cap \dots \cap \mathfrak{F}_{\sigma_n}$  bedeutet, das Element  $\alpha_{\sigma_n}$  aus  $\mathfrak{A}$ , das auf der rechten Seite der Kongruenz

$$\xi = \alpha_{\sigma_n} (\mathfrak{F}_{\sigma_n})$$

des Systems steht. Es gilt dann

$$\alpha_{\sigma_n} - \alpha_{\sigma_i} \equiv \omega (\mathfrak{F}_{\sigma_i})$$

$$\alpha_{\sigma_n} - \alpha_{\sigma_i} \equiv \omega (\mathfrak{A})$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Also auch

$$\alpha_{r_n} - \alpha_{s_i} = \omega (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}_{s_i}).$$

Wir bezeichnen die abgeschlossenen Gruppen  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}_s$  mit  $\mathfrak{A}_s$ . Das Kongruenzensystem in  $\mathfrak{A}$

$$\xi = \alpha_s (\mathfrak{A}_s)$$

ist nach dem Vorhergehenden dann verträglich, denn  $\alpha_{r_n}$  ist eine gemeinsame Lösung von

$$\xi = \alpha_{s_1} (\mathfrak{A}_{s_1})$$

$$\xi = \alpha_{s_2} (\mathfrak{A}_{s_2})$$

$$\dots$$

$$\xi = \alpha_{s_n} (\mathfrak{A}_{s_n})$$

in  $\mathfrak{A}$ . Nach Satz 7 hat daher das Kongruenzensystem eine Lösung in  $\mathfrak{A}$ , die dann zugleich Lösung von

$$\xi = \alpha_s (\mathfrak{F}_s)$$

ist, w. z. b. w.

Wir wollen nun sehen, wie die kleinste abgeschlossene Untergruppe  $\{\alpha\}$ <sup>17)</sup> der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  aussieht, die das Element  $\alpha$  von  $\mathfrak{G}$  und seine ganzrationalen Vielfachen enthält. Dazu ist nur nötig, die Hp der Gruppe der ganzrationalen Vielfachen von  $\alpha$  in  $\mathfrak{G}$  zu suchen. Sei  $\beta$  ein solcher. Dann genügt er dem verträglichen Kongruenzensystem

$$(1) \quad \beta = n_s \cdot \alpha (\mathfrak{G}_s) \quad (n_s \text{ ganzrational}),$$

wo  $\mathfrak{G}_s$  die großen Umgebungsgruppen von  $\mathfrak{G}$  durchläuft. Da  $\mathfrak{G}_s$  große Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  ist, ist nach Satz 7, § 1 schon ein endliches Vielfaches von  $\alpha$  in  $\mathfrak{G}_s$  enthalten. Sei  $m_s \cdot \alpha$  das kleinste. Dann und nur dann ist

$$(2) \quad x = n_s (m_s)$$

verträglich ist. (2) definiert aber nach PZ eine oder mehrere  $g$ -adische Zahlen  $\tilde{g}$ .

Die Lösung  $\beta$  von (1) bezeichnen wir dann mit

$$\beta = \tilde{g} \cdot \alpha.$$

Damit sind für jedes  $\alpha$  aus  $\mathfrak{G}$  alle  $g$ -adischen Vielfachen auf „natürliche Weise“ definiert.  $\mathfrak{G}$  wird nun im folgenden als verallgemeinerte Abelsche Gruppe mit  $g$ -adischem Operatorenbereich aufgefaßt<sup>17a)</sup>.

<sup>17)</sup>  $\{\alpha\}$  werden wir auch als die durch das Element  $\alpha$  erzeugte Gruppe bezeichnen.

<sup>17a)</sup> Man sieht sofort, daß die so definierten  $g$ -adischen Operatoren einen Ring bilden und distributiv sind.

Wenn die  $m_g$  nicht gerade alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen, so sind die  $\tilde{g}$  i. a. nicht eindeutig bestimmt, sondern nur modulo der Gesamtheit aller  $g$ -adischen Zahlen, die dem Kongruenzsystem nach allen  $m_g$

$$(3) \quad y \equiv 0 (m_g)$$

genügen. Sie bilden ein Ideal  $\mathfrak{o}_g$ . Für jede Zahl aus dem Ideal  $\mathfrak{o}_g$  ist:

$$y \cdot \alpha = \omega.$$

Wir nennen das so definierte Ideal  $\mathfrak{o}_g$  die Ordnung von  $\alpha$  <sup>18)</sup>.

Die Ordnung von  $\alpha$  ist in jeder abgeschlossenen Ober- und Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  dieselbe, da die Operatoren dieselben sind. Elemente  $\alpha$ , die im üblichen Sinne eine endliche Ordnung ( $\mathfrak{o}_\alpha$ ) <sup>19)</sup> haben, haben sie auch nach vorstehender Definition, denn  $\alpha$  hat ( $\mathfrak{o}_\alpha$ ) schon in der abgeschlossenen Untergruppe  $\{\alpha\}$  zur Ordnung.

Satz 8. In der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist die durch  $\alpha$  „erzeugte“ Gruppe  $\{\alpha\}$ , die Gruppe aller  $g$ -adischen Vielfachen von  $\alpha$ , eine abgeschlossene Gruppe.

Satz 9. Ist  $\mathfrak{F}$  eine gewöhnliche Untergruppe der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$ , die relativ  $\mathfrak{G}$  abgeschlossen ist, so enthält sie mit jedem Element auch alle  $g$ -adischen Vielfachen.

Denn mit  $\alpha$  enthält  $\mathfrak{F}$  auch die kleinste abgeschlossene Gruppe, die  $\alpha$  enthält. Das ist aber  $\{\alpha\}$ , wie aus dem Beweis von Satz 8 zu sehen ist.

Hilfssatz 2. Jede verallgemeinerte Abelsche Gruppe  $\mathfrak{G}$  mit  $g$ -adischem Operatorenring, in der der Untergruppenkettensatz <sup>20)</sup> gilt, in der also  $\omega$  große Untergruppe ist, ist auf eine einzige Weise abgeschlossen.

Denn was für ein Umgebungssystem auch zugrunde gelegt wird,  $\omega$  ist als große Untergruppe Durchschnitt endlich vieler Umgebungsgruppen (Trennungsaxiom) und damit relativ  $\mathfrak{G}$  abgeschlossen. Nach Satz 3 § 2 ist damit jede Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  abgeschlossen relativ  $\mathfrak{G}$ . Da also bei ganz beliebiger Wahl des Umgebungssystems alle Untergruppen relativ  $\mathfrak{G}$  abgeschlossen sind, wählen wir eine absteigende Untergruppenkette mit ihren Restklassen als Umgebungssystem. Da diese nur endlich viele Gruppen enthält, ist jedes verträgliche Kongruenzsystem lösbar. Die Postulate 1 und 2 sind also erfüllt.

Hilfssatz 3. Ist  $\mathfrak{F}$  eine abgeschlossene Untergruppe der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$ , die das Element  $\delta$  aus  $\mathfrak{G}$  nicht enthält, so gibt es eine größte  $\mathfrak{F}$ , aber nicht  $\delta$  enthaltende abgeschlossene Untergruppe  $\tilde{\mathfrak{F}}$  von  $\mathfrak{G}$ .

<sup>18)</sup>  $\{\alpha\}$  ist also eine verallgemeinerte Abelsche Gruppe, deren Operatorenbereich isomorph ist zum Restklassenring des Ringes der ganzen  $g$ -adischen Zahlen nach  $\mathfrak{o}_\alpha$ .

<sup>19)</sup>  $(\mathfrak{o}_\alpha)$  bedeutet das durch die ganze rationale Zahl  $\mathfrak{o}_\alpha$  erzeugte Hauptideal.

<sup>20)</sup> Der Untergruppenkettensatz sagt aus, daß jede absteigende Kette endlich ist. Vgl. Def. § 1.



Sei  $\mathfrak{H} | \mathfrak{F}$  irgendeine abgeschlossene große Untergruppe von  $\mathfrak{G} | \mathfrak{F}$ , die das Element  $(\delta + \mathfrak{F})$  nicht enthält. Es gibt ein solches  $\mathfrak{H}$ , denn nach Satz 4 § 2 ist der Durchschnitt aller  $\mathfrak{H}$  gleich  $\mathfrak{F}$ , enthält also  $(\delta + \mathfrak{F})$  nicht.  $\mathfrak{H}$  ist abgeschlossene große Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ . Wir konstruieren nach Satz 5 § 1 eine größte  $\delta$  nicht enthaltende Obergruppe  $\overline{\mathfrak{H}}$  von  $\mathfrak{H}$ . Diese ist als Obergruppe einer Umgebung nach Satz 3 § 2 selbst abgeschlossen und daher die gesuchte Gruppe.

## § 3.

## Direkter Durchschnitt und direkte Summe.

Wir müssen nun zwei wichtige neue Begriffe einführen: Die direkte Summe und den direkten Durchschnitt abgeschlossener Gruppen.

Definition 1<sup>21)</sup>: (...  $\mathfrak{G}_i$  ...) <sup>22)</sup> sei eine Menge abgeschlossener Untergruppen der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$ . Ist jedes beliebige Kongruenzensystem nach allen  $\mathfrak{G}_i$  verträglich und ist  $\Delta \mathfrak{G}_i = \omega$  <sup>23)</sup>, ist also jedes Kongruenzensystem nach allen  $\mathfrak{G}_i$  in  $\mathfrak{G}$  lösbar, so soll  $\mathfrak{G}$  der direkte Durchschnitt aller  $\mathfrak{G}_i | \mathfrak{G}$  heißen <sup>24)</sup>:

$$(1) \quad \Delta \mathfrak{G}_i = \omega.$$

Wir führen nun neue Gruppen  $\mathfrak{F}_\sigma$  ein durch

$$(2) \quad \Delta_{\sigma} \mathfrak{G}_i = \mathfrak{F}_\sigma.$$

Wegen (1) gilt dann

$$(3) \quad \mathfrak{F}_\sigma \cap \mathfrak{G}_\sigma = \omega.$$

Es ist aber auch:

$$(4) \quad \mathfrak{F}_\sigma + \mathfrak{G}_\sigma = \mathfrak{G}.$$

Denn genügt das Element  $\delta$  von  $\mathfrak{G}$  dem Kongruenzensystem:

$$\delta \equiv \delta_r (\mathfrak{G}_r) \quad [\dots r \dots], \quad ^{25)}$$

so ist dieses die Summe der gleichfalls verträglichen Kongruenzensysteme

$$\xi \equiv \omega (\mathfrak{G}_r) \quad [r + \sigma]; \quad \xi \equiv \delta_\sigma (\mathfrak{G}_\sigma)$$

und

$$\xi \equiv \delta_r (\mathfrak{G}_r) \quad [r + \sigma]; \quad \xi \equiv \omega (\mathfrak{G}_\sigma),$$

deren Lösungen  $\varphi_\sigma$  bzw.  $\gamma_\sigma$  Elemente von  $\mathfrak{F}_\sigma$  bzw.  $\mathfrak{G}_\sigma$  sind, und

$$\delta = \varphi_\sigma + \gamma_\sigma,$$

womit (4) bewiesen ist.

<sup>21)</sup> Vgl. P 2, S. 232.

<sup>22)</sup>  $r$  durchläuft eine beliebige Indexmenge.

<sup>23)</sup>  $\Delta \mathfrak{G}_i$  bedeutet Durchschnitt aller  $\mathfrak{G}_i$ .

<sup>24)</sup> Vgl. Anm. 2).

<sup>25)</sup> [...  $r$  ...] bedeutet irgendeine Indexmenge.

$\mathfrak{F}_\sigma$  ist als Durchschnitt abgeschlossener Gruppen selbst abgeschlossen. Jede Restklasse nach  $\mathfrak{G}_\sigma$  hat einen und nur einen Repräsentanten in  $\mathfrak{F}_\sigma$ . Irgendein Element  $\alpha$  von  $\mathfrak{G}$  genüge dem Kongruenzensystem

$$(5) \quad \xi \equiv \alpha_i \pmod{\mathfrak{G}_i} \quad [\dots \tau \dots],$$

wobei die  $\alpha_i$  aus den  $\mathfrak{F}_i$  gewählt sein mögen. Dann wollen wir  $\alpha$  auch bezeichnen als die unendliche Summe

$$(6) \quad \alpha = \sum_i \alpha_i.$$

**Definition 2.** In der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  soll die unendliche Summe

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i + \dots$$

existieren, wenn es eine direkte Durchschnittszerlegung von  $\mathfrak{G}$  in

$$(\dots, \mathfrak{G} | \mathfrak{G}_i, \dots)$$

gibt, so daß  $\alpha_i$  Element von  $\mathfrak{F}_i$ , wobei die  $\mathfrak{F}_i$  dieselbe Bedeutung wie oben haben. Es ist dann  $\alpha$  eindeutig bestimmt durch

$$\alpha \equiv \alpha_i \pmod{\mathfrak{G}_i}.$$

Es ist also die abgeschlossene Gruppe  $\mathfrak{G}$  isomorph zur Gruppe der unendlichen Summen aus je einem Element von Gruppen  $\mathfrak{F}_i$ , die durch eine direkte Durchschnittszerlegung von  $\mathfrak{G}$  bestimmt sind.

Unter  $\sum_\sigma \mathfrak{A}_\sigma$  soll im folgenden die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsgruppe der Gruppen

$$(\dots \mathfrak{A}_\sigma, \dots) [\dots \sigma \dots]$$

verstanden werden. Wir nennen  $\sum_\sigma \mathfrak{A}_\sigma$  kurz Summe aller  $\mathfrak{A}_\sigma$ .

**Definition 3.** Sind  $(\dots \mathfrak{A}_\sigma, \dots) [\dots \sigma \dots]$  abgeschlossene Untergruppen der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  und ist  $\mathfrak{G} = \sum_\sigma \mathfrak{A}_\sigma$ , ist weiter  $\mathfrak{A}_\sigma \cap \sum_{\sigma \neq \tau} \mathfrak{A}_\tau = \omega$ , so soll  $\mathfrak{G}$  die direkte Summe der  $\mathfrak{A}_\sigma$  heißen.

Zur Bezeichnung der direkten Summe schreiben wir  $\sum'$  statt  $\sum$  und  $\oplus$  statt  $+$ .

$$\mathfrak{G} = \sum'_\sigma \mathfrak{A}_\sigma.$$

Wir beweisen nun die folgenden Äquivalenzsätze für direkte Summe und direkten Durchschnitt.

**Äquivalenzsatz 1.** Ist  $\mathfrak{G}$  die direkte Summe der Untergruppen

$$(\dots \mathfrak{F}_\sigma, \dots),$$

$$\mathfrak{G} = \sum'_\sigma \mathfrak{F}_\sigma$$

und bedeutet  $\mathfrak{G}_\pi$  die Gruppe

$$\mathfrak{G}_\pi = \sum'_{\sigma \neq \pi} \mathfrak{F}_\sigma,$$

so ist  $\mathfrak{G}$  der direkte Durchschnitt aller  $\mathfrak{G} | \mathfrak{G}_\pi$ .

Nach der Definition der direkten Summe ist immer

$$(20) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\pi \oplus \mathfrak{F}_\pi.$$

Jede Restklasse von  $\mathfrak{G}_\pi$  in  $\mathfrak{G}$  ist durch ein einziges Element von  $\mathfrak{F}_\pi$  repräsentierbar.

Je endlich viele Kongruenzen

$$(21) \quad \begin{array}{l} \xi \equiv \alpha_{\pi_1} (\mathfrak{G}_{\pi_1}) \\ \vdots \\ \xi \equiv \alpha_{\pi_n} (\mathfrak{G}_{\pi_n}) \end{array} \quad (\alpha_{\pi_i} \text{ aus } \mathfrak{F}_{\pi_i})$$

haben die gemeinsame Lösung  $\alpha_{\pi_1} \oplus \alpha_{\pi_2} \oplus \dots \oplus \alpha_{\pi_n}$ . Jedes Kongruenzensystem nach allen  $\mathfrak{G}_\pi$  ist also verträglich und damit lösbar. Jedes Kongruenzensystem nach allen  $\mathfrak{G}_\pi$  ist sogar eindeutig lösbar, denn:

$$(22) \quad \Delta \mathfrak{G}_\pi = \Delta_\pi \left( \sum_{\sigma \neq \pi} \mathfrak{F}_\sigma \right) = \omega,$$

w. z. b. w.

Äquivalenzsatz 2. Ist die abgeschlossene Gruppe  $\mathfrak{G}$  direkter Durchschnitt der Gruppen

$$(\dots \mathfrak{G} | \mathfrak{G}_\sigma, \dots)$$

und bedeutet

$$\mathfrak{F}_\tau = \Delta_{\sigma \neq \tau} \mathfrak{G}_\sigma,$$

so ist  $\mathfrak{G}$  die direkte Summe aller  $\mathfrak{F}_\sigma$ :

$$\mathfrak{G} = \sum_{\sigma} \mathfrak{F}_\sigma.$$

a) Die  $\mathfrak{F}_\sigma$  bilden eine direkte Summe. Denn nach Voraussetzung ist  $\mathfrak{F}_\sigma \cap \mathfrak{G}_\sigma = \Delta \mathfrak{G}_\sigma = \omega$ .  $\mathfrak{G}_\sigma$  enthält aber die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsgruppe aller  $\mathfrak{F}_\tau [\tau \neq \sigma]$ .

b) Jedes Element  $\gamma$  von  $\mathfrak{G}$  ist einzige Lösung eines verträglichen Kongruenzensystems nach allen  $\mathfrak{G}_\sigma$ . Da  $\mathfrak{G}_\sigma \oplus \mathfrak{F}_\sigma = \mathfrak{G}$ , kann man für die rechten Seiten der Kongruenzen Elemente aus  $\sum_{\sigma} \mathfrak{F}_\sigma$  wählen. Nach Hilfsatz 1 § 2 ist dann aber dies Element  $\gamma$  Element von  $\sum_{\sigma} \mathfrak{F}_\sigma$ . Also  $\mathfrak{G} = \sum_{\sigma} \mathfrak{F}_\sigma$ .  
w. z. b. w.

Direkte Summe und direkter Durchschnitt sind also vollkommen äquivalent. Daraus folgt der

Satz 3. Die unendliche Summe von Gruppenelementen

$$\alpha = \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma}$$

existiert dann und nur dann, wenn es eine direkte Summenzerlegung von  $\mathfrak{G}$  gibt, so daß  $\mathfrak{G} = \sum_{\sigma} \mathfrak{F}_\sigma$  und  $\alpha_{\sigma}$  aus  $\mathfrak{F}_\sigma$ .

Über die Möglichkeit, von einer Gruppe nacheinander direkte Summanden abzuspalten, gibt uns der folgende Konstruktionssatz Auskunft, der für das ganze Folgende von grundlegender Wichtigkeit ist, da er zur Konstruktion einer Zerlegung der Gruppe benutzt werden muß.

**Konstruktionssatz.** Sind  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_\sigma, \dots; \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_\sigma, \dots$  [ $\sigma \leq \varrho$ ] wohlgeordnete Mengen abgeschlossener Untergruppen der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  und ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} &= \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{F}_1 \\ \mathfrak{G}_1 &= \mathfrak{G}_2 \oplus \mathfrak{F}_2 \\ &\vdots \\ \mathfrak{G}_{\tau-1} &= \mathfrak{G}_\tau \oplus \mathfrak{F}_\tau \quad (\text{wenn } \tau = \text{Limeszahl}), \\ \mathfrak{G}_\tau &= \bigwedge_{\sigma < \tau} \mathfrak{G}_\sigma; \quad \mathfrak{F}_\tau = \omega \quad (\text{wenn } \tau = \text{Limeszahl}),\end{aligned}$$

so haben wir die Zerlegung

$$\mathfrak{G} = \sum_{\sigma \leq \varrho} \mathfrak{F}_\sigma \oplus \bigwedge_{\sigma \leq \varrho} \mathfrak{G}_\sigma = \sum_{\sigma \leq \varrho} \mathfrak{F}_\sigma \oplus \mathfrak{G}_\varrho.$$

Den Beweis führen wir durch transfinite Induktion. Der Satz ist richtig für  $\varrho = 1$ . Wir nehmen an, er gelte für  $\varrho < \mu$ .

1.  $\mu$  ist keine Limeszahl. Dann ist

$$(7) \quad \mathfrak{G} = \sum_{\sigma \leq \mu-1} \mathfrak{F}_\sigma \oplus \mathfrak{G}_{\mu-1} = \sum_{\sigma \leq \mu-1} \mathfrak{F}_\sigma \oplus \mathfrak{F}_\mu \oplus \mathfrak{G}_\mu = \sum_{\sigma \leq \mu} \mathfrak{F}_\sigma \oplus \mathfrak{G}_\mu.$$

2.  $\mu$  ist Limeszahl. Zur Abkürzung führen wir die Gruppen

$$(8) \quad \mathfrak{G}_\alpha^\beta = \sum_{\alpha \leq \sigma \leq \beta} \mathfrak{F}_\sigma \quad [\alpha \leq \beta \leq \mu]$$

ein. Unser Satz stellt sich dann so dar:

$$(9) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1^\mu \oplus \mathfrak{G}_\mu.$$

a) Wir beweisen zunächst:  $\mathfrak{G}_1^\pi = \sum_{\sigma \leq \pi} \mathfrak{F}_\sigma$  [ $\pi \leq \mu$ ] ist eine direkte Summe und damit a fortiori  $\mathfrak{G}_1^\pi$  [ $\lambda \leq \pi$ ]. Für  $\pi < \mu$  kann die Behauptung schon als bewiesen gelten:  $\mathfrak{G}_1^\pi = \sum_{\sigma \leq \pi} \mathfrak{F}_\sigma$ . Dann ist

$$(10) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1^{\pi-1} \oplus \mathfrak{F}_\pi \oplus \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{F}_\pi \oplus (\mathfrak{G}_1^{\pi-1} \oplus \mathfrak{G}_\pi),$$

also

$$(11) \quad \mathfrak{F}_\pi \cap (\mathfrak{G}_1^{\pi-1} \oplus \mathfrak{G}_\pi) = \omega \quad [\pi < \mu].$$

Nun enthält  $(\mathfrak{G}_1^{\pi-1} \oplus \mathfrak{G}_\pi)$  die Gruppe  $\sum_{\sigma \neq \pi}^{\sigma \leq \mu} \mathfrak{F}_\sigma$ , woraus für jedes  $\mathfrak{F}_\pi$  folgt:

$$(12) \quad \mathfrak{F}_\pi \cap \sum_{\sigma \neq \pi}^{\sigma \leq \mu} \mathfrak{F}_\sigma = \omega.$$

$\mathfrak{G}_1^\mu$  ist also direkte Summe und wir haben die Formeln

$$(13) \quad \mathfrak{G}_1^\mu = \sum_{\sigma \leq \mu} \mathfrak{F}_\sigma; \quad \mathfrak{G}_\alpha^\beta = \mathfrak{G}_\alpha^\gamma \oplus \mathfrak{G}_{\gamma+1}^\beta \quad [\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \mu].$$

## b) Jedes verträgliche Kongruenzensystem

$$(14) \quad \xi \equiv \alpha_\pi (\mathfrak{G}_\pi) \quad [\pi < \mu]$$

ist eindeutig lösbar mod  $\mathfrak{G}_\mu$ , denn  $\bigtriangleup_{\pi < \mu} \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{G}_\mu$ . Die  $\alpha_\pi$  können, da die Richtigkeit des Satzes 1 für  $\pi < \mu$  vorausgesetzt wird, aus den  $\mathfrak{S}_1^\pi$  gewählt werden, d. h. jedes  $\alpha_\pi$  ist aus  $\mathfrak{S}_1^\mu$ . Setzt man an Stelle der  $\mathfrak{F}_\sigma$  die  $\mathfrak{G}_\pi$ , an Stelle von  $\mathfrak{A}$  aber  $\mathfrak{S}_1^\mu$  in unseren Hilfssatz 1 von § 2 ein, so sieht man, daß alle Elemente von  $\mathfrak{G} \mid \bigtriangleup_{\pi < \mu} \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{G} \mid \mathfrak{G}_\mu$  durch Elemente von  $\mathfrak{S}_1^\mu$  repräsentiert werden können:

$$(15) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{S}_1^\mu + \mathfrak{G}_\mu.$$

c)  $\mathfrak{S}_1^\mu + \mathfrak{G}_\mu$  ist sogar eine direkte Summe

$$(16) = (9) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{S}_1^\mu \oplus \mathfrak{G}_\mu.$$

Um das zu beweisen, zeigen wir zunächst

$$(17) \quad \mathfrak{S}_1^\mu \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu \quad [\pi < \mu].$$

Denn es ist ja nach a):  $\mathfrak{S}_1^\mu = \mathfrak{S}_1^\pi \oplus \mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu$ . Für jedes Element  $\delta$  von  $\mathfrak{S}_1^\mu$  gibt es daher eine Zerlegung:  $\delta = \delta_\pi \oplus \delta_{\pi+1}$ , wo  $\delta_\pi, \delta_{\pi+1}$  Elemente von  $\mathfrak{S}_1^\pi, \mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu$  sind. Soll  $\delta$  zugleich zu  $\mathfrak{G}_\pi$  gehören, so muß  $\delta - \delta_{\pi+1} = \delta_\pi$  zu  $\mathfrak{G}_\pi$  gehören, denn  $\delta_{\pi+1}$  ist Element der Untergruppe  $\mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu$  von  $\mathfrak{G}_\pi$ . Dann ist aber  $\delta_\pi = \omega$ , da  $\mathfrak{G}_\pi \cap \mathfrak{S}_1^\pi = \omega$  nach Voraussetzung für  $\pi < \mu$ . Also ist  $\delta = \delta_{\pi+1}$  schon in  $\mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu$ .

$$(18) \quad \mathfrak{S}_1^\mu \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu.$$

Also ist

$$(19) \quad \mathfrak{S}_1^\mu \cap \mathfrak{G}_\mu = \mathfrak{S}_1^\mu \cap \bigtriangleup_{\pi < \mu} \mathfrak{G}_\pi = \bigtriangleup_{\pi < \mu} (\mathfrak{S}_1^\mu \cap \mathfrak{G}_\pi) = \bigtriangleup_{\pi < \mu} \left( \sum_{\pi+1 \leq \sigma \leq \mu} \mathfrak{F}_\sigma \right) = \omega,$$

w. z. b. w.

## § 4.

Zerlegung in primäre Summanden<sup>26)</sup>.

Aus der Definition der unendlichen Summe ergibt sich, wenn  $\alpha = \sum_{\sigma} \alpha_\sigma$  und  $\tilde{g} \cdot \alpha = \omega$  ist, daß  $\tilde{g} \cdot \alpha_\sigma = \omega$  ist für alle  $\sigma$ . Ist umgekehrt  $\tilde{g} \cdot \alpha_\sigma = \omega$  für alle  $\sigma$ , so ist  $\tilde{g} \cdot \alpha = \omega$ . Daraus folgt

**Satz 1.** *Das Ordnungsideal einer unendlichen direkten Summe ist der Durchschnitt der Ordnungsideale der Summanden.*

Die Ordnung einer direkten Summe ist also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Ordnungen der Summanden.

<sup>26)</sup> Die analoge direkte Durchschnittszерlegung wird schon in P2, S. 232 bewiesen.

Wir wollen die Ordnung eines Elementes primär zu  $p$  gehörig nennen, wenn seine Ordnung ein Primärideal mit der Basis  $p^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) oder  $p^\infty$  ist. Eine Quotientengruppe soll primär heißen, wenn sie es als Gruppe betrachtet ist, d. h. wenn jede ihrer Restklassen primäre zu  $p$  gehörige Ordnung hat.

**Hauptsatz 1.** *Eine abgeschlossene Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist auf eine einzige Weise so als direkte Summe von primären Gruppen  $\mathfrak{F}_p$  darstellbar, daß zu jeder Primzahl höchstens eine gehört.*

Wir setzen  $\mathfrak{F}_p$  gleich der Gruppe der  $\bar{e}_p$ -fachen von  $\mathfrak{G}$ , wo  $\bar{e}_p$  die zu  $p$  gehörige Haupteinheit<sup>27)</sup> ist.

1.  $\mathfrak{F}_p$  ist primär zu  $p$  gehörig. Denn ist  $(\bar{o})^{28)}$  die Ordnung eines Elementes  $\alpha = \bar{e}_p \cdot \beta$  von  $\mathfrak{F}_p$ ,  $\bar{o}_p$  die  $p$ -Komponente von  $\bar{o}$ , so ist  $(\bar{o}_p)$  Teiler von  $(\bar{o})$ . Da aber schon  $\bar{o}_p \cdot \alpha = \bar{o}_p \cdot \bar{e}_p \cdot \alpha = \bar{o} \cdot \alpha = \omega$  ist, so ist auch  $(\bar{o})$  Teiler von  $(\bar{o}_p)$ :  $(\bar{o}) = (\bar{o}_p)$ .

2.  $\mathfrak{F}_p$  ist abgeschlossen. Denn genügt der Hp  $\beta$  von  $\mathfrak{F}_p$  dem verträglichen Kongruenzensystem

$$\beta \equiv \beta_\sigma \pmod{(\mathfrak{G}_\sigma)} [\dots \sigma \dots],$$

wo  $\mathfrak{G}_\sigma$  alle Umgebungsgruppen von  $\mathfrak{G}$  durchläuft, so kann man die  $\beta_\sigma$  aus  $\mathfrak{F}_p$  wählen. Die Ordnung von  $(\beta_\sigma + \mathfrak{G}_\sigma)$  in  $\mathfrak{G}|\mathfrak{G}_\sigma$  ist ein Teiler der Ordnung von  $\beta_\sigma$ , also primär zu  $p$  gehörig und zudem endlich. Es ist daher

$$p^{k_\sigma} \beta = \omega \pmod{(\mathfrak{G}_\sigma)} \quad (\text{für alle } \sigma),$$

d. h. die Ordnung von  $\beta$  ist selbst primär.

3. gehören alle Elemente  $\beta$  von  $\mathfrak{G}$  mit zu  $p$  gehöriger Ordnung selbst zu  $\mathfrak{F}_p$ . Denn es ist  $\bar{e}_p \cdot \beta = \beta$ ;  $(1 - \bar{e}_p) \cdot \beta = \omega$ . Da nämlich  $(1 - \bar{e}_p)$  alle Komponenten 1, nur die  $p$ -Komponente 0 hat, ist  $(1 - \bar{e}_p)$  in jedem zu  $p$  gehörigen Primärideal enthalten, also Vielfaches der Ordnung von  $\beta$ .

4.  $\sum_p \mathfrak{F}_p = \mathfrak{G}$ . Denn nach PZ ist  $1 \cdot \alpha = \bar{e}_{p_1} \cdot \alpha \oplus \bar{e}_{p_2} \cdot \alpha \oplus \dots$ . Daß die Summe direkt ist, ist klar.

Die Darstellung ist eindeutig, weil  $\mathfrak{F}_p$  als Gruppe aller Elemente mit zu  $p$  gehöriger primärer Ordnung eindeutig bestimmt ist. Damit ist der Hauptsatz 1 bewiesen.

Vermöge des Äquivalenzsatzes 1 § 3 folgt:

**Hauptsatz 1a.**  *$\mathfrak{G}$  ist auf eine einzige Art als direkter Durchschnitt primärer Quotientengruppen  $\mathfrak{G}|\mathfrak{G}_p$  darstellbar, von denen zu jeder Primzahl höchstens eine gehört.*

<sup>27)</sup> Vgl. PZ. Es ist  $\bar{e}_p \cdot \bar{e}_p = \bar{e}_p$ ,  $\bar{e}_p \cdot \bar{e}_q = 0$  ( $p \neq q$ ).

<sup>28)</sup> Die Ordnung von  $\alpha$  ist ein durch  $\bar{o}$  erzeugtes Hauptideal  $(\bar{o}) = \mathfrak{o}_\alpha$  im Ring der ganzen  $g$ -adischen Zahlen, wenn man von dessen Idealen verlangt, daß sie auch alle existierenden unendlichen Summen ihrer Elemente enthalten. Denn alle solchen Ideale sind, wie man leicht zeigen kann, immer Hauptideale.

Für jedes Element  $\alpha$  einer zu  $p$  gehörigen primären Gruppe ist  $\tilde{e}_p \cdot \alpha = \alpha$ . Ist  $r$  die kleinste der Zahlen  $1, 2, \dots, \infty$ , für die für *alle* Elemente  $\alpha$  einer solchen Gruppe  $p^r \cdot e_p \cdot \alpha = \alpha$  gilt, so ist der Operatorenbereich einer solchen Gruppe isomorph zum Ring der ganzen  $p$ -adischen Zahlen (für  $r = \infty$ ) oder zum Restklassenring nach  $p^r$  (für  $r \neq \infty$ ).

## § 5.

## Definitionen und Gruppentypen.

Im folgenden betrachten wir der Einfachheit halber nur primäre zu  $p$  gehörige Gruppen, deren Operatorenbereich, da sie Untergruppen der Gruppen  $\mathfrak{F}_p$  aus dem § 4 sind, sich auf die ganzen  $p$ -adischen Zahlen reduziert.

Definition 1<sup>29)</sup>. Ist  $\alpha$  ein Element der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  und  $k$  der höchste Exponent, für den die Gleichung  $p^k \cdot \xi = \alpha$  in  $\mathfrak{G}$  lösbar ist, so soll  $p^k$  die Höhe von  $\alpha$  in  $\mathfrak{G}$  heißen. Ist die Gleichung für jedes ganze  $k$  lösbar, so soll  $p^\infty$  die Höhe von  $\alpha$  in  $\mathfrak{G}$  heißen.

Die Höhe der Summe zweier Elemente ist ein Vielfaches des größten gemeinschaftlichen Teilers der Höhen dieser Elemente. Die Höhe einer direkten (auch unendlichen) Summe<sup>30)</sup> von Gruppenelementen ist genau der größte gemeinschaftliche Teiler der Höhen der Summanden.

Definition 2<sup>31)</sup>. Eine abgeschlossene Untergruppe  $\mathfrak{F}$  der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$ , in der jedes Element dieselbe Höhe hat wie in  $\mathfrak{G}$ , soll eine Servanzuntergruppe heißen.

Satz 1<sup>32)</sup>. Jeder direkte Summand  $\mathfrak{F}$  einer abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist eine Servanzuntergruppe von  $\mathfrak{G}$ .

Satz 1 läßt sich aber nicht umkehren. Der Begriff der Servanzgruppe ist weiter als der des direkten Summanden.

An die Stelle der zyklischen Gruppen bei den endlichen Abelschen Gruppen treten hier die Gruppen vom Range 1:

Definition 3<sup>33)</sup>. Eine Gruppe heißt vom Range 1, wenn von je zwei Elementen eines  $g$ -adischen Vielfaches des anderen ist.

Da wir auch hier, wie im folgenden immer, nur primäre zu  $p$  gehörige Gruppen betrachten wollen, so ist schon ein Element von zweien  $p$ -adisches Vielfaches des anderen.

<sup>29)</sup> Vgl. P 1, S. 177.

<sup>30)</sup> Die unendlichen Summen müssen natürlich einen Sinn haben.



Man sieht leicht ein: In einer primären Gruppe des Ranges 1 haben alle Elemente entweder zugleich endliche Ordnung oder die Ordnung  $p^\infty$ .

In einer Gruppe des Ranges 1 haben alle Elemente endliche Höhe oder die Höhe  $p^\infty$ . Gibt es nämlich in der Gruppe ein Element  $\alpha$  der Höhe  $p^\infty$  und ein Element  $\beta$  der Höhe 1, so muß  $\alpha$  ein Vielfaches von  $\beta$  sein, etwa  $\alpha = \bar{b} \cdot \beta$ . Ist nun  $p^k \cdot \alpha_k = \alpha$ , so müssen auch  $p \cdot \alpha_1, p \cdot \alpha_2, \dots$  Vielfache von  $\beta$  sein, weil sie eine größere Höhe haben. Dann muß aber  $\bar{b} = p \cdot \bar{b}_1 = p^2 \cdot \bar{b}_2 = \dots$  durch jede beliebige Potenz von  $p$  teilbar sein:  $(\bar{b}) = (p^\infty)$ . Dann ist aber

$$\alpha = \bar{b} \cdot \beta = \bar{b} \cdot \bar{e}_p \cdot \beta = 0 \cdot \beta = \omega.$$

Wir können jetzt die Gruppen vom Range 1 einteilen in:

- a) Gruppen von Elementen nur endlicher Ordnung und nur endlicher Höhe. Abkürzung:  $3^{p^k}$  ( $k=1, 2, \dots$ );
- b) Gruppen von Elementen nur endlicher Ordnung und nur unendlicher Höhe. Abkürzung:  $3_{p^\infty}$ ;
- c) Gruppen von Elementen nur unendlicher Ordnung und nur endlicher Höhe. Abkürzung:  $3^{p^\infty}$ ;
- d) Gruppen von Elementen nur unendlicher Ordnung und nur unendlicher Höhe. Abkürzung:  $3_{p^\infty}^\infty$ .

Der Typus a) umfaßt alle und nur die endlichen zyklischen Gruppen von der Ordnung  $p^k$ .

Der Typus b) enthält wenigstens ein Element  $\delta$  der Ordnung  $p$ . Da jedes Element der Gruppe größere oder gleiche Ordnung hat wie  $\delta$ , und die durch ein Element erzeugten Untergruppen, d. h. die Gruppen der  $p$ -adischen Vielfachen eines Elementes, die einzigen sind, ist  $\delta$   $p$ -adisches Vielfaches jedes Elementes der Gruppe und kommt in jeder Untergruppe vor. Die Gruppen  $3_{p^\infty}$  sind also die von einem Element beherrschten Gruppen des § 1. Sie sind alle untereinander und zur Additionsgruppe aller Brüche, in deren Nenner eine Potenz von  $p$  steht, mod 1 reduziert, isomorph.

Der Typus c)  $3^{p^\infty}$  enthält wenigstens ein Element  $\alpha$  der Höhe 1. Die Gruppe ist dann die Gruppe aller  $p$ -adischen Vielfachen von  $\alpha$ , die alle verschieden sind. Alle  $3^{p^\infty}$  sind daher isomorph zur Additionsgruppe der ganzen  $p$ -adischen Zahlen.

Der Typus d)  $3_{p^\infty}^\infty$  hat nur Untergruppen vom Typus  $3^{p^\infty}$ . Er ist daher isomorph zur Additionsgruppe des Körpers aller  $p$ -adischen Zahlen.

Die Typen  $3_{p^\infty}$ ,  $3^{p^\infty}$ ,  $3_{p^\infty}^\infty$  sind eindeutig bestimmt, der Typus  $3^{p^k}$  hat je nach der Anzahl  $p^k$  seiner Elemente abzählbar viele Möglichkeiten.

## § 6.

Konstruktion direkter Summanden vom Range  $1^{21)}$ .

Für die folgenden Untersuchungen brauchen wir den

Hilfssatz 1. Die Gruppe  $p^k \cdot \mathfrak{G}$  der Elemente der abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{G}$ , deren Höhe ein Vielfaches von  $p^k$  ist, ist abgeschlossen.

Die Elemente  $\alpha$  von  $p^k \cdot \mathfrak{G}$  lassen sich darstellen als  $\alpha = p^k \cdot \delta$ , wo  $\delta$  Element aus  $\mathfrak{G}$ . Durchlaufe  $\mathfrak{G}_s$  die Umgebungsgruppen von  $\mathfrak{G}$ . Der Hp  $\beta$  von  $p^k \cdot \mathfrak{G}$  genüge dem verträglichen Kongruenzsystem

$$(1) \quad \beta = \alpha_s = p^k \cdot \beta_s \quad (\mathfrak{G}_s) \quad [\sigma < \varrho].$$

Die Gesamtheit der Elemente  $\beta_s$ , für die  $p^k \cdot \beta_s = \alpha_s \quad (\mathfrak{G}_s)$ , bilden eine Restklasse nach  $\mathfrak{G}_{s,k}$ , der Gruppe der Elemente von  $\mathfrak{G}$ , deren  $p^k$ -fache in  $\mathfrak{G}_s$  liegen.  $\mathfrak{G}_{s,k}$  ist als Obergruppe der Umgebung  $\mathfrak{G}_s$  abgeschlossen. Es gilt dann für alle solchen  $\beta_s$  zugleich

$$(2) \quad \beta_s = \gamma_s \quad (\mathfrak{G}_{s,k}), \text{ mit festem } \gamma_s.$$

Da (1) verträglich ist, hat das endliche Teilsystem

$$(3) \quad \begin{aligned} \beta &= p^k \beta_{s_1} \quad (\mathfrak{G}_{s_1}) \\ &\dots \dots \dots \\ \beta &= p^k \beta_{s_n} \quad (\mathfrak{G}_{s_n}) \\ \beta &= p^k \beta_t \quad (\mathfrak{G}_t), \end{aligned}$$

wo  $\mathfrak{G}_{s_1}, \mathfrak{G}_{s_2}, \dots, \mathfrak{G}_{s_n}$  beliebige endlich viele der  $\mathfrak{G}_s$  und  $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{G}_{s_1} \cap \mathfrak{G}_{s_2} \cap \dots \cap \mathfrak{G}_{s_n}$  gleichfalls eine Umgebung ist, eine gemeinsame Lösung. Das heißt aber

$$(4) \quad p^k (\beta_t - \beta_{s_i}) = \omega \quad (\mathfrak{G}_{s_i}) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Daraus folgt

$$(5) \quad \beta_t = \gamma_{s_i} \quad (\mathfrak{G}_{s_i,k}). \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Das Kongruenzsystem

$$(6) \quad \eta = \gamma_s \quad (\mathfrak{G}_{s,k})$$

ist also verträglich und hat daher mindestens eine Lösung  $\gamma$ .  $\gamma = \gamma_s = \beta_s \quad (\mathfrak{G}_{s,k})$  also  $\gamma - \beta_s = \gamma_{s,k}$ , wo  $\gamma_{s,k}$  aus  $\mathfrak{G}_{s,k}$ .

$$(7) \quad \begin{aligned} p^k (\gamma - \beta_s) &= p^k \gamma_{s,k} = \omega \quad (\mathfrak{G}_s) \\ p^k \cdot \gamma &= p^k \beta_s = \alpha_s \quad (\mathfrak{G}_s). \end{aligned}$$

Also ist  $p^k \cdot \gamma = \beta$  und damit  $\beta$  in  $p^k \cdot \mathfrak{G}$ , w. z. b. w.

<sup>21)</sup> Dieser § 6 stammt mit Ausnahme des Hilfssatzes und seiner Anwendung im Beweis von Satz 1 vollkommen aus P 1 §§ 12, 13, P 2 § 12.



Die in den letzten beiden Sätzen konstruierten speziellen Servanzuntergruppen des Ranges 1 sind aber zugleich direkte Summanden, denn es gilt:

**Satz 4.** *Ist  $\mathfrak{F}$  eine Servanzuntergruppe des Ranges 1 von  $\mathfrak{G}$ , die ein Element  $\alpha$  der Ordnung  $p$  enthält, so ist  $\mathfrak{F}$  ein direkter Summand von  $\mathfrak{G}$ .  $\mathfrak{G} = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{H}$ .*

Hat  $\alpha$  die Höhe  $p^k$  und ist  $p^k \cdot \beta = \alpha$ ;  $\beta, \alpha$  aus  $\mathfrak{F}$ , so sei  $(p^{k+1} \cdot \mathfrak{G})$  die Gruppe der  $p^{k+1}$ -fachen von  $\mathfrak{G}$ . Man suche nach Hilfssatz 3 § 2 eine größte abgeschlossene Obergruppe von  $(p^{k+1} \cdot \mathfrak{G})$ , die  $\alpha$  nicht enthält. Sie heiße  $\mathfrak{H}$ .  $\mathfrak{G}|\mathfrak{H}$  wird durch  $(\alpha + \mathfrak{H})$  beherrscht. Ist  $p^n \gamma_n = \alpha$ ,  $\gamma_n$  aus  $\mathfrak{F}$ , so hat  $(\gamma_n + \mathfrak{H})$  in  $\mathfrak{G}|\mathfrak{H}$  genau die Ordnung  $p^{n+1}$ , denn sonst wäre  $p^n \cdot \gamma_n = \alpha$  in  $\mathfrak{H}$  enthalten.  $\mathfrak{G}|\mathfrak{H}$  enthält keine Restklasse  $(\delta + \mathfrak{H})$  der Ordnung  $p^{k+2}$ , da ja  $p^{k+1} \cdot \delta$  in  $\mathfrak{H}$  enthalten ist. Da  $\mathfrak{G}|\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{F}$  zyklisch sind von derselben Ordnung  $p^{k+1}$ , und weil die Elemente von  $\mathfrak{F}$  Restklassen derselben Ordnung von  $\mathfrak{G}|\mathfrak{H}$  repräsentieren, so repräsentieren sie auch alle Restklassen von  $\mathfrak{G}|\mathfrak{H}$ :  $\mathfrak{G} = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{H}$ . Hat  $\alpha$  die Höhe  $p^\infty$ , so kann  $\mathfrak{H}$  als eine beliebige größte abgeschlossene  $\alpha$  nicht enthaltende Untergruppe gewählt werden.

**Satz 5.** *Enthält die abgeschlossene Gruppe  $\mathfrak{G}$  kein Element endlicher Ordnung, so ist eine  $\alpha$  enthaltende Servanzuntergruppe des Ranges 1 ein direkter Summand.*

Wird  $\mathfrak{F}$  durch ein Element  $\beta$  der Höhe 1 erzeugt,  $\mathfrak{F} = \{\beta\}$ , so sei  $\mathfrak{H}_k$  eine größte  $p^k \beta$ , aber nicht  $p^{k-1} \beta$ , also auch nicht  $\beta$  enthaltende abgeschlossene Untergruppe von  $\mathfrak{H}_{k-1}$ ;  $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{G}$ .  $\mathfrak{G}|\mathfrak{H}_k$  wird durch  $(\beta + \mathfrak{H}_k)$  erzeugt. Es sei  $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{H}_k = \mathfrak{H}$ .  $\mathfrak{H}$  enthält kein Element von  $\{\beta\}$ .  $\mathfrak{G}|\mathfrak{H}$  wird durch  $(\beta + \mathfrak{H})$  erzeugt. Also ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{H}.$$

Wird  $\mathfrak{F}$  nicht durch ein Element erzeugt, so sei  $\alpha$  beliebig aus  $\mathfrak{F}$ .  $\mathfrak{H}$  erhält man wie vorher. Nur wird jetzt  $\mathfrak{G}|\mathfrak{H}_1$  durch  $(\alpha + \mathfrak{H}_1)$  nicht erzeugt, sondern beherrscht.  $\mathfrak{H}_1|\mathfrak{H}$  wird durch  $(\alpha + \mathfrak{H})$  erzeugt.

## § 7.

### Zerlegung einer abgeschlossenen Gruppe in direkte Summanden des Ranges 1.

Jetzt haben wir alle Hilfsmittel gewonnen, um eine abgeschlossene Gruppe zu zerlegen. Die Zerlegung vollziehen wir in zwei Schritten.

**Satz 1.** *Eine abgeschlossene Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist die direkte Summe zweier Gruppen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{U}$ .  $\mathfrak{E}$ , die abgeschlossene Hülle der Gruppe aller Elemente endlicher Ordnung von  $\mathfrak{G}$ , ist eindeutig,  $\mathfrak{U}$ , eine Gruppe von Elementen nur unendlicher Ordnung  $p^\infty$ , daher bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Wir ordnen die Elemente von  $\mathfrak{G}$  wohl. Am Anfang stehen alle Elemente endlicher Ordnung von  $\mathfrak{G}$ . Einer Limeszahl  $\nu$  entspreche kein  $\alpha_\nu$ .

$$\omega = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\sigma, \dots \quad [\sigma < \tau].$$

Wir spalten die zu den Elementen der Ordnung  $p$  gehörigen direkten Summanden des Ranges 1 nacheinander so ab: Für  $\nu < \mu$  gelte schon

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\nu-1} &= \mathfrak{F}_\nu \oplus \mathfrak{G}_\nu & (\text{wenn } \nu \neq \text{Limeszahl}), \\ \Delta_{\sigma < \nu} \mathfrak{G}_\sigma &= \mathfrak{G}_\nu; \quad \mathfrak{F}_\nu = \omega & (\text{wenn } \nu = \text{Limeszahl}). \end{aligned}$$

Ist dann  $\alpha_{\nu\mu}$  das erste Element aus den  $\alpha_\sigma$ , das die Ordnung  $p$  hat und in  $\mathfrak{G}_{\mu-1}$  enthalten ist, so sei  $\mathfrak{F}_\mu$  ein direkter Summand des Ranges 1 von  $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ , der  $\alpha_{\nu\mu}$  enthält. Dann ist

$$\mathfrak{G}_{\mu-1} = \mathfrak{F}_\mu \oplus \mathfrak{G}_\mu.$$

Für eine Limeszahl  $\mu$  werde  $\mathfrak{F}_\mu = \omega$  und  $\mathfrak{G}_\mu = \Delta_{\sigma < \mu} \mathfrak{G}_\sigma$  gesetzt. Dann sind die Voraussetzungen des Konstruktionssatzes § 3 erfüllt und es ist also

$$\mathfrak{G} = \sum_{\sigma \leq \epsilon} \mathfrak{F}_\sigma \oplus \mathfrak{G}_\epsilon = \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{U},$$

wo

$$\mathfrak{E} = \sum_{\sigma \leq \epsilon} \mathfrak{F}_\sigma; \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{G}_\epsilon.$$

$\mathfrak{U}$  enthält nach Konstruktion nur Elemente der Ordnung  $p^\infty$ . Jedes Element endlicher Ordnung ist in  $\mathfrak{E}$  enthalten, denn das ist wahr für die Elemente der Ordnung  $p$ . Die Behauptung sei schon bewiesen für die Elemente der Ordnung  $p^k$ . Ist  $\alpha$  ein Element der Ordnung  $p^{k+1}$ , so ist  $p \cdot \alpha = \beta$  in  $\mathfrak{E}$  enthalten. Da  $\mathfrak{E}$  als direkter Summand Servanzuntergruppe ist, gibt es in  $\mathfrak{E}$  ein  $\gamma$ , so daß  $p\gamma = \beta$ . ( $\alpha - \gamma$ ) ist dann von der Ordnung  $p$ , also in  $\mathfrak{E}$ . Dann ist aber auch  $\alpha$  in  $\mathfrak{E}$ .

Wenn die Ordnungen der Elemente endlicher Ordnung in  $\mathfrak{E}$  nicht beschränkt sind, enthält  $\mathfrak{E}$  auch Häufungspunkte der Ordnung  $p^\infty$ . Da  $\mathfrak{E}$  eindeutig bestimmt ist, ist  $\mathfrak{U}$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.  $\mathfrak{U} \leftrightarrow \mathfrak{G}|\mathfrak{E}$ . Aus der Konstruktion folgt sofort

**Satz 2.**  $\mathfrak{E}$  ist die direkte Summe von Summanden des Ranges 1.

Wir können wieder wie oben mit Hilfe von Satz 5 § 6 nacheinander direkte Summanden des Ranges 1 von  $\mathfrak{U}$  abspalten. Dann folgt auch für  $\mathfrak{U}$ :

**Satz 3.**  $\mathfrak{U}$  ist die direkte Summe von Summanden des Ranges 1.

Damit und mit Hauptsatz 1 § 4 haben wir bewiesen den

**Hauptsatz 2.** Jede abgeschlossene Gruppe ist direkte Summe von primären Summanden des Ranges 1, also auch direkter Durchschnitt von primären direkten Quotientengruppen des Ranges 1.

## § 8.

## Isomorphiesatz.

I.-Satz. Ist die abgeschlossene Gruppe  $\mathfrak{G}$  auf zwei verschiedene Arten als direkte Summe von primären Gruppen des Ranges 1 darstellbar:

$$(1) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \dots = \sum_{\sigma < \nu} \mathfrak{F}_\sigma,$$

$$(2) \quad \mathfrak{G} = \bar{\mathfrak{F}}_1 \oplus \bar{\mathfrak{F}}_2 \oplus \dots = \sum_{\sigma < \mu} \bar{\mathfrak{F}}_\sigma,$$

so lassen sich die Summanden der Zerlegung (1) eineindeutig denen der Zerlegung (2) so zuordnen, daß entsprechende Gruppen isomorph sind.

Wegen Hauptsatz 1 brauchen beim Beweis des I.-Satzes nur primäre Gruppen betrachtet zu werden.

Wir fassen in den beiden Zerlegungen die Summanden gleichen Typs zusammen und erhalten die leichtverständlichen Gruppenbezeichnungen

$$\mathfrak{F}^{p^k}, \mathfrak{F}_{p^\infty}, \mathfrak{F}^{p^\infty}, \mathfrak{F}_{p^\infty}^{p^\infty}$$

bzw.

$$\bar{\mathfrak{F}}^{p^k}, \bar{\mathfrak{F}}_{p^\infty}, \bar{\mathfrak{F}}^{p^\infty}, \bar{\mathfrak{F}}_{p^\infty}^{p^\infty}.$$

Der I.-Satz behauptet nun:

Zwei entsprechende Gruppen, etwa  $\mathfrak{F}^{p^k}$  und  $\bar{\mathfrak{F}}^{p^k}$ , sind isomorph und ihre Summanden vom Range 1 lassen sich einander eineindeutig zuordnen.

Diese Behauptungen wollen wir nun beweisen. Es ist

$$(3) \quad \mathfrak{G} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}^{p^k} \oplus \mathfrak{F}_{p^\infty} \oplus \mathfrak{F}^{p^\infty} \oplus \mathfrak{F}_{p^\infty}^{p^\infty},$$

$$(4) \quad \mathfrak{G} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathfrak{F}}^{p^k} \oplus \bar{\mathfrak{F}}_{p^\infty} \oplus \bar{\mathfrak{F}}^{p^\infty} \oplus \bar{\mathfrak{F}}_{p^\infty}^{p^\infty}.$$

Die abgeschlossene Hülle  $\mathfrak{E}$  der Elemente endlicher Ordnung von  $\mathfrak{G}$  ist von der Zerlegung von  $\mathfrak{G}$  unabhängig eindeutig bestimmt

$$(5) \quad \mathfrak{E} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}^{p^k} \oplus \mathfrak{F}_{p^\infty},$$

$$(6) \quad \mathfrak{E} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathfrak{F}}^{p^k} \oplus \bar{\mathfrak{F}}_{p^\infty}.$$

Denn einerseits ist  $\mathfrak{E}$  Obergruppe von  $\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}^{p^k}$  und von  $\mathfrak{F}_{p^\infty}$ , andererseits auch Untergruppe von  $\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}^{p^k} \oplus \mathfrak{F}_{p^\infty}$ , weil  $\mathfrak{E}$  kein Element enthalten kann, das eine  $\mathfrak{F}^{p^\infty}$ - oder  $\mathfrak{F}_{p^\infty}^{p^\infty}$ -Komponente hat, die von  $\omega$  verschieden ist.

Aus (5) und (6) folgt

$$(7) \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{F}_{p^\infty}^{p^\infty} \oplus \mathfrak{F}^{p^\infty} \leftrightarrow \bar{\mathfrak{F}}_{p^\infty}^{p^\infty} \oplus \bar{\mathfrak{F}}^{p^\infty} = \bar{\mathfrak{U}},$$

da beide Gruppen isomorph sind zu  $\mathfrak{G}|\mathfrak{E}$ .

Die Gruppe der Elemente der Höhe  $p^\infty$  von  $\mathfrak{G}$  ist ebenfalls von der Zerlegung von  $\mathfrak{G}$  unabhängig. Sie ist

$$(8) \quad \mathfrak{I}_{p^\infty} = \overline{\mathfrak{I}}_{p^\infty}.$$

Denn ein Element von  $\mathfrak{G}$  mit einer von  $\omega$  verschiedenen  $\mathfrak{I}^{p^k}$ -Komponente hat eine endliche Höhe, die Teiler von  $p^k$  ist. — Da  $\mathfrak{U} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{U}}$ , können wir die Zerlegung von  $\mathfrak{U}$  auf  $\overline{\mathfrak{U}}$  abbilden. Wir erhalten dann zwei verschiedene Zerlegungen von  $\mathfrak{U}$ :

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{I}^{p^\infty} \oplus \mathfrak{I}_{p^\infty}^{p^\infty} = \overline{\mathfrak{I}}^{p^\infty} \oplus \overline{\mathfrak{I}}_{p^\infty}^{p^\infty},$$

worin dann  $\mathfrak{I}^{p^\infty} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{I}}^{p^\infty}$ ,  $\mathfrak{I}_{p^\infty}^{p^\infty} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{I}}_{p^\infty}^{p^\infty}$ . Die von der Zerlegung unabhängige Gruppe der Elemente der Höhe  $p^\infty$  von  $\mathfrak{U}$  ist

$$(9) \quad \mathfrak{I}_{p^\infty}^{p^\infty} = \overline{\mathfrak{I}}_{p^\infty}^{p^\infty} \leftrightarrow \mathfrak{I}_{p^\infty}^{p^\infty}$$

und daher

$$(10) \quad \mathfrak{U} | \mathfrak{I}_{p^\infty}^{p^\infty} \leftrightarrow \mathfrak{I}^{p^\infty} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{I}}^{p^\infty} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{I}}^{p^\infty}.$$

Wir zeigen nun zunächst:  $\mathfrak{I}^p \leftrightarrow \overline{\mathfrak{I}}^p$ .

Wir bilden dazu die von der Zerlegung von  $\mathfrak{G}$  unabhängige Gruppe  $\mathfrak{D}^p$  der Elemente der Ordnung  $p$  von  $\mathfrak{G}$ . Diese ist abgeschlossen. Denn sei  $\alpha$  ein Hp von  $\mathfrak{D}^p$  in  $\mathfrak{G}$  und durchlaufe  $\mathfrak{G}_\alpha$  alle Umgebungsgruppen von  $\mathfrak{G}$ , so genügt  $\alpha$  dem verträglichen Kongruenzsystem:

$$\alpha \equiv \alpha_\alpha \pmod{\mathfrak{G}_\alpha},$$

worin die  $\alpha_\alpha$  aus  $\mathfrak{D}^p$  gewählt werden können.

$$p \cdot \alpha \equiv p \cdot \alpha_\alpha \equiv \omega \pmod{\mathfrak{G}_\alpha}, \quad \text{da } \alpha_\alpha \text{ aus } \mathfrak{D}^p.$$

Also ist  $p \cdot \alpha \equiv \omega$ ,  $\alpha$  gehört zu  $\mathfrak{D}^p$ , w. z. b. w.

Der Zerlegung (5) bzw. (6) entspricht die Zerlegung

$$(11) \quad \mathfrak{D}^p = \sum_{k=2}^{\infty} [\mathfrak{I}^{p^k}]^p \oplus [\mathfrak{I}_{p^\infty}]^p \oplus \mathfrak{I}^p$$

bzw.

$$(12) \quad \mathfrak{D}^p = \sum_{k=2}^{\infty} [\overline{\mathfrak{I}}^{p^k}]^p \oplus [\overline{\mathfrak{I}}_{p^\infty}]^p \oplus \overline{\mathfrak{I}}^p,$$

worin  $[\mathfrak{I}^{p^k}]^p$  die Gruppe der Elemente der Ordnung  $p$  von  $\mathfrak{I}^{p^k}$  bedeutet.  $[\mathfrak{I}^{p^k}]^p$ ,  $[\mathfrak{I}_{p^\infty}]^p$  sind wieder abgeschlossene Gruppen.

In  $\mathfrak{D}^p$  bestimmen wir nun die Gruppe  $p \cdot \mathfrak{D}^p$  <sup>39)</sup> der Elemente, deren Höhe in  $\mathfrak{G}$  ein Vielfaches von  $p$  ist. Diese ist nach Hilfssatz 1 § 6 abgeschlossen und von der Zerlegung von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{D}^p$  unabhängig. Den Zerlegungen (11) und (12) von  $\mathfrak{D}^p$  entsprechen die Zerlegungen

$$(13) \quad p \cdot \mathfrak{D}^p = \sum_{k=2}^{\infty} [\mathfrak{I}^{p^k}]^p \oplus [\mathfrak{I}_{p^\infty}]^p,$$

$$(14) \quad p \cdot \mathfrak{D}^p = \sum_{k=2}^{\infty} [\overline{\mathfrak{I}}^{p^k}]^p \oplus [\overline{\mathfrak{I}}_{p^\infty}]^p.$$

<sup>39)</sup> Vgl. Hilfssatz 1 § 6.



Denn einerseits enthalten die rechts stehenden Gruppen nur Elemente der Höhe  $p^l$  [ $l \geq 1$ ], andererseits hat ein Element von  $\mathfrak{D}^p$  mit einer  $\mathfrak{I}^p$ -Komponente  $\alpha + \omega$  die Höhe 1, gehört also nicht zu  $p\mathfrak{D}^p$ . Es ist daher

$$(15) \quad \mathfrak{I}^p \leftrightarrow \overline{\mathfrak{I}}^p,$$

weil beide Gruppen isomorph zu  $\mathfrak{D}^p/p\mathfrak{D}^p$  sind, w. z. b. w.

Wie vorhin bei 11, 11 schließen wir, daß wir nur jeweils zwei verschiedene Zerlegungen von  $\mathfrak{I}^p$  bzw.  $\mathfrak{I}^{p^\infty}$  bzw.  $\mathfrak{I}_{p^\infty}^{p^\infty}$  zu untersuchen haben.

Für  $\mathfrak{I}^p$ ,  $\mathfrak{I}^{p^\infty}$ ,  $\mathfrak{I}_{p^\infty}^{p^\infty}$  beweisen wir jetzt den sogenannten Austauschsatz, der etwas mehr aussagt als der I.-Satz. Da der Beweis für alle drei Gruppen in vielen Teilen gleich verläuft, bezeichnen wir die drei Gruppen an solchen Stellen mit dem gemeinsamen Buchstaben  $\mathfrak{I}$ .

A.-Satz. Sind

$$(16) \quad \mathfrak{I} = \sum_{r \leq \sigma} \mathfrak{I}_r,$$

$$(17) \quad \mathfrak{I} = \sum_{r' \leq \tau} \overline{\mathfrak{I}}_{r'},$$

zwei verschiedene Zerlegungen von  $\mathfrak{I}$  in direkte Summanden des Ranges 1, so läßt sich die Menge  $\mathfrak{M}$  der  $\mathfrak{I}_r$  so neu wohlordnen, daß für jedes  $\mu \leq \tau$  gilt

$$(18_\mu) \quad \mathfrak{I} = \sum_{r \leq \mu} \overline{\mathfrak{I}}_r \oplus \sum_{\mu+1 \leq r' \leq \tau} \mathfrak{I}_{r'}.$$

Limeszahlen  $\nu$  und  $\nu'$  sollen im Satze  $\mathfrak{I}_\nu = \overline{\mathfrak{I}}_{\nu'} = \omega$  entsprechen. Insbesondere ergibt der Satz  $\sigma = \tau$ ; denn wegen (17) ist  $\mathfrak{I} | \sum_{r' \leq \tau} \overline{\mathfrak{I}}_{r'} \leftrightarrow \omega$ , wegen

$$(18_\nu) \quad \text{ist dazu} \quad \mathfrak{I} | \sum_{r \leq \nu} \mathfrak{I}_r \leftrightarrow \sum_{\nu+1 \leq r' \leq \sigma} \mathfrak{I}_{r'},$$

woraus  $\sigma \leq \tau$  folgt. Wäre aber  $\sigma < \tau$ , so ergäbe sich

$$(18_\sigma) \quad \mathfrak{I} = \sum_{r \leq \sigma} \overline{\mathfrak{I}}_r,$$

was (17) widerspricht.

Den Beweis des A.-Satzes führen wir mit transfiniter Induktion. Setzen wir  $\mathfrak{I}_0 = \overline{\mathfrak{I}}_0 = \omega$ , so gilt der Satz für  $\mu = 1$ . Er gelte für  $\mu < \lambda$ .

a)  $\lambda$  sei keine Limeszahl.

Nach Voraussetzung haben wir eine Teilmenge  $\mathfrak{M}_{\lambda-1}$  der Menge  $\mathfrak{M}$  aller  $\mathfrak{I}_r$ :  $\mathfrak{I}_0, \mathfrak{I}_1, \dots, \mathfrak{I}_{\lambda-1}$  so wohlgeordnet, daß

$$(18_{\lambda-1}) \quad \mathfrak{I} = \sum_{r \leq \lambda-1} \mathfrak{I}_r \oplus \sum_{\lambda \leq r' \leq \sigma} \mathfrak{I}_{r'}.$$

Das Komplement von  $\mathfrak{M}_\lambda$  in  $\mathfrak{M}$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{M}_\lambda$ . Die direkte Summe aller Gruppen aus  $\mathfrak{M}_\lambda$  sei mit  $\{\mathfrak{M}_\lambda\}$  bezeichnet.

Wir wählen eine Gruppe  $\mathfrak{I}_\lambda$  aus der Restmenge  $\mathfrak{M}_{\lambda-1}$ , so daß jedes ihrer Elemente eine von  $\omega$  verschiedene  $\mathfrak{I}_\lambda$ -Komponente in der Zerlegung

$(18_{i-1})$  hat, und daß jedes Element von  $\mathfrak{B}_i$  Komponente eines Elementes von  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  ist.

Dazu muß man, im Falle  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^p$ ,  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  so wählen, daß sein erzeugendes Element  $\bar{\alpha}$  eine von  $\omega$  verschiedene  $\mathfrak{B}_i$ -Komponente  $\alpha$  hat. Eine solche Gruppe  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  läßt sich finden, denn sonst wäre schon  $\{\mathfrak{R}_{i-1}\} \oplus \sum_{v \leq i-1} \overline{\mathfrak{B}}_v = \mathfrak{T}^p$  Untergruppe von  $\sum_{v \leq i-1} \overline{\mathfrak{B}}_v \oplus \sum_{i+1 \leq v \leq \sigma} \mathfrak{B}_v$ .

Im Falle  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{p^\infty}$  hat man  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  so zu wählen, daß das erzeugende Element von  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  eine  $\mathfrak{B}_i$ -Komponente hat, die  $\mathfrak{B}_i$  erzeugt. Dann ist wieder jedes Element von  $\mathfrak{B}_i$  Komponente eines Elementes von  $\overline{\mathfrak{B}}_i$ . Ein solches  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  läßt sich finden, denn sonst wäre  $\sum_{v \leq i-1} \overline{\mathfrak{B}}_v \oplus \sum_{i+1 \leq v \leq \sigma} \mathfrak{B}_v \oplus p \cdot \mathfrak{B}_i$  Obergruppe von  $\sum_{v \leq i-1} \overline{\mathfrak{B}}_v \oplus \{\mathfrak{R}_{i-1}\} = \mathfrak{T}^{p^\infty}$ , wo  $p \cdot \mathfrak{B}_i$  die Gruppe der  $p$ -fachen von  $\mathfrak{B}_i$  bedeutet.

Im Falle  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{p^\infty}$  braucht man  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  nur so zu wählen, daß ein beliebiges Element  $\bar{\alpha}$  von  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  eine von  $\omega$  verschiedene  $\mathfrak{B}_i$ -Komponente  $\beta$  hat. Denn ist  $\bar{\alpha} = \beta \oplus \gamma$ , wo  $\beta$  aus  $\mathfrak{B}_i$ ,  $\gamma$  aus  $\sum_{v \leq i-1} \overline{\mathfrak{B}}_v \oplus \sum_{i+1 \leq v \leq \sigma} \mathfrak{B}_v$ , und  $p^k \cdot \bar{\alpha} = \bar{\alpha}$ , so ist  $\alpha_i$  das einzige Element, das einer solchen Gleichung genügt, denn die Differenz zweier solcher Elemente hätte die Ordnung  $p^k$  statt  $p^\infty$ . Daher ist, wenn  $p^k \beta_1 = \beta$ ,  $\beta_1$  aus  $\mathfrak{B}_i$ ,  $p^k \cdot \gamma_1 = \gamma$ ,  $\gamma_1$  aus  $\sum_{v \leq i-1} \overline{\mathfrak{B}}_v \oplus \sum_{i+1 \leq v \leq \sigma} \mathfrak{B}_v$ ,  $\bar{\alpha}_i = \beta_1 \oplus \gamma_1$ . Also hat jedes Element von  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  eine  $\mathfrak{B}_i$ -Komponente  $\beta \neq \omega$ , und jedes Element von  $\mathfrak{B}_i$  ist Komponente eines Elementes von  $\overline{\mathfrak{B}}_i$ . Der Existenzbeweis für die Gruppe  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  wird wie bei  $\mathfrak{T}^p$  geführt.

Für die so für  $\mathfrak{T}$  konstruierte Gruppe  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  ist

$$\left( \sum_{v \leq i-1} \overline{\mathfrak{B}}_v \oplus \sum_{i+1 \leq v \leq \sigma} \mathfrak{B}_v \right) \cap \overline{\mathfrak{B}}_i = \omega,$$

da in  $\left( \sum_{v \leq i-1} \overline{\mathfrak{B}}_v \oplus \sum_{i+1 \leq v \leq \sigma} \mathfrak{B}_v \right)$  wegen  $(18_{i-1})$  kein Element mit von  $\omega$  verschiedener  $\mathfrak{B}_i$ -Komponente enthalten ist.

$\left( \sum_{v \leq i} \overline{\mathfrak{B}}_v \oplus \sum_{i+1 \leq v \leq \sigma} \mathfrak{B}_v \right)$  ist daher eine direkte Summe und es ist

$$(18_i) \quad \mathfrak{T} = \sum_{v \leq i} \overline{\mathfrak{B}}_v \oplus \sum_{i+1 \leq v \leq \sigma} \mathfrak{B}_v.$$

Denn einerseits ist die links stehende Gruppe eine Untergruppe von  $\mathfrak{T}$ , hat andererseits irgendein Element  $\bar{\alpha}$  von  $\overline{\mathfrak{B}}_i$  die  $\mathfrak{B}_i$ -Komponente  $\alpha$  in  $(18_{i-1})$ , so ist  $\alpha$  Element der links stehenden Gruppe. Also ist  $\mathfrak{B}_i$  und damit  $\sum_{v \leq i-1} \overline{\mathfrak{B}}_v \oplus \sum_{i+1 \leq v \leq \sigma} \mathfrak{B}_v = \mathfrak{T}$  Untergruppe der Gruppe  $\sum_{v \leq i} \overline{\mathfrak{B}}_v \oplus \sum_{i+1 \leq v \leq \sigma} \mathfrak{B}_v$ , w. z. b. w.

b) Wenn  $\lambda$  Limeszahl ist.

Bezeichnen wir  $\sum_{\mu+1 \leq \nu \leq \sigma} \mathfrak{B}_\nu$  mit  $\mathfrak{B}_\mu$ ,  $\sum_{\nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu$  mit  $\mathfrak{A}$ , so ist wegen der Gültigkeit des A.-Satzes für  $\mu < \lambda$ , d. h. von (18 $_\mu$ ), der Hilfssatz 1 in § 2 anwendbar, aus dem folgt:

$$(18_1) \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{A} + \sum_{\mu < \lambda} \mathfrak{B}_\mu = \sum_{\nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu + \sum_{\lambda+1 \leq \nu \leq \sigma} \mathfrak{B}_\nu.$$

Damit der A.-Satz auch für eine Limeszahl  $\lambda$  vollständig bewiesen ist, ist noch zu zeigen, daß hier rechts eine direkte Summe steht. Es ist also zu zeigen, daß  $\sum_{\nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu \cap \sum_{\lambda+1 \leq \nu \leq \sigma} \mathfrak{B}_\nu = \omega$  ist. Wir setzen  $\sum_{\nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu \cap \sum_{\mu+1 \leq \nu \leq \sigma} \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\mu$ . Dann ist  $\mathfrak{C}_\mu \oplus \sum_{\nu \leq \mu} \bar{\mathfrak{B}}_\nu$  Untergruppe von  $\sum_{\nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu$ .  $\sum_{\nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu | \sum_{\nu \leq \mu} \bar{\mathfrak{B}}_\nu$  wird repräsentiert durch  $\sum_{\mu+1 \leq \nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu$  wegen (17), eine Untergruppe von  $\sum_{\nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu | \sum_{\nu \leq \mu} \bar{\mathfrak{B}}_\nu$  durch  $\mathfrak{C}_\mu$ . Die Elemente von  $\mathfrak{C}_\mu$  lassen sich also eineindeutig den Elementen einer Untergruppe von  $\sum_{\mu+1 \leq \nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu$  zuordnen, die Elemente von  $\sum_{\mu < \lambda} \mathfrak{C}_\mu$  also einer Untergruppe von  $\sum_{\mu < \lambda} (\sum_{\mu+1 \leq \nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu) = \omega$ . Also ist

$$\omega = \sum_{\mu < \lambda} \mathfrak{C}_\mu = \sum_{\mu < \lambda} (\sum_{\nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu \cap \sum_{\mu+1 \leq \nu \leq \sigma} \mathfrak{B}_\nu) = \sum_{\nu \leq \lambda} \bar{\mathfrak{B}}_\nu \cap \sum_{\lambda+1 \leq \nu \leq \sigma} \mathfrak{B}_\nu,$$

w. z. b. w.

Die Behauptungen des A.-Satzes sind damit für  $\mathfrak{T}^p$  und  $\bar{\mathfrak{T}}^p$  bzw.  $\mathfrak{T}^{p^\infty}$  und  $\bar{\mathfrak{T}}^{p^\infty}$  bzw.  $\mathfrak{T}_{p^\infty}$  und  $\bar{\mathfrak{T}}_{p^\infty}$  vollständig bewiesen. Bleibt noch der Beweis für  $\mathfrak{T}^{p^k}$  und  $\mathfrak{T}_{p^k}$ .

In diesen Gruppen kann man den Beweis des I.-Satzes auf den schon gelungenen Beweis für Gruppen des Typus  $\mathfrak{T}^p$  zurückführen, da sich die Summanden von  $\mathfrak{T}^{p^k}$  eineindeutig den direkten Summanden vom Typus  $\mathfrak{B}^p$  einer direkten Summenzerlegung der Gruppe  $p^{k-1} \cdot \mathfrak{C}$ , das ist der Gruppe der  $p^{k-1}$ -fachen von  $\mathfrak{C}$ , zuordnen lassen. Bei  $\mathfrak{T}_{p^k}$  braucht man wegen (8) nur alle Summanden eineindeutig einer direkten Summenzerlegung der Gruppe  $[\mathfrak{T}_{p^\infty}]^p$ , das ist der Gruppe der Elemente der Ordnung  $p$  von  $\mathfrak{T}_{p^\infty}$ , die vom Typus  $\mathfrak{T}^p$  ist, zuzuordnen.

## § 9.

### Erweiterung einer beliebigen Abelschen Gruppe zu einer abgeschlossenen Gruppe<sup>21)</sup>.

Wir haben uns bisher von vornherein auf abgeschlossene Gruppen beschränkt, ohne uns darüber Rechenschaft zu geben, ob das nicht eine zu große Spezialisierung ist. Daß dies nicht der Fall ist, wird sich daraus ergeben, daß eine beliebige Abelsche Gruppe (Operatorenbereich der ganzen

<sup>21)</sup> Vgl. B., S. 220; P 2, Einleitung.

rationalen Zahlen)  $\mathfrak{G}$  zu einer abgeschlossenen Gruppe  $\mathfrak{H}$  erweitert werden kann (abgeschlossen werden kann), so daß  $\mathfrak{G}$  eine gewöhnliche Untergruppe von  $\mathfrak{H}$  wird, sogar derart, daß jedes Element von  $\mathfrak{H}$  Hp. von  $\mathfrak{G}$  in  $\mathfrak{H}$  wird.

Wir wählen aus den großen Untergruppen von  $\mathfrak{G}$  irgendein solches System  $\mathfrak{S}$  aus, das mit seinen Restklassen ein topologisches Umgebungssystem von  $\mathfrak{G}$  bildet. Durchlaufe  $\mathfrak{G}_\alpha$  alle Umgebungsgruppen von  $\mathfrak{G}$ . Wir bilden nun die Gruppe  $\mathfrak{H}$  aller verträglichen Kongruenzsysteme nach allen  $\mathfrak{G}_\alpha$ , wobei in üblicher Weise mit den Kongruenzsystemen gerechnet werden soll.  $\mathfrak{H}$  hat als Untergruppe die Gruppe aller der verträglichen Kongruenzsysteme, die schon in  $\mathfrak{G}$  eine — und wegen des Trennungsaxioms auch nur eine — Lösung haben. Diese Gruppe ist mit  $\mathfrak{G}$  isomorph. Wir identifizieren sie daher und nennen sie auch  $\mathfrak{G}$ .

Als Umgebung in der neuen Gruppe  $\mathfrak{H}$  definieren wir die Gesamtheit der verträglichen Kongruenzsysteme, in denen die Kongruenz

$$(1) \quad \xi = \alpha_\nu (\mathfrak{G}_\nu) \quad (\nu, \alpha_\nu \text{ fest})$$

oder eine damit gleichwertige auftritt. Die so entstandene Umgebung entspricht der Umgebung  $(\alpha_\nu + \mathfrak{G}_\nu)$  in  $\mathfrak{G}$ . Man erhält alle Umgebungen von  $\mathfrak{H}$ , indem man  $\mathfrak{G}_\alpha$  alle  $\mathfrak{G}_\alpha$ ,  $\alpha_\nu$  jeweils ein volles Repräsentantensystem der Restklassen von  $\mathfrak{G}_\alpha$  durchlaufen läßt.

Jede solche Umgebung ist Restklasse nach einer Umgebungsgruppe von  $\mathfrak{H}$ , nämlich nach der, in deren Elementen immer

$$\xi = \omega (\mathfrak{G}_\nu)$$

auftritt. Wir nennen sie  $\mathfrak{H}_\nu$ .

Diese neuen Umgebungen erfüllen wirklich die Umgebungsaxiome. Dies ist für A, B', C' sofort ersichtlich. Von der Gültigkeit des Trennungsaxioms überzeugt man sich so:

Sind  $\alpha, \beta$  zwei verschiedene Elemente der Umgebung  $(\alpha_\tau + \mathfrak{H}_\tau)$ , so unterscheiden sie sich in mindestens einer Kongruenz nach den  $\mathfrak{G}_\alpha$ , etwa in der nach  $\mathfrak{G}_1$ . Dann sind  $\alpha + \mathfrak{G}_1, \beta + \mathfrak{G}_1$  punktfremde Umgebungen in  $\mathfrak{G}$ ,  $\alpha + \mathfrak{H}_1, \beta + \mathfrak{H}_1$  punktfremde Umgebungen in  $\mathfrak{H}$ . Also sind  $(\alpha_\tau + \mathfrak{H}_\tau) \cap (\alpha + \mathfrak{H}_1)$  und  $(\alpha_\tau + \mathfrak{H}_\tau) \cap (\beta + \mathfrak{H}_1)$  punktfremde Umgebungen in  $(\alpha_\tau + \mathfrak{H}_\tau)$ . Postulat 1 ist also erfüllt von  $\mathfrak{H}$ .

Aus der Konstruktion von  $\mathfrak{H}$  folgt, daß für ein beliebiges Element  $\chi$  von  $\mathfrak{H}$  dann und nur dann

$$\chi = \alpha_\mu (\mathfrak{H}_\mu) \quad (\mu \text{ fest})$$

ist, wobei  $\alpha_\mu$  aus  $\mathfrak{G}$  gewählt werden soll, wenn in dem verträglichen  $\chi$  definierenden Kongruenzsystem die Kongruenz

$$\xi = \alpha_\mu (\mathfrak{G}_\mu)$$

vorkommt.

Jedes verträgliche Kongruenzensystem

$$(2) \quad \xi \equiv \chi, (\mathfrak{H}_\sigma)$$

ist daher in  $\mathfrak{H}$  lösbar, da das System

$$(3) \quad \xi \equiv \chi, (\mathfrak{G}_\sigma)$$

in  $\mathfrak{H}$  eine Lösung  $\chi$  hat. Da auf der rechten Seite der Kongruenzen immer Elemente aus  $\mathfrak{G}$  gesetzt werden können, ist  $\chi$  Hp. von  $\mathfrak{G}$ .

Postulat 2 ist also von  $\mathfrak{H}$  auch erfüllt.

Unsere so konstruierte Gruppe  $\mathfrak{H}$  hat also alle Eigenschaften einer abgeschlossenen Gruppe.

Da jedes Element von  $\mathfrak{H}$  Hp. von  $\mathfrak{G}$  ist, ist  $\mathfrak{H}$  eine kleinste, abgeschlossene  $\mathfrak{G}$  enthaltende Gruppe. Ebenso gibt es kleinste, eine Untergruppe  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{G}$  enthaltende abgeschlossene Untergruppen  $\overline{\mathfrak{F}}$  von  $\mathfrak{H}$ , die eindeutig bestimmt sind. Wir nennen  $\mathfrak{H}$  abgeschlossene Hülle von  $\mathfrak{G}$ ,  $\overline{\mathfrak{F}}$  abgeschlossene Hülle von  $\mathfrak{F}$ .

Bei der Konstruktion der abgeschlossenen Hülle von  $\mathfrak{G}$  war noch eine gewisse Willkür bei der Wahl des definierenden Umgebungssystems  $\mathfrak{E}$  gelassen, das die Topologisierung von  $\mathfrak{G}$  bestimmte. Je nach der Wahl von  $\mathfrak{E}$  erhalten wir verschiedene abgeschlossene Hüllen von  $\mathfrak{G}$  mit verschiedenen Zerlegungen in primäre direkte Summanden des Ranges 1. Wie verhalten sich nun diese verschiedenen abgeschlossenen Hüllen zueinander?

Eine „größte“ abgeschlossene Hülle  $\overline{\mathfrak{G}}$  von  $\mathfrak{G}$  erhält man bei Zuerundelegung des größtmöglichen Umgebungssystems von  $\mathfrak{G}$ , nämlich des Systems  $\mathfrak{E}$  aller großen Untergruppen und ihrer Restklassen. Es bedeute nun  $\mathfrak{H}$  eine abgeschlossene Hülle von  $\mathfrak{G}$  bezüglich des Teilumgebungssystems  $\mathfrak{E}$  von  $\mathfrak{E}$ . Durchläuft  $\mathfrak{U}_\sigma$  alle in  $\mathfrak{E}$  enthaltenen großen Untergruppen von  $\mathfrak{G}$ , so bilden die Elemente  $\xi_\sigma$  von  $\overline{\mathfrak{G}}$ , in deren definierendem Kongruenzensystem die Kongruenzen  $\xi_\sigma \equiv \omega (\mathfrak{U}_\sigma)$  für jedes  $\sigma$  vorkommen, eine relativ  $\overline{\mathfrak{G}}$  abgeschlossene Untergruppe  $\mathfrak{G}_\mathfrak{E}$  von  $\overline{\mathfrak{G}}$ . Jedes verträgliche Kongruenzensystem  $\xi \equiv \beta_\sigma (\mathfrak{U}_\sigma)$  definiert nun einerseits ein Element von  $\mathfrak{H}$ , bestimmt andererseits in  $\overline{\mathfrak{G}}$  eindeutig eine Restklasse nach  $\mathfrak{G}_\mathfrak{E}$ , und es ist leicht ersichtlich, daß  $\mathfrak{H}$  isomorph zu  $\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{G}_\mathfrak{E}$  ist, und zwar in dem Sinne, daß abgeschlossenen Untergruppen in  $\mathfrak{H}$  abgeschlossene Untergruppen in  $\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{G}_\mathfrak{E}$  entsprechen und umgekehrt. Da die  $\mathfrak{U}_\sigma$  nur  $\omega$  gemeinsam haben [Trennungssaxiom], so gilt noch  $\mathfrak{G}_\mathfrak{E} \cap \mathfrak{G} = \omega$ .

Es bedeute jetzt umgekehrt  $\overline{\mathfrak{G}}_1$  irgendeine abgeschlossene Untergruppe von  $\overline{\mathfrak{G}}$  mit  $\overline{\mathfrak{G}}_1 \cap \mathfrak{G} = \omega$ , dann gibt es eine abgeschlossene Hülle  $\mathfrak{H}_1$  von  $\mathfrak{G}$ , die zu  $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{G}}_1$  im obigen Sinne isomorph ist. Denn nach Satz 4 § 2 ist  $\overline{\mathfrak{G}}_1$  Durchschnitt abgeschlossener großer Untergruppen von  $\overline{\mathfrak{G}}$ . Ist  $\mathfrak{E}_1$  also die Gesamtheit aller großen abgeschlossenen Untergruppen  $\overline{\mathfrak{U}}_\sigma^{(1)}$  von  $\overline{\mathfrak{G}}$ , die  $\overline{\mathfrak{G}}_1$  ent-

halten, und setzen wir  $\overline{U}_\sigma^{(1)} \cap \mathfrak{G} = U_\sigma^{(1)}$ , so ist  $\Delta U_\sigma^{(1)} = \mathfrak{G} \cap \Delta \overline{U}_\sigma^{(1)} = \mathfrak{G} \cap \overline{\mathfrak{G}}_1 = \omega$ . Die  $U_\sigma^{(2)}$  bilden also mit ihren Restklassen ein Umgebungssystem von  $\mathfrak{G}$ , und  $\overline{\mathfrak{G}}_1$  ist wie oben die Gruppe der Elemente  $\xi_\omega$  von  $\overline{\mathfrak{G}}$ , in deren definierendem Kongruenzensystem die Kongruenz  $\xi_\omega = \omega$  ( $U_\sigma^{(1)}$ ) für jedes  $\sigma$  vorkommt.

Schließen wir also  $\mathfrak{G}$  nach dem System  $\mathfrak{S}_1$  der  $U_\sigma^{(1)}$  ab, so wird die entstehende abgeschlossene Hülle  $\mathfrak{H}_1$  isomorph zu  $\overline{\mathfrak{G}} | \overline{\mathfrak{G}}_1$ .

**Satz.** Ist  $\overline{\mathfrak{G}}$  die oben definierte „größte“ abgeschlossene Hülle von  $\mathfrak{G}$ , so besteht zwischen den abgeschlossenen Hüllen  $\mathfrak{H}_i$  von  $\mathfrak{G}$  und den abgeschlossenen Untergruppen  $\overline{\mathfrak{G}}_i$  von  $\overline{\mathfrak{G}}$  mit  $\mathfrak{G} \cap \overline{\mathfrak{G}}_i = \omega$  eine eindeutige Zuordnung:

1. Zu jedem  $\mathfrak{H}_i$  gehört ein einziges  $\overline{\mathfrak{G}}_i$ , das auf die oben beschriebene Art durch das definierende Umgebungssystem von  $\mathfrak{H}_i$  bestimmt ist.
2. Zu jedem  $\overline{\mathfrak{G}}_i$  gehört ein einziges  $\mathfrak{H}_i$ , da  $\overline{\mathfrak{G}}_i$  ein Umgebungssystem von  $\mathfrak{G}$  bestimmt.
3. Die Zuordnung 1 ist dieselbe wie die Zuordnung 2, und es gilt:

$$\mathfrak{H}_i \leftrightarrow \overline{\mathfrak{G}} | \overline{\mathfrak{G}}_i.$$

#### § 10.

#### Beispiel einer bei zwei verschiedenen Topologisierungen abgeschlossenen Gruppe.

Wir betrachten die abgeschlossene Gruppe  $\mathfrak{G} = \mathfrak{Y} \oplus \mathfrak{Z}_1 \oplus \mathfrak{Z}_2 \oplus \dots$ , wo  $\mathfrak{Y}$  und die  $\mathfrak{Z}_i$  vom Typus  $\mathfrak{Z}^p$  sind. Die Gruppe besteht dann aus allen endlichen und unendlichen Summen aus je einem Element jedes direkten Summanden. Sind  $\eta, \zeta_1, \zeta_2, \dots$  erzeugende Elemente von  $\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots$ , so konstruieren wir eine gewöhnliche größte (nicht abgeschlossene) Obergruppe  $\mathfrak{H}$  der (nicht abgeschlossenen) Vereinigungsgruppe  $\mathfrak{B}$  der Summanden  $\mathfrak{Z}_i$  von  $\mathfrak{G}$ , d. h. einer Gruppe, in der nur endliche Elementesummen in den  $\zeta_i$  definiert sind, die den Hp.  $\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus \dots \oplus \zeta_i \oplus \dots = \alpha$  von  $\mathfrak{B}$  nicht enthält. Diese wird nach dem Muster von Satz 5 § 1 konstruiert. Nach dieser Konstruktion werden die unendlichen Summen in den  $\zeta_i$  neu erklärt. Die in  $\mathfrak{H}$  enthaltenen unendlichen Summen behalten ihre Bedeutung als unendliche Summen bei. Wir bezeichnen nun als die unendliche Summe  $\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus \dots \oplus \zeta_n \oplus \dots$  nicht mehr das früher so genannte Element  $\alpha$ , sondern das Element  $\eta$ , während wir das frühere Element  $\alpha = \zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus \dots$  nun zu einem von  $\mathfrak{Z}_1 \oplus \mathfrak{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{Z}_n \oplus \dots$  unabhängigen Element  $\alpha$  machen.  $\{\alpha\} = \overline{\mathfrak{Y}}$ . Dann ist die neu aufgefaßte Gruppe  $\overline{\mathfrak{G}}$  wieder abgeschlossen,  $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{Z}_1 \oplus \mathfrak{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{Z}_n \oplus \overline{\mathfrak{Y}}$ , denn sie enthält wieder alle unendlichen Summen aus je einem Element der abgeschlossenen direkten Summanden.

$\overline{\mathfrak{G}}$  ist mit  $\mathfrak{G}$  identisch, wenn man beide als gewöhnliche Abelsche Gruppen auffaßt.  $\overline{\mathfrak{G}}$  ist mit  $\mathfrak{G}$  aber nicht homöomorph, wenn man beide als abgeschlossene Gruppen auffaßt. Denn die gewöhnliche Untergruppe  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{G}$  und  $\overline{\mathfrak{G}}$  hat in  $\mathfrak{G}$  einen Hp.  $\alpha$ , der nicht Hp. von  $\mathfrak{B}$  in  $\overline{\mathfrak{G}}$  ist.

**Zusatz bei der Korrektur.** In unserem Beispiel wurden die wegen der Abgeschlossenheit existierenden Zerlegungen der Gruppen trotz Nicht-Homöomorphie der Gruppenräume isomorph. Dies gilt allgemein:

**Satz.** Ist  $\mathfrak{G}$  eine unendliche Abelsche Gruppe mit  $g$ -adischem Operatorenring, und ist  $\mathfrak{G}$  auf zwei nicht homöomorphe Weisen unter Beibehaltung der Operatorzuordnung als abgeschlossen anzusehen, so sind die entstehenden Zerlegungen isomorph.

Den Beweis wollen wir nur andeuten. Durch die Operatoren allein definiert sind die größten primären direkten Summanden. Wir können daher  $\mathfrak{G}$  als primär zu  $p$ -gehörig annehmen. Da Höhe und Ordnung eines Elementes ebenfalls nur von den Operatoren abhängen, so kann man wie beim Beweis des Auswechselsatzes die Isomorphie entsprechender  $\mathfrak{I}$ -Gruppen nachweisen. Da schließlich jede abgeschlossene Gruppe des Ranges 1 im einen Raum auch abgeschlossen im anderen Raume ist, so kann man durch ein Auswechselverfahren auch feststellen, daß die Zerlegung isomorph ist.

#### Anhang.

##### Beispiel einer nicht abgeschlossenen und nicht zerlegbaren Gruppe<sup>35)</sup>.

Wir bilden die Abelsche Additionsgruppe  $\mathfrak{B}$  aller endlichen Linearformen in den Elementen  $\alpha, \alpha_k$  ( $k=1, 2, \dots$ )

$$\mathfrak{B} = \{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}.$$

Zwischen  $\alpha$  und den  $\alpha_k$  sollen folgende Relationen bestehen:

$$p \cdot \alpha = \omega,$$

$$p^k \cdot \alpha_k = \alpha.$$

$\mathfrak{B}$  enthält also Elemente nur endlicher, zur Primzahl  $p$  gehöriger Ordnung. Sonst sollen keine weiteren Relationen bestehen, d. h. es soll keine Linearform geben, für die

$$c \cdot \alpha + c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n = \omega \quad (c_n \not\equiv 0 \pmod{p^n}).$$

In der Gruppe  $\mathfrak{B}$  läßt sich nicht, wie immer in abgeschlossenen Gruppen, zu jedem Element der Ordnung  $p$  ein direkter Summand des Ranges 1

<sup>35)</sup> Dieses Beispiel stammt von H. Prüfer: Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Zeitschrift 17 (1923), S. 60.





von § 9. Insbesondere sind in  $\overline{\mathfrak{B}}$  auch folgende Elemente enthalten:

$$\begin{array}{ll}
 \zeta_1 \equiv p^{k-1} \alpha_k (\mathfrak{G}_k) & [k = 1, 2, \dots] \\
 \zeta_1 \equiv \alpha_1 & (\mathfrak{G}_0) \\
 \hline
 p \zeta_1 = \alpha, & \\
 \zeta_2 \equiv p^{k-1} \alpha_{k+1} (\mathfrak{G}_k) & [k = 1, 2, \dots] \\
 \zeta_2 \equiv \alpha & (\mathfrak{G}_0) \\
 \hline
 p \zeta_2 = \zeta_1, & \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \zeta_n \equiv p^{k-1} \alpha_{k+n-1} (\mathfrak{G}_k) & [k = 1, 2, \dots] \\
 \zeta_n \equiv \alpha_n & (\mathfrak{G}_0) \\
 \hline
 p \zeta_n = \zeta_{n-1}, & \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot
 \end{array}$$

$\mathfrak{F} = \{\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots\}$  ist dann eine Servanzuntergruppe vom Typus  $\mathfrak{B}_p$  von  $\overline{\mathfrak{B}}$ , die also abgeschlossen ist.  $\mathfrak{F}$  ist sogar direkter Summand. Die  $\mathfrak{F}_i$  sind als endliche Gruppen schon abgeschlossen. Der Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen  $\overline{\mathfrak{G}_i}$  der  $\mathfrak{G}_i$  ist nun nicht mehr  $\{\alpha\}$ , sondern  $\mathfrak{F}$ :

$$\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{F}_n \oplus \dots \oplus \mathfrak{F},$$

wobei man nun unendliche Summen bilden darf.

(Eingegangen am 3. 8. 1930.)

# Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren.

Von

J. v. Neumann in Berlin.

## 1. Die sogenannte Vertauschungsrelation

$$PQ - QP = \frac{\hbar}{2\pi i} 1$$

ist in der neuen Quantentheorie von fundamentaler Bedeutung, sie ist es, die den „Koordinaten-Operator“  $R$  und den „Impuls-Operator“  $P$  im wesentlichen definiert<sup>1)</sup>. Mathematisch gesprochen, liegt darin die folgende Annahme: Seien  $P, Q$  zwei Hermitesche Funktionaloperatoren des Hilbertschen Raumes, dann werden sie durch die Vertauschungsrelation bis auf eine Drehung des Hilbertschen Raumes, d. i. eine unitäre Transformation  $U$ , eindeutig festgelegt<sup>2)</sup>. Es liegt im Wesen der Sache, daß noch der Zusatz gemacht werden muß: vorausgesetzt, daß  $P, Q$  ein irreduzibles System bilden (vgl. weiter unten Anm. <sup>6)</sup>). Wird nun, wie es sich durch die Schrödingersche Fassung der Quantentheorie als besonders günstig erwies, der Hilbertsche Raum als Funktionenraum interpretiert — der Einfachheit halber etwa als Raum aller komplexen Funktionen  $f(q)$  ( $-\infty < q < +\infty$ ) mit endlichem  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(q)|^2 dq$  —, so gibt es nach Schrödinger ein besonders einfaches Lösungssystem der Vertauschungsrelation

$$Q: f(q) \rightarrow q f(q), \quad P: f(q) \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{d}{dq} f(q) \text{ } ^3).$$

<sup>1)</sup> Vgl. Born-Heisenberg-Jordan, Zeitschr. f. Phys. 34 (1925), S. 858—888, ferner Dirac, Proc. Roy. Soc. 109 (1925) u. f. Besonders in der letztgenannten Darstellung ist die Rolle dieser Relation fundamental. Einen interessanten Versuch zur Begründung des im folgenden zu diskutierenden Eindeutigkeitsatzes machte Jordan, Zeitschr. f. Phys. 37 (1926), S. 383—386. Indessen beruht dieser auf Konvergenzannahmen über Potenzreihen unbeschränkter Operatoren, deren Gültigkeitsbereich fraglich ist.

<sup>2)</sup> Dieselbe bewirkt ein Ersetzen von  $P, Q$  durch  $UPU^{-1}, UQU^{-1}$ , wodurch weder der Hermitesche Charakter noch das Bestehen der Vertauschungsrelation berührt wird.

<sup>3)</sup> Vgl. Schrödinger, Annalen d. Phys. 79 (1926), S. 734—756.

Sind nun dies die im wesentlichen einzigen (irreduziblen) Lösungen der Vertauschungsrelation?

Indessen ist die Aufgabe in dieser Form nicht genügend präzise formuliert. Denn als  $P, Q$  sind, wie es die Schrödingerschen Lösungen zeigen, auch unbeschränkte, nicht überall definierte Operatoren ins Auge zu fassen, und für diese wird der Operator  $PQ - QP$  nicht überall definiert sein, während es der (auf der anderen Seite der Vertauschungsrelation stehende) Operator  $\frac{\hbar}{2\pi i} 1$  ist. Die beiden Seiten können also nur gleichgesetzt werden,

wenn ihre Definitionsbereiche (d. h. der der linken Seite) näher umschrieben werden. Dieser Schwierigkeit kann man folgendermaßen aus dem Wege gehen:

Durch formale Operatorenrechnung folgt aus der Vertauschungsrelation ( $F(x)$  analytisch,  $F'(x)$  seine Ableitung, vgl. Anm. <sup>1)</sup>)

$$PF(Q) - F(Q)P = \frac{\hbar}{2\pi i} F'(Q),$$

und hieraus für  $F(x) = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \beta x}$

$$e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \beta Q} P e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \beta Q} = P + \beta 1.$$

Hieraus folgt wieder formal

$$e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \beta Q} F(P) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \beta Q} = F(P + \beta 1),$$

und somit für  $F(x) = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \alpha x}$

$$e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \alpha P} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \beta Q} = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \alpha \beta} \cdot e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \beta Q} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \alpha P}.$$

Diese Gleichung ist von Weyl aufgestellt und als Ersatz der Vertauschungsrelation vorgeschlagen worden<sup>4)</sup>. Ihr großer Vorzug besteht in folgendem: Es ist unter Umständen möglich, mit Hilfe der Operatoren  $P, Q$  einparametrische Scharen  $U(\alpha) = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \alpha P}$ ,  $V(\beta) = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \beta Q}$  zu definieren, die unitär sind, und dem Multiplikationsgesetz

$$U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha + \beta), \quad V(\alpha)V(\beta) = V(\alpha + \beta)$$

genügen<sup>5)</sup>. Dann stehen auf beiden Seiten der Weylschen Gleichung

$$U(\alpha)V(\beta) = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \alpha \beta} \cdot V(\beta)U(\alpha)$$

<sup>4)</sup> Vgl. Weyl, Zeitschr. f. Phys. 46 (1928), Seite 1—46.

<sup>5)</sup> Vgl. Weyl, Anm. <sup>4)</sup>, ferner Stone, Proc. of Nat. Academy 1930. Im Schrödingerschen Falle wird, wie man leicht erkennt:

$$U(\alpha): f(q) \rightarrow f(q + \alpha), \quad V(\beta): f(q) \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \beta q} f(q).$$

unitäre, also beschränkte und überall definierte Operatoren, so daß ihr Sinn ein völlig klarer ist.

Es bliebe daher zu zeigen, daß die einzigen irreduziblen Lösungen<sup>6)</sup> der Weylschen Gleichungen die Schrödingerschen (d. h. die aus Anm. <sup>5)</sup>) sind. Beweisansätze hierfür gab Stone (vgl. Anm. <sup>5)</sup>) an, jedoch ist bisher ein Beweis auf dieser Grundlage, wie mir Herr Stone freundlichst mitteilte, nicht erbracht worden.

Im folgenden soll der genannte Eindeigkeitssatz bewiesen werden. Wir werden sogar alle (auch die reduziblen) Lösungen angeben können.

2. Sei  $\mathfrak{H}$  der Hilbertsche Raum (etwa durch alle Folgen komplexer Zahlen  $\{x_1, x_2, \dots\}$  mit endlichem  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$  realisiert; oder auch durch alle komplexen Funktionen  $f(q)$ ,  $-\infty < q < +\infty$ , mit endlichem  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(q)|^2 dq$ ).

Wir benützen die geometrische Terminologie in  $\mathfrak{H}$ , indem wir das „innere Produkt“  $(f, g)$  (gleich  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$  bzw.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(q) \bar{g}(q) dq$ ) und den „absoluten Betrag“  $|f| = \sqrt{(f, f)}$  (gleich  $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$  bzw.  $\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(q)|^2 dq}$ ) einführen<sup>7)</sup>.

Wir werden ausschließlich beschränkt-lineare (überall definierte) Operatoren in  $\mathfrak{H}$  betrachten, den transponiert-konjugierten Operator des Operators  $A$  nennen wir  $A^*$  (er ist durch  $(Af, g) = (f, A^*g)$ ,  $(f, Ag) = (A^*f, g)$  definiert). Wir erwähnen noch eins: Wenn der Operator  $A(\alpha)$  vom Parameter  $\alpha$  abhängt, so nennen wir diese Abhängigkeit meßbar, wenn alle Funktionen  $(A(\alpha)f, g)$  (dies sind komplexe Zahlenfunktionen der reellen Zahlenvariablen  $\alpha$ , dagegen betrachten wir  $f, g$  als Parameter) im Lebesgueschen Sinne in  $\alpha$  meßbar sind<sup>8)</sup>. Daß mit  $A(\alpha)$  auch  $\alpha A(\alpha)$ ,  $A(\alpha)^*$  und mit  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$  auch  $A(\alpha) + B(\alpha)$  meßbar ist, ist klar, aber auch  $A(\alpha)B(\alpha)$  ist es. Dies folgt aus den bekannten Regeln der Matrizenmultiplikation, oder auch direkt,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  sei ein vollständiges, normiertes

<sup>6)</sup> Ein System von Operatoren  $A, B, \dots$  (im vorliegenden Falle besteht es aus allen  $U(\alpha)$  und  $V(\beta)$ ) heißt irreduzibel, wenn es außer  $O$  und dem vollen Hilbertschen Raume keine abgeschlossene Linearmannigfaltigkeit (d. h. Hyperebene)  $\mathfrak{R}$  mit der folgenden Eigenschaft gibt: mit  $f$  gehören auch  $Af, Bf, \dots$  zu  $\mathfrak{R}$ . Vgl. auch die Ausführungen im Buch von Born und Jordan, Elementare Quantenmechanik. Berlin 1930.

<sup>7)</sup> Vgl. E. Schmidt, Rend. Circ. Mat. Palermo 25 (1908), S. 57–73, ferner die Arbeit des Verf., Math. Annalen 102 (1930), S. 49–131, an die die Bezeichnungen anlehnt.

<sup>8)</sup> Sei  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  ein vollständiges, normiertes Orthogonalsystem in  $\mathfrak{H}$ . Dann ist  $f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ ,  $g = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \varphi_n$ , also  $(A(\alpha)f, g) = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^N x_n \bar{y}_m (A(\alpha)\varphi_n, \varphi_m)$ . Somit genügt die Meßbarkeit der  $(A(\alpha)\varphi_n, \varphi_m)$ , d. h. der Matrizenelemente von  $A(\alpha)$  im Koordinatensystem der  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ .

Orthogonalsystem:

$$\begin{aligned}(A(\alpha)B(\alpha)f, g) &= (B(\alpha)f, A(\alpha)^*g) = \sum_{n=1}^{\infty} (B(\alpha)f, \varphi_n)(\varphi_n, A^*(\alpha)g) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{(A(\alpha)g, \varphi_n)} (B(\alpha)f, \varphi_n).\end{aligned}$$

Dasselbe gilt, wenn an der Stelle von  $\alpha$  mehrere Variable  $\alpha, \beta, \dots$  stehen. Wir kehren nun zu unserem Problem zurück, ersetzen aber in  $V(\beta)$   $\beta$  durch  $\frac{h}{2\pi}\beta$ . Dann lautet es so:

Alle  $U(\alpha), V(\beta)$  seien unitäre Operatoren, die meßbar von  $\alpha, \beta$  abhängen. Es gelten die Relationen

$$\begin{aligned}U(\alpha)U(\beta) &= U(\alpha + \beta), & V(\alpha)V(\beta) &= V(\alpha + \beta), \\ U(\alpha)V(\beta) &= e^{i\alpha\beta}V(\beta)U(\alpha).\end{aligned}$$

Alle derartigen Systeme sind zu bestimmen.

Wenn wir die (von  $\alpha, \beta$  meßbar abhängende, unitäre) Operatorenschar

$$S(\alpha, \beta) = e^{-\frac{1}{2}i\alpha\beta} U(\alpha) V(\beta) = e^{\frac{1}{2}i\alpha\beta} V(\beta) U(\alpha)$$

einführen, so können wir die obigen Relationen zu

$$S(\alpha, \beta)S(\gamma, \delta) = e^{\frac{1}{2}i(\alpha\delta - \beta\gamma)} S(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$$

zusammenfassen. Infolgedessen ist  $S(0, 0)$  die Einheit, und daher  $S(-\alpha, -\beta)$  zu  $S(\alpha, \beta)$  reziprok, also  $S(\alpha, \beta)^* = S(-\alpha, -\beta)$ . Es sollen nun Linearaggregate der  $S(\alpha, \beta)$  betrachtet werden, diese werden folgendermaßen definiert: Sei  $a(\alpha, \beta)$  eine über die ganze  $\alpha, \beta$ -Ebene absolut integrierbare Funktion, dann ist wegen der Schwarzschen Ungleichheit

$$|(S(\alpha, \beta)f, g)| \leq |S(\alpha, \beta)f| \cdot |g| = |f| \cdot |g|,$$

d. h. beschränkt, also auch das Integral

$$\iint a(\alpha, \beta) (S(\alpha, \beta)f, g) d\alpha d\beta$$

absolut konvergent. Und zwar ist es, wenn wir  $c = \iint |a(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta$  setzen, absolut  $\leq c \cdot |f| \cdot |g|$ . Dabei ist es in  $f$  linear und in  $g$  konjugiert-linear. Daher ist ein Satz von F. Riesz anwendbar<sup>9)</sup>, wonach bei festem  $f$  ein  $f^*$  existiert, so daß dieser Ausdruck für jedes  $g = (f^*, g)$  ist, und zwar ist  $|f^*| \leq c \cdot |f|$ .  $f^*$  ist durch  $f$  bestimmt, und zwar ist die Abhängigkeit linear, wir können also einen linearen Operator  $A$  durch  $Af = f^*$  definieren, nach der obigen Formel ist  $A$  auch beschränkt. Wir schreiben symbolisch

$$A = \iint a(\alpha, \beta) S(\alpha, \beta) d\alpha d\beta,$$

obwohl die Definition eigentlich

$$(Af, g) = \iint a(\alpha, \beta) (S(\alpha, \beta)f, g) d\alpha d\beta$$

lautet.  $a(\alpha, \beta)$  heiße der Kern von  $A$ .

<sup>9)</sup> Vgl. auch a. a. O. Anm. <sup>7)</sup>, Math. Annalen 102 (1930), S. 94, Anm. <sup>82)</sup>.

Wir beweisen einige Rechenregeln für diese Operatoren. Daß  $aA$  den Kern  $a(\alpha, \beta)$  hat, ist klar,  $A^*$  hat wegen  $S(\alpha, \beta) = S(-\alpha, -\beta)$  den Kern  $a(-\alpha, -\beta)$ ,  $AS(u, v)$  und  $S(u, v)A$  wegen der Multiplikationsregel der  $S(\alpha, \beta)$  den Kern

$$e^{\frac{1}{2}i(\alpha v - \beta u)} a(\alpha - u, \beta - v) \quad \text{bzw.} \quad e^{-\frac{1}{2}i(\alpha v - \beta u)} a(\alpha - u, \beta - v).$$

Haben  $A, B$  die bzw. Kerne  $a(\alpha, \beta), b(\alpha, \beta)$ , so hat  $A + B$  offenbar  $a(\alpha, \beta) + b(\alpha, \beta)$ , bei  $AB$  dagegen ist eine kleine Rechnung notwendig:

$$\begin{aligned} (ABf, g) &= (Bf, A^*g) = \iint b(\alpha, \beta) (S(\alpha, \beta)f, A^*g) d\alpha d\beta \\ &= \iint b(\alpha, \beta) (AS(\alpha, \beta)f, g) d\alpha d\beta \\ &= \iiint b(\alpha, \beta) e^{\frac{1}{2}i(\gamma\beta - \delta\alpha)} a(\gamma - \alpha, \delta - \beta) (S(\gamma, \delta)f, g) d\alpha d\beta d\gamma d\delta \\ &= \iint [\iint e^{\frac{1}{2}i(\gamma\beta - \delta\alpha)} a(\gamma - \alpha, \delta - \beta) b(\alpha, \beta) d\alpha d\beta] (S(\gamma, \delta)f, g) d\gamma d\delta. \end{aligned}$$

Der Kern von  $AB$  ist also (statt  $\gamma, \delta$  schreiben wir wieder  $\alpha, \beta$ , statt  $\alpha, \beta, \xi, \eta$ )  $\iint e^{\frac{1}{2}i(\alpha\eta - \beta\xi)} a(\alpha - \xi, \beta - \eta) b(\xi, \eta) d\xi d\eta$ . (Die absolute Integrierbarkeit folgt aus der Deduktion.)

Schließlich zeigen wir: wenn  $A$  verschwindet, so ist auch sein Kern (bis auf eine Lebesguesche Nullmenge) gleich 0. Aus  $A = 0$  folgt nämlich  $S(-u, -v)AS(u, v) = 0$ , also, da dieses den Kern  $e^{i(\alpha v - \beta u)} a(\alpha, \beta)$  hat,

$$\iint e^{i(\alpha v - \beta u)} a(\alpha, \beta) (S(\alpha, \beta)f, g) d\alpha d\beta = 0.$$

Somit ist jedenfalls

$$\iint P(\alpha, \beta) a(\alpha, \beta) (S(\alpha, \beta)f, g) d\alpha d\beta = 0,$$

wenn  $P(\alpha, \beta)$  ein Linearaggregat von endlich vielen  $e^{i(h\alpha + l\beta)}$  ist, also für jedes trigonometrische Polynom mit einer Periode  $p > 0$  in  $\alpha, \beta$ . Da der zweite Faktor absolut integrierbar ist, und der dritte beschränkt, können wir mit dem ersten ( $P(\alpha, \beta)$ ) Grenzübergänge ausführen, falls dieser dabei gleichmäßig beschränkt bleibt. So können wir die Klasse der  $P(\alpha, \beta)$  sukzessiv erweitern: 1. zu allen stetigen Funktionen mit einer Periode  $p > 0$  in  $\alpha, \beta$ , 2. zu allen beschränkten stetigen Funktionen, 3. zu allen beschränkten Funktionen der ersten Baireschen Klasse. Wenn also  $\mathfrak{R}$  ein beliebiges (endliches) Rechteck in der  $\alpha, \beta$ -Ebene ist, so können wir  $P(\alpha, \beta)$  in  $\mathfrak{R}$  gleich 1 und außerhalb  $= 0$  setzen, es wird:

$$\iint_{\mathfrak{R}} a(\alpha, \beta) (S(\alpha, \beta)f, g) d\alpha d\beta = 0$$

für alle diese  $\mathfrak{R}$ . Daher ist (mit Ausnahme einer  $\alpha, \beta$ -Nullmenge)  $a(\alpha, \beta) (S(\alpha, \beta)f, g) = 0$ . Dies gilt bei festem  $f, g$ , ist aber nur  $f$  fest, während  $g$  ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem durchläuft, so gilt es für dieses  $f$  und alle genannten  $g$  auch noch mit Ausnahme einer



$\alpha, \beta$ -Nullmenge. In diesem Falle ist aber  $\alpha(\alpha, \beta) S(\alpha, \beta) f = 0$ . Da nun für  $f \neq 0$   $|S(\alpha, \beta) f| = |f| > 0$  ist, muß dann  $\alpha(\alpha, \beta) = 0$  sein — womit alles bewiesen ist.

3. Die Lösung des Eindeutigkeits-Problems wird durch Betrachten des Operators

$$A = \iint e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2} S(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

gewonnen. Dieser Operator ist nach unseren bisherigen Resultaten hermitesch (d. h.  $A = A^*$ ) und  $\neq 0$ , und hat außerdem die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sich  $AS(u, v)A$  nur um einen Zahlenfaktor von  $A$  unterscheidet. In der Tat hat  $A$  den Kern  $e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2}$ , also  $S(u, v)A$  den Kern  $e^{-\frac{1}{2}i(\alpha v - \beta u)} e^{-\frac{1}{2}(\alpha - u)^2 - \frac{1}{2}(\beta - v)^2}$ , also  $AS(u, v)A$

$$\begin{aligned} & \iint e^{\frac{1}{2}i(\alpha \eta - \beta \xi)} e^{-\frac{1}{2}(\alpha - \xi)^2 - \frac{1}{2}(\beta - \eta)^2} e^{-\frac{1}{2}i(\xi v - \eta u)} e^{-\frac{1}{2}(\xi - u)^2 - \frac{1}{2}(\eta - v)^2} d\xi d\eta \\ &= \iint e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 + (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}i\beta - \frac{1}{2}i\eta)\xi + (\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}i\alpha + \frac{1}{2}i\eta)\eta - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2} d\xi d\eta \\ &= e^{-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2} \iint e^{-\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}(\alpha + u - i\beta - i\eta)\xi - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}(\beta + v + i\alpha + i\eta)\eta} d\xi d\eta \\ &= e^{-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2} \iint e^{-\frac{1}{2}(\xi - \frac{1}{2}(\alpha + u - i\beta - i\eta))^2 - \frac{1}{2}(\eta - \frac{1}{2}(\beta + v + i\alpha + i\eta))^2} d\xi d\eta \\ &= e^{-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2} \iint e^{-\frac{1}{2}\alpha'^2 - \frac{1}{2}\beta'^2} d\alpha' d\beta' \\ &= 2\pi e^{-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2}. \end{aligned}$$

Hierin ist der erste Faktor konstant und der zweite der Kern von  $A$ , also gilt

$$AS(u, v)A = 2\pi e^{-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2} \cdot A.$$

Wir betrachten nun die Lösungen der Gleichung  $Af = 2\pi f$ , da  $A$  linear-beschränkt ist, bilden sie eine abgeschlossene Linearmannigfaltigkeit im Hilbertschen Raume,  $\mathfrak{M}$ . Jede von ihnen hat die Form  $Ag$  (mit  $g = \frac{1}{2\pi}f$ ), und umgekehrt gehört jedes  $Ag$  zu ihnen, da  $A^2 = 2\pi \cdot A$  ist (man setze in der obigen Gleichung  $u = v = 0$ ). Die zu  $\mathfrak{M}$  orthogonale abgeschlossene Linearmannigfaltigkeit sei  $\mathfrak{N}$ , die Elemente  $f$  von  $\mathfrak{N}$  sind durch Orthogonalität zu allen Elementen von  $\mathfrak{M}$  gekennzeichnet, d. h. zu allen  $Ag$ . D. h.: immer  $(f, Ag) = 0$ , oder: immer  $(Af, g) = 0$ , oder:  $Af = 0$ .

Wenn  $f, g$  zu  $\mathfrak{N}$  gehören, so ist

$$\begin{aligned} (S(\alpha, \beta) f, S(\gamma, \delta) g) &= \frac{1}{4\pi^2} (S(\alpha, \beta) Af, S(\gamma, \delta) Ag) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} (AS(-\gamma, -\delta) S(\alpha, \beta) Af, g) = \frac{1}{4\pi^2} e^{\frac{1}{2}i(\alpha\delta - \beta\gamma)} (AS(\alpha - \gamma, \beta - \delta) Af, g) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)^2 - \frac{1}{2}(\beta - \delta)^2 + \frac{1}{2}i(\alpha\delta - \beta\gamma)} (Af, g) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)^2 - \frac{1}{2}(\beta - \delta)^2 + \frac{1}{2}i(\alpha\delta - \beta\gamma)} (f, g). \end{aligned}$$

Sei nun  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  ein normiertes Orthogonalsystem, welches in  $\mathfrak{M}$  vollständig ist (d. h.  $\mathfrak{M}$  aufgespannt, die Zahl seiner Elemente ist endlich oder abzählbar unendlich). Aus  $(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn}$  (d. i. 1 für  $m = n$ , 0 sonst) folgt

$$(S(\alpha, \beta) \varphi_m, S(\gamma, \delta) \varphi_n) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)^2 - \frac{1}{2}(\beta-\delta)^2 + \frac{1}{2}i(\alpha\delta - \beta\gamma)} \delta_{mn}.$$

Die durch alle  $S(\alpha, \beta) \varphi_n$  ( $n$  fest,  $\alpha, \beta$  variieren) aufgespannte abgeschlossene Linearmannigfaltigkeit heiße  $\mathfrak{P}_n$ , nach der obigen Formel sind für  $m \neq n$   $\mathfrak{P}_m, \mathfrak{P}_n$  zueinander orthogonal. Die  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$  mögen zusammen die abgeschlossene Linearmannigfaltigkeit  $\mathfrak{S}$  aufspannen, die zu  $\mathfrak{S}$  komplementäre abgeschlossene Linearmannigfaltigkeit sei  $\mathfrak{T}$ .

Da jedes  $S(\gamma, \delta)$  die  $S(\alpha, \beta) \varphi_n$  (bis auf Zahlenfaktoren) in ebensolche transformiert, bildet es  $\mathfrak{P}_n$  auf ein Teil von sich ab; da dasselbe für  $S(\gamma, \delta)^{-1} = S(-\gamma, -\delta)$  gilt, ist  $\mathfrak{P}_n$  genau invariant. Also ist auch  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{T}$  invariant.  $\mathfrak{S}$  umfaßt alle  $\mathfrak{P}_n$ , also alle  $\varphi_n$ , also  $\mathfrak{M}$ , daher liegt  $\mathfrak{T}$  in  $\mathfrak{N}$ . Somit gilt in  $\mathfrak{T}$  stets  $Af = 0$ . Nun gelten alle unsere über  $A$  angestellten Betrachtungen schon in  $\mathfrak{T}$ , denn die  $S(\alpha, \beta)$  können als Operatoren in  $\mathfrak{T}$  angesehen werden, da dieses ihnen gegenüber invariant ist. Da nun in  $\mathfrak{T}$   $A \equiv 0$  ist, kann nach unserem Beweise in  $\mathfrak{T}$  niemals  $f \neq 0$  sein. Also enthält  $\mathfrak{T}$  nur die 0,  $\mathfrak{S}$  ist der Hilbertsche Raum, d. h.:  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$  spannen den vollen Hilbertschen Raum auf.

Der Hilbertsche Raum erscheint somit als in eine endliche oder abzählbar unendliche Zahl von (paarweise orthogonalen) Unterräumen  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$  zerlegt; jeder derselben ist gegenüber allen  $S(\alpha, \beta)$  invariant, es genügt also das Verhalten der  $S(\alpha, \beta)$  (d. i. der  $U(\alpha), V(\beta)$ ) in einem jeden derselben gesondert zu ermitteln, um über sie restlos informiert zu sein. (Im Falle der Irreduzibilität darf es natürlich nur ein  $\mathfrak{P}_n$  geben, und dieses ist dann der volle Hilbertsche Raum.) In  $\mathfrak{P}_n$  wissen wir nun über die  $S(\alpha, \beta)$  die folgenden Tatsachen:

Wir nennen  $\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}$ ,  $S(\alpha, \beta) \varphi_n = f_{\alpha, \beta}$ . Dann gilt:

$$S(\gamma, \delta) f_{\alpha, \beta} = e^{\frac{1}{2}i(\beta\gamma - \alpha\delta)} f_{\alpha+\gamma, \beta+\delta},$$

$$(f_{\alpha, \beta}, f_{\gamma, \delta}) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)^2 - \frac{1}{2}(\beta-\delta)^2 + \frac{1}{2}i(\alpha\delta - \beta\gamma)},$$

und die Linearaggregate endlich vieler  $f_{\alpha, \beta}$  (die beliebig wählbar sind!) liegen in  $\mathfrak{P}$  überall dicht.

Wenn wir nun zeigen können, daß irgend zwei solche  $\mathfrak{P}$ , in deren jedem eine Schar von unitären Operatoren  $S(\alpha, \beta)$  und Punkten  $f_{\alpha, \beta}$  mit den obigen Eigenschaften gegeben ist, isomorph sind, so sind wir am Ziele. Isomorphie bedeutet: Existenz einer ein-eindeutigen, linearen und längentreuen Abbildung der beiden  $\mathfrak{P}$  aufeinander, die die  $f_{\alpha, \beta}$  und  $S(\alpha, \beta)$  des einen  $\mathfrak{P}$  in dieselben des anderen überführt.

Unsere Formel für  $(f_{\alpha\beta}, f_{\gamma\delta})$  erlaubt für jedes Linearaggregat endlich vieler  $f_{\alpha\beta}$  den Absolutwert zu berechnen, wenn wir also die gleichlautenden  $f_{\alpha\beta}$ -Linearaggregate beider  $\mathfrak{P}$  einander zuordnen, so haben wir eine eindeutige, lineare und längentreue Abbildung dieser Mengen aufeinander. Da sie in den bzw.  $\mathfrak{P}$  überall dicht sind, sind sie stetig auf die ganzen  $\mathfrak{P}$  ausdehnbar. Dabei bleiben Linearität und Längentreue, also auch Eindeutigkeit, erhalten. Die bzw.  $f_{\alpha\beta}$  entsprechen einander. Wegen der  $S(\gamma, \delta) f_{\alpha\beta}$ -Formeln gehen auch die  $S(\gamma, \delta)$  in ihre entsprechenden über: wenigstens für die  $f_{\alpha\beta}$ , aber dann auch für deren Linearaggregate und Häufungspunkte — also in ganz  $\mathfrak{P}$ . Damit ist, wenn wir wieder zu den  $U(\alpha), V(\beta)$  zurückkehren, folgendes bewiesen:

Ein System unitärer Operatoren  $U(\alpha), V(\beta)$  nebst einem System von Punkten  $f_{\alpha\beta}$ , die zusammen den ganzen Hilbertschen Raum aufspannen, ist durch die Eigenschaften

$$\begin{aligned} V(\gamma) f_{\alpha\beta} &= e^{\frac{1}{2}i\beta\gamma} f_{\alpha+\gamma, \beta}, \quad V(\delta) f_{\alpha\beta} = e^{-\frac{1}{2}i\alpha\delta} f_{\alpha, \beta+\delta}, \\ (f_{\alpha\beta}, f_{\gamma\delta}) &= e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)^2 - \frac{1}{2}(\beta-\delta)^2 + \frac{1}{2}i(\alpha\delta - \beta\gamma)}, \end{aligned}$$

bis auf eine unitäre Transformation<sup>10)</sup> eindeutig festgelegt.

Ein System unitärer Operatoren  $U(\alpha), V(\beta)$  mit den Weylschen Multiplikations-Relationen (vgl. 1.) ist entweder eines der soeben genannten Systeme, oder es entsteht dadurch, daß der Hilbertsche Raum in endlich oder abzählbar unendlich viele (paarweise orthogonale, Hilbertsche) Unterräume zerfällt, und in jedem derselben ein solches System angenommen wird. D. h. es entsteht durch das Zusammenfügen derselben.

Die irreduziblen Lösungen sind offenbar die ersteren (die Zahl der linear unabhängigen Lösungen von  $Af = 2\pi \cdot f$  nimmt für sie ihren Minimalwert 1 an).

4. Zum Schluß noch einige Zusatzbemerkungen.

Im Falle der Schrödingerschen Operatoren haben wir  $U(\alpha), V(\beta)$  in Anm. <sup>5)</sup> angegeben:  $f(q) \rightarrow f(q + \alpha)$ ,  $f(q) \rightarrow e^{i\beta q} f(q)$  ( $\frac{\hbar}{2\pi}\beta$  statt  $\beta!$ ), daher ist  $S(\alpha, \beta): f(q) \rightarrow e^{i\beta(q + \frac{\alpha}{2})} f(q + \alpha)$ , und, wie man leicht berechnet,  $A:$   
 $f(q) \rightarrow \sqrt{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}q'^2 - \frac{1}{2}q'^2} f(q') dq'$ . Die einzigen Lösungen von  $Af = 2\pi \cdot f$  sind also die  $c \cdot e^{-\frac{1}{2}q^2}$ , somit ist  $\varphi_1 = \varphi_1(q) \equiv \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}q^2}$ , und

$$f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}(q) \equiv \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}(q+\alpha)^2 + i\beta(q + \frac{\alpha}{2})} \equiv \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}q^2 + (-\alpha + i\beta)q + (-\frac{\alpha^2}{2} + \frac{i\alpha\beta}{2}}.$$

Man verifiziert dann leicht unsere diesbezüglichen Formeln. —

<sup>10)</sup> Sie heiße  $U$ , dann bewirkt sie (vgl. Anm. <sup>5)</sup>)

$$U(\alpha) \rightarrow U U(\alpha) U^{-1}, \quad V(\beta) \rightarrow U V(\beta) U^{-1}, \quad f_{\alpha\beta} \rightarrow U f_{\alpha\beta}.$$

Bei quantenmechanischen Problemen mit  $k$  ( $= 1, 2, \dots$ ) Freiheitsgraden tritt das allgemeine Vertauschungsrelationen-System

$$\left. \begin{aligned} P_m P_n &= P_n P_m, & Q_m Q_n &= Q_n Q_m, \\ P_m Q_n - Q_n P_m &= \frac{\hbar}{2\pi i} \delta_{mn} \cdot 1 \end{aligned} \right\} \quad (m, n = 1, \dots, k)$$

auf. Durch Einführen von

$$U_n(\alpha) = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \alpha P_n}, \quad V_n(\beta) = e^{i\beta Q_n} \quad (n = 1, \dots, k)$$

entstehen hieraus die Weylschen Relationen

$$\begin{aligned} U_n(\alpha) U_n(\beta) &= U_n(\alpha + \beta), & V_m(\alpha) V_n(\beta) &= V_n(\alpha + \beta), \\ U_n(\alpha) U_m(\beta) &= U_m(\beta) U_n(\alpha), & V_m(\alpha) V_n(\beta) &= V_n(\beta) V_m(\alpha), \\ U_m(\alpha) V_n(\beta) &= e^{i\delta_{mn} \cdot \alpha \beta} \cdot V_n(\beta) U_m(\alpha). \end{aligned}$$

Auch hier ist der Eindeutigkeitsbeweis mit unseren Methoden aus 2. bis 3. durchführbar. Wir setzen

$$\begin{aligned} S(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k) &= e^{-\frac{1}{2}i(\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_k\beta_k)} U(\alpha_1) \dots U(\alpha_k) V(\beta_1) \dots V(\beta_k) \\ &= e^{\frac{1}{2}i(\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_k\beta_k)} V(\beta_1) \dots V(\beta_k) U(\alpha_1) \dots U(\alpha_k) \end{aligned}$$

und

$$1 = \iint \dots \iint e^{-\frac{1}{2}\alpha_1^2 - \dots - \frac{1}{2}\alpha_k^2 - \frac{1}{2}\beta_1^2 - \dots - \frac{1}{2}\beta_k^2} S(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k) d\alpha_1 \dots d\alpha_k d\beta_1 \dots d\beta_k$$

Dann können wir, genau wie in 3.,

$$A S(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k) A = (2\pi)^k e^{-\frac{1}{2}u_1^2 - \dots - \frac{1}{2}u_k^2 - \frac{1}{2}v_1^2 - \dots - \frac{1}{2}v_k^2} A$$

beweisen, und (durch Untersuchen der Lösungen von  $Af = (2\pi)^k \cdot f$ ) genau wie dort ans Ziel kommen. —

Vom allgemeinen darstellungstheoretischen Gesichtspunkte aus betrachtet, ist unsere Betrachtungsweise mit der Frobeniusschen Behandlung endlicher Gruppen mittels ihrer „charakteristischen Einheiten“ verwandt bzw. mit der Weylschen Untersuchung abgeschlossener kontinuierlicher Gruppen mit Hilfe ihrer Gruppennzahlen<sup>11)</sup>. Die Operatoren  $A = \iint a(\alpha, \beta) S(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$  sind nämlich als „Gruppennzahlen“ der  $S(\alpha, \beta)$ -Gruppe deutbar, und  $AS(u, v)A = c_{u,v} A$  ( $c_{u,v}$  eine Zahl!) ist der definierenden Eigenschaft der „primitiven“ charakteristischen Einheiten gleichwertig.

<sup>11)</sup> Vgl. Frobenius, Berl. Ber. 1896 u. f., Peter und Weyl, Math. Annalen 96 (1926), S. 737—755.

(Eingegangen am 31. 8. 1930.)

## Über gewisse Differential- und allgemeinere Gleichungen, deren Lösungen fastperiodisch sind.

### III. Teil<sup>1)</sup>: Systeme von Gleichungen.

Von

S. Bochner in München.

Die Veröffentlichung der nachfolgenden Überlegungen dürfte sich (abgesehen davon, daß Anwendungen in Frage kommen) durch den Umstand rechtfertigen, daß wir die Systeme von Gleichungen auf die einzelnen Gleichungen *zurückführen*, während man bei anderen Anlässen Systeme von Gleichungen *ab ovo* und nur *in Analogie* zu einzelnen Gleichungen zu erörtern pflegt. In unserem Falle läßt sich eine Zurückführung deswegen bewerkstelligen, weil unsere Behandlungsweise es gestattete, die einzelnen Gleichungen in recht allgemeiner Form zu diskutieren. Wir bemerken noch, daß über Systeme von Differenzgleichungen in bezug auf unsere Fragestellung bisher anscheinend nichts veröffentlicht worden ist.

#### § 1.

##### Formulierung der Sätze.

Wir betrachten im Intervall  $-\infty < x < +\infty$  das System von Differentialgleichungen

$$(A) \quad y'_\mu(x) = \sum_{\nu=1}^m a_{\mu\nu} y_\nu(x) + f_\mu(x) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

bzw. von Differenzgleichungen

$$(B) \quad y_\mu(x + \delta_\mu) = \sum_{\nu=1}^m a_{\mu\nu} y_\nu(x) + f_\mu(x) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m);$$

<sup>1)</sup> Der I. Teil, den wir mit „I“ zitieren werden, ist in den Math. Annalen 102 (1929), S. 489–504, erschienen; der II. Teil, den wir mit „II“ zitieren werden, in den Math. Annalen 103 (1930), S. 588.

die  $a_{\mu\nu}$  sind Konstanten, die  $\delta_{\mu}$  sind positive Konstanten (z. B.  $\delta_{\mu} = 1$ ) und die  $f_{\mu}(x)$  sind fastperiodische Funktionen. Wir beschäftigen uns mit der Fragestellung, inwiefern Lösungen  $y_{\mu}(x)$  existieren, welche gleichfalls fastperiodisch sind.

Der Kürze wegen nennen wir eine „Lösung“ ein System von Funktionen  $y_{\mu}(x)$ , welche dem vorgelegten Gleichungssystem genügen. Wir nennen die Lösung fastperiodisch, beschränkt, gleichmäßig stetig, differenzierbar usw., falls jede einzelne Funktion  $y_{\mu}(x)$  fastperiodisch, beschränkt, gleichmäßig stetig, differenzierbar usw. ist.

Wie immer spielen die charakteristischen Funktionen eine Rolle. Im Falle (A) ist es das Polynom  $m$ -ten Grades

$$(1) \quad G(\lambda) = \begin{vmatrix} i\lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots \\ -a_{21} & i\lambda - a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix},$$

im Falle (B) das Exponentialpolynom

$$(2) \quad G(\lambda) = \begin{vmatrix} e^{i\delta_1\lambda} - a_{11} & -a_{12} & \dots \\ -a_{21} & e^{i\delta_2\lambda} - a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Letzteres ist von der Gestalt  $\sum_1^r a_e e^{i\omega_e \lambda}$ , mit reellen Exponenten  $\omega_e$ , und ist, wegen der Voraussetzung  $\delta_{\mu} > 0$  (die nur zu diesem Zweck gemacht worden ist), sicherlich nicht identisch Null.

**Beschränktheitssatz A.** *Jede Lösung des Systems (A), welche beschränkt ist, ist fastperiodisch.*

**Beschränktheitssatz B.** *Jede Lösung des Systems (B), welche beschränkt und gleichmäßig stetig ist, ist fastperiodisch. Ist die charakteristische Funktion  $G(\lambda)$  für  $-\infty < \lambda < +\infty$  wesentlich<sup>2)</sup> von Null verschieden, so ist jede Lösung, welche beschränkt ist, auch schon gleichmäßig stetig und daher fastperiodisch.*

**Existenzsatz A.** *Damit das System (A) eine fastperiodische Lösung besitzt, ist eine der nachfolgenden Voraussetzungen hinreichend:*

- Die charakteristische Funktion  $G(\lambda)$  hat keine reellen Nullstellen.
- Zu jeder reellen Nullstelle  $\lambda$  von  $G(\lambda)$  mit der Vielfachheit  $l$  gibt es für jedes  $\mu$  eine fastperiodische Funktion, deren  $l$ -te Ableitung mit  $e^{-i\lambda x} f_{\mu}(x)$  übereinstimmt.

<sup>2)</sup> D. h. ist  $|G(\lambda)| \geq \alpha > 0$  in  $-\infty < \lambda < +\infty$ .

Im Falle a) ist die fastperiodische Lösung eindeutig, im Falle b) nur bis auf gewisse Exponentialpolynome.

Bemerkung. Damit es zu einer fastperiodischen Funktion  $f(x)$  eine andere fastperiodische Funktion gibt, deren  $l$ -te Ableitung mit  $e^{-i\lambda x} f(x)$  übereinstimmt, ist (vgl. I, § 3, 3 und 6) notwendig, daß in der Fourierreihe  $\sum a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$  von  $f(x)$  der Fourierexponent  $\lambda_n = \lambda$  nicht vorkommt, und hinreichend, daß alle Fourierexponenten  $\lambda_n$  außerhalb eines Intervalles  $\lambda - \eta \leq \lambda \leq \lambda + \eta$  gelegen sind.

Existenzsatz B. Damit das System (B) eine fastperiodische Lösung besitzt, ist eine der folgenden Voraussetzungen hinreichend:

a) Die charakteristische Funktion ist für  $-\infty < \lambda < +\infty$  wesentlich von Null verschieden.

b) Die charakteristische Funktion hat keine reellen Nullstellen<sup>\*)</sup> und die Fourierexponenten der Funktionen  $f_\mu(x)$  sind beschränkt,

$$|\lambda_n| \leq K.$$

c) Die Fourierexponenten der Funktionen  $f_\mu(x)$  sind beschränkt,  $|\lambda_n| \leq K$ . Zu jeder im Intervalle  $-K \leq \lambda \leq +K$  gelegenen Nullstelle  $\lambda$  von  $G(\lambda)$  mit der Vielfachheit  $l$  gibt es für jedes  $\mu$  eine fastperiodische Funktion, deren  $l$ -te Ableitung mit  $e^{-i\lambda x} f_\mu(x)$  übereinstimmt.

In den Fällen a) und b) ist die fastperiodische Lösung eindeutig. Wegen c) vgl. § 4.

## § 2.

### Ein weiterer Satz.

Unter einem Funktional  $L(y)$  wollen wir irgendeinen Differenzendifferential-Ausdruck

$$(4) \quad \sum_{\sigma=0}^r \sum_{\alpha=0}^s a_{\sigma\alpha} y^{(\alpha)}(x + \delta_\sigma)$$

mit Konstanten  $a_{\sigma\alpha}$  und (beliebigen) reellen Zahlen  $\delta_\sigma$  verstehen. Wir ordnen ihm als charakteristische Funktion  $G(\lambda)$  die Funktion

$$(5) \quad \sum_{\sigma=0}^r \sum_{\alpha=0}^s a_{\sigma\alpha} (i\lambda)^\alpha e^{i\delta_\sigma \lambda}$$

zu. Jede Funktion der Gestalt (5) repräsentiert umgekehrt ein eindeutiges Funktional (4). Wegen dieser umkehrbaren Eindeutigkeit werden wir das Funktional (4) auch durch das Symbol

$$(6) \quad G[y]$$

<sup>\*)</sup> Kommt aber für reelle Argumente  $\lambda$  dem Werte Null beliebig nahe.



darstellen<sup>4)</sup>. Repräsentieren  $G_1(\lambda)$  und  $G_2(\lambda)$  zwei Funktionale, so besteht, wie man sich leicht überzeugt, die Beziehung

$$(7) \quad G_1[G_2[y]] = G_1 G_2[y] = G_2[G_1[y]].$$

Hierbei ist unter  $G_1 G_2(\lambda)$  das gewöhnliche Produkt der Funktionen  $G_1(\lambda)$  und  $G_2(\lambda)$  gemeint.

Wenn man unter einer „Derivierten“ von  $L(y)$  ein Funktional versteht, welches aus dem Funktional  $L(y)$  dadurch hervorgeht, daß man es einmal (formal) differenziert und in ihm das Argument  $x$  um eine reelle Konstante abändert, so ist das Funktional  $G_1 G_2[y]$  eine lineare Verbindung mit konstanten Koeffizienten aus Derivierten von  $G_2[y]$ .

Gegeben seien  $m^2$  Funktionale  $L_{\mu\nu}(y)$ ,  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, m$ , welche der einzigen Einschränkung unterworfen sein sollen, daß die mit ihren charakteristischen Funktionen  $G_{\mu\nu}(\lambda)$  gebildete Determinante

$$(8) \quad G(\lambda) = \|G_{\mu\nu}(\lambda)\|$$

nicht identisch in  $\lambda$  verschwinden soll,

$$(9) \quad G(\lambda) \not\equiv 0.$$

Dann betrachten wir das Gleichungssystem

$$(C) \quad \sum_{\nu=1}^m L_{\mu\nu}(y_\nu) = f_\mu(x) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

für fastperiodische Funktionen  $f_\mu(x)$  als Gleichungssystem für die Funktionen  $y_\nu(x)$ . Die Systeme (A) und (B) sind Spezialfälle von (C).

Die Bedingung (9) hat eine einfache funktionale Bedeutung. Wir fassen für jedes  $\mu$  den Ausdruck

$$(10) \quad L_\mu(y) = \sum_{\nu=1}^m L_{\mu\nu}(y_\nu)$$

als ein Funktional in den  $m$  Funktionen  $y_\nu(x)$  auf und definieren den Begriff der Derivierten von  $L_\mu(y)$  analog wie für  $m = 1$ . Die Bedingung (9) ist dann, wie man unschwer einsieht, notwendig und hinreichend dafür, daß die Gesamtheit der Formen  $L_\mu(y)$  und ihrer Derivierten im üblichen Sinne linear unabhängig sein soll.

**Beschränktheitsatz C.** *Gegeben seien Lösungsfunktionen  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  des Systems (C). Falls diese Funktionen mitsamt ihren explizit in (C) auftretenden Ableitungen beschränkt und gleichmäßig stetig sind, so sind sie mitsamt diesen Ableitungen fastperiodisch.*

Einen Existenzsatz C wollen wir, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, nicht formulieren.

<sup>4)</sup> Man verwechale nicht die Funktion  $G(\lambda)$  mit dem Funktional  $G[y]$ .

## § 3.

## Beweise der Beschränktheitsätze.

**Satz A.** Man kann in bekannter Weise das vorgegebene Gleichungssystem durch ein äquivalentes von der vereinfachten Gestalt

$$(11) \quad y'_\mu(x) = \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} y_\nu(x) + f_\mu(x) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

ersetzen. Hierbei gehen die „neuen“ Funktionen  $y_\mu(x)$  bzw.  $f_\mu(x)$  aus den entsprechenden „alten“ durch eine umkehrbare lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten hervor. Wie man sehr leicht einsieht, genügt es, unseren Satz für das System (11) zu beweisen. Nach dem Beschränktheitsatz für eine einzelne Gleichung<sup>5)</sup> ist  $y_1(x)$  als Lösung der Gleichung

$$y'_1(x) - a_{11} y_1(x) = f_1(x)$$

fastperiodisch. Schreibt man

$$y'_2 - a_{21} y_1 = a_{22} y_2 + f_2,$$

und benutzt man, daß  $y_1$  bereits als fastperiodisch erkannt worden ist, so ergibt sich, daß auch  $y_2(x)$  fastperiodisch ist. Ähnlich schließt man, daß  $y_3(x)$  fastperiodisch ist, und so fort bis  $y_m(x)$ .

**Satz B.** Wir beweisen die Behauptungen etwas allgemeiner für ein Gleichungssystem (C), in welchem jedes  $L_{\mu\nu}(y)$  ein reiner Differenzenausdruck der Gestalt  $\sum_a a_{\mu\nu} y(x + \delta_a)$  ist.

Zur rechnerischen Bequemlichkeit schreiben wir (C) in der Gestalt

$$(12) \quad \sum_{\nu=1}^m G_{\mu\nu}[y_\nu] = f_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Jetzt ziehen wir die mit passenden Vorzeichen versehenen  $(n-1)$ -reihigen Unterdeterminanten  $g_{\mu\nu}(\lambda)$  von  $G(\lambda)$  heran, für welche

$$(13) \quad \sum_{\nu=1}^m G_{\nu\mu} g_{\nu\mu} = G E_{\mu\nu} = \begin{cases} G, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Da im vorliegenden Falle die  $g_{\mu\nu}(\lambda)$  charakteristische Funktionen reiner Differenzenausdrücke sind, kann man für jedes  $\mu$  die Relation (12) links und rechts mit  $g_{\mu 1}$  „multiplizieren“. Dies ergibt

$$(14) \quad \sum_{\nu=1}^m g_{\mu 1} G_{\mu\nu}[y_\nu] = g_{\mu 1}[f_\mu].$$

Wenn man noch über  $\mu$  summiert, erhält man

$$(15) \quad G[y_1] = \sum_{\mu=1}^m g_{\mu 1}[f_\mu].$$

<sup>5)</sup> Und zwar bereits nach dem Satz von Bohr und Neugebauer.

Führen wir das zu  $G(\lambda)$  gehörige Differenzenfunktional  $L(y)$  ein, so können wir für (15) schreiben

$$(16) \quad L(y_1) = F_1(x),$$

wobei  $F_1(x)$  die rechts in (15) stehende fastperiodische Funktion bedeutet. Allgemein erhält man für jedes  $\nu$

$$(17) \quad L(y_\nu) = F_\nu(x).$$

Unsere Behauptungen ergeben sich nunmehr aus einem Satz in II, § 1.

**Satz C.** 1. Zuerst setzen wir voraus:  $\alpha$ ) daß alle gegebenen Funktionen  $y_\nu(x)$  und  $f_\nu(x)$  Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzen, und  $\beta$ ) daß die Funktionen  $y_\nu(x)$  bzw.  $f_\nu(x)$  mitsamt allen ihren Ableitungen beschränkt und gleichmäßig stetig bzw. fastperiodisch sind. Ist irgendeine charakteristische Funktion  $g(\lambda)$  gegeben, so kann man auf Grund von  $\alpha$ ) die Gleichung (12) links und rechts mit  $g(\lambda)$  „multiplizieren“, und die Funktion  $g[f_\nu]$  ist auf Grund von  $\beta$ ) mit allen Ableitungen fastperiodisch. Daher erhält man wiederum die Gleichungen (17), mit Funktionen  $F_\nu(x)$ , welche fastperiodisch sind und fastperiodische Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzen. Durch Differentiation von (17) erhält man für jeden Wert von  $k$

$$(18) \quad L(y_\nu^{(k)}) = F_\nu^{(k)}(x).$$

Wenn man jetzt auf (17) und (18) den Beschränktheitsatz aus I, § 1 anwendet, so erhält man, daß alle Funktionen<sup>a)</sup>

$$(19) \quad y_\nu^{(k)}(x) \quad (1 \leq \nu \leq m; k = 0, 1, 2, \dots)$$

fastperiodisch sind.

2. Nunmehr legen wir die genauen Voraussetzungen unseres Satzes zugrunde. Danach sind also die Funktionen

$$(20) \quad y_\nu^{(k)}(x) \quad (0 \leq k \leq l_\nu, 1 \leq \nu \leq m)$$

beschränkt und gleichmäßig stetig, wobei  $l_\nu$  die höchste Ordnung der Ableitungen von  $y_\nu(x)$  ist, welche in (C) explizit vorkommen. Wir betrachten die Kernfunktionen  $K_n(\xi)$  aus II, § 2 und bilden mit ihnen die Funktionen

$$(21) \quad y_{\nu,n}^{(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t-x) y_\nu^{(k)}(t) dt,$$

$$(22) \quad f_{\nu,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t-x) f_\nu(t) dt.$$

Für alle benötigten Kombinationen der Indizes  $\nu$  und  $k$  sind für  $n \rightarrow \infty$  die Funktionen  $y_{\nu,n}^{(k)}$  gegen  $y_\nu^{(k)}$  und die Funktionen  $f_{\nu,n}$  gegen  $f_\nu$  gleich-

<sup>a)</sup> Wir schreiben  $y^{(0)}(x)$  für  $y(x)$ .

mäßig konvergent. Überdies haben die Funktionen  $f_{\nu n}$  fastperiodische Ableitungen beliebiger Ordnungen und die Funktionen  $y_{\nu n}$  Ableitungen beliebiger Ordnungen, welche beschränkt und gleichmäßig stetig sind.

Ähnlich wie in II, § 3 schließt man auf Grund des linear-distributiven Charakters von  $L(y)$ , daß für jeden Wert von  $n$  die Gleichungen

$$(23) \quad \sum_{\nu=1}^m L_{\mu\nu}(y_{\nu n}) = f_{\mu n}(x)$$

bestehen. Nach dem unter 1. Bewiesenen sind daher die Funktionen

$$y_{\nu n}^{(k)} \quad (0 \leq k \leq l_{\nu}, 1 \leq \nu \leq m)$$

fastperiodisch. Und da sie gleichmäßig gegen die Funktionen (20) konvergieren, so sind auch die letzteren fastperiodisch.

#### § 4.

##### Die homogene Gleichung.

Unter einer fastperiodischen Lösung des Systems (C) verstehen wir im folgenden eine Lösung  $y_1(x), \dots, y_m(x)$ , für welche die Funktionen  $y_{\nu}(x)$  und ihre explizit in (C) auftretenden Ableitungen fastperiodisch sind. Im Spezialfall (A) braucht man die Fastperiodizität der Ableitungen  $y'_{\nu}(x)$  nicht besonders zu postulieren, da sie wegen der besonderen Beschaffenheit der Gleichung „von selbst“ hinzutritt. Falls das (inhomogene) Gleichungssystem (C) eine fastperiodische Lösung besitzt, so läßt sich die Gesamtheit solcher Lösungen sofort angeben. Sie entsteht dadurch, daß man eine beliebige Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$(24) \quad \sum_{\nu=1}^m L_{\mu\nu}(y_{\nu}) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

hinzuaddiert. Wir wollen daher, noch bevor wir die eigentlichen Existenzsätze A und B beweisen, die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösungen vorweg erledigen.

Eine (unbestimmte) fastperiodische Lösung von (24) schreiben wir in der Form

$$(25) \quad y_{\nu}(x) \sim \sum_n A_{\lambda_n}^{\nu} e^{i\lambda_n x},$$

mit gemeinsamen Fourierexponenten  $\lambda_n$ , und nehmen an, daß keiner dieser Exponenten „überflüssig“ ist, d. h. daß bei festem  $n$  nicht alle Koeffizienten  $A_{\lambda_n}^{\nu}$  verschwinden. Setzt man (25) in (24) ein, so entsteht

$$(26) \quad \sum_n \left( \sum_{\nu=1}^m G_{\mu\nu}(\lambda_n) A_{\lambda_n}^{\nu} \right) e^{i\lambda_n x} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

und dies ist äquivalent mit den Gleichungen

$$(27) \quad \sum_{\nu=1}^m G_{\mu\nu}(\lambda_n) A_{\lambda_n}^\nu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m; n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ein Wert  $\lambda$  kommt also als Fourierrexponeent dann und nur dann in Frage, falls das Gleichungssystem

$$(28) \quad \sum_{\nu=1}^m G_{\mu\nu}(\lambda) A^\nu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

eine nicht-triviale Lösung  $A^1, A^2, \dots, A^m$  hat, d. h. falls die Determinante

$$(29) \quad G(\lambda) = \|G_{\mu\nu}(\lambda)\|$$

für diesen Wert verschwindet. Man erhält nunmehr folgendes Resultat.

Falls  $G(\lambda)$  keine reellen Nullstellen besitzt [Existenzsatz Aa), Ba), Bb)], so hat (24) überhaupt keine fastperiodische Lösung. Falls  $G(\lambda)$  endlich viele reelle Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  besitzt, so bestehen die fastperiodischen Lösungen von (24) aus allen Systemen von Exponentialpolynomen

$$(30) \quad y_\nu(x) = \sum_{\kappa=1}^k A_{\lambda_\kappa}^\nu e^{i\lambda_\kappa x},$$

deren Koeffizientensysteme  $A_{\lambda_\kappa}^\nu$  bei jedem  $\kappa$  den Gleichungen (27) genügen [Existenzsatz Ab)]. Falls  $G(\lambda)$  unendlich viele reelle Nullstellen

$$(31) \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$$

besitzt, so bestehen die fastperiodischen Lösungen von (24) aus allen (genügend oft fastperiodisch differenzierbaren) Funktionen

$$y_\nu(x) \sim \sum_{\kappa} A_{\lambda_\kappa}^\nu e^{i\lambda_\kappa x} \quad (\nu = 1, 2, \dots, m)$$

[insbesondere aus allen Exponentialpolynomen (30)], deren Koeffizientensysteme  $A_{\lambda_\kappa}^\nu$  den Relationen (28) genügen [Existenzsatz Bc)].

## § 5.

### Beweise der Existenzsätze.

**Satz A.** a) Da  $G(\lambda)$  keine reellen Nullstellen hat, so ist die Funktion  $\frac{g_{\mu\nu}(\lambda)}{G(\lambda)}$ , weil der Nenner vom  $m$ -ten und der Zähler höchstens vom  $(m-1)$ -ten Grade ist, nach I, § 2, 7 ein Multiplikator; d. h. die mit irgendeiner Fourierreihe

$$(32) \quad f(x) \sim \sum a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$$

gebildete Reihe

$$(33) \quad \sum \frac{g_{\mu\nu}(\lambda_n)}{G(\lambda_n)} a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$$

ist wiederum eine Fourierreihe. Die Funktion, zu der sie gehört, wollen wir mit

$$(34) \quad \frac{g_{\mu\nu}}{G}[f]$$

bezeichnen. Nach I, § 5 ist sogar

$$(35) \quad \frac{i\lambda g_{\mu\nu}(\lambda)}{G(\lambda)}$$

ein Multiplikator, und das „Produkt“ von  $f(x)$  mit (35) ist die Ableitung der Funktion (34). Nunmehr verifiziert man leicht, daß die Funktionen

$$(36) \quad y_\nu = \sum_{e=1}^m \frac{g_{e\nu}}{G}[f_e] \quad (\nu = 1, 2, \dots, m)$$

eine Lösung unseres Gleichungssystems bilden. Denn es ist

$$\sum_e G_{\mu\nu}[y_\nu] = \sum_{\nu, e} \frac{G_{\mu\nu} g_{e\nu}}{G}[f_e] = \sum_e E_{\mu e}[f_e] = f_\mu.$$

b) Wir betrachten für jedes  $\nu$  die Differentialgleichung  $m$ -ter Ordnung

$$(37) \quad G[y] = f_\nu.$$

Auf diese Gleichung ist auf Grund unserer Voraussetzungen über die  $f_\nu$  der Existenzsatz aus I, § 1 anwendbar; d. h. es existiert die fastperiodische Funktion

$$(38) \quad \frac{1}{G}[f_\nu],$$

und sie hat fastperiodische Ableitungen bis zur  $m$ -ten Ordnung. Da die  $k$ -te Ableitung von (38) durch „Multiplikation“ von  $f_\nu$  mit  $(i\lambda)^k$  entsteht, so sind auch jetzt die fastperiodischen Funktionen (36) vorhanden und sind einmal (fastperiodisch) differenzierbar. Daß sie eine Lösung darstellen, folgt wie unter a).

**Satz B.** Wir betrachten wiederum für jedes  $\nu$  die Gleichung (37). Auf Grund unserer Voraussetzungen [entweder a) oder b) oder c)] gibt es nach den Sätzen in I, § 1 und § 6 jeweils eine fastperiodische Lösung dieser Gleichung; anders ausgedrückt, es gibt die fastperiodische Funktion

$$\frac{1}{G}[f_\nu].$$

Da jetzt die  $g_{\mu\nu}(\lambda)$  reine Differenzenfunktionale darstellen, so sind auch jetzt die Funktionen (36) eine fastperiodische Lösung unseres Gleichungssystems.

# Theorie der $t$ -Funktionen.

Von

Wilhelm Maier in Lafayette (Ind. USA.)<sup>1)</sup>.

## Zusammenfassung.

In seinen Arbeiten über elliptische und  $\theta$ -Funktionen hat der Verfasser folgende Resultate erhalten:

1. Den Ausgangspunkt bildete die Reihe

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h^2 + k^2 < n} \frac{e^{2\pi i(xh + yk)}}{u + h + \omega k} = s\left(\frac{x, y}{u}\right)$$

und ihre elementar zu beweisenden Funktionalgleichungen, die wichtige Relationen zwischen den elliptischen Funktionen zusammenfassen. Dadurch erscheint diese Reihe als Grundlage für den formalen Aufbau der elliptischen Funktionen geeignet.

2. Setzt man

$$(2) \quad s\left(\frac{x, y}{u}\right) = u^{-1} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} t_l u^{l-1},$$

so ist, speziell mit  $\omega_1 y - \omega_2 x = z$ ,

$$t_1 = -\frac{2\pi i}{\omega_1} x + \frac{1}{\omega_1} \frac{\theta'}{\theta}\left(\frac{z}{\omega_1}\right),$$

$$(3) \quad t_1^2 + 2t_2 = \varphi(z),$$

$$(4) \quad -2t_1^3 - 6t_1 t_2 - 6t_3 = \varphi'(z),$$

also  $\theta, \varphi, \varphi'$  aus gemeinsamer Quelle abgeleitet.

3. Es sind  $t_1, t_2, \dots$  Fouriersche Reihen in  $x$  und  $y$ ; nach (3) und (4) gestattet also jede elliptische Funktion eine rationale Darstellung durch Fouriersche Doppelreihen, welche beide Periodizitäten zum Ausdruck bringen.

4. In der vorliegenden Arbeit werden die Funktionen  $t_1, t_2, \dots$  unabhängig von (1) und (2) durch innere Eigenschaften definiert.

<sup>1)</sup> Research fellow of the International Education Board



Der Ausbau und die Verfeinerung derjenigen Transzendenten, die zur Umkehrung elliptischer Integrale eingeführt wurden, leitet zu einer Folge von meromorphen Funktionen zweier komplexer Veränderlicher, welche andererseits auch verstanden werden können als Verallgemeinerung der Bernoullischen Polynome.

Die ersten Ergebnisse<sup>2)</sup> in dieser Richtung erforderten die Mitnahme von Kroneckers Funktion  $s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u \end{smallmatrix}\right)$ , insbesondere also die Adjunktion einer dritten Veränderlichen  $u$ . Das Ziel der folgenden Entwicklungen ist der Aufbau einer unabhängigen Theorie der Funktionen  $t(x, y)$ , und die einfachsten Tatsachen in dieser Richtung werden in den folgenden Paragraphen in Kürze entwickelt.

§ 1. Anknüpfung an frühere Arbeiten.

§ 2. Einführung von  $t_1(x, y)$ .

§ 3. Argumentteilung für  $t_1(x, y)$ .

§ 4. Einführung von  $t_2$  und  $t_3$ .

§ 5. Rekursionen für  $t_k$ .

§ 6. Teilungsgleichungen.

### § 1.

#### Anknüpfung an frühere Arbeiten.

Ausgangspunkt unserer Untersuchung sei der folgende Grenzwert

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h, k}^{0 < h^2 + k^2 < n} \frac{e^{2\pi i (xh + yk)}}{(h\omega_1 + k\omega_2)^{\nu}},$$

dessen Existenz für

$$(1') \quad 0 < |\omega_1|; \quad 0 < \left| J\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \right|;$$

$$(1'') \quad 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1;$$

$$(1''') \quad \nu = 1, 2, \dots$$

bewiesen wurde; bezeichnet man den Ausdruck (1) durch

$$t_{\nu}\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ \omega_1, \omega_2 \end{smallmatrix}\right) = t_{\nu},$$

so wird man zum Studium einer abzählbaren Funktionenfolge zweier komplexen Veränderlichen  $x, y$  geführt, einer Aufgabe, die von der Grund-

<sup>2)</sup> Vgl. insbesondere: Bernoullische Polynome und elliptische Funktionen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 163 (1931); Zur Theorie der elliptischen Funktionen, Math. Zeitschr. 1931; Elementary Properties Of The  $t_{\nu}$ -Functions, Trans. Am. Math. Soc., Oct. 1930.

lage (1) aus auf zweierlei Weise angegriffen werden kann. Entweder man zieht noch eine weitere Veränderliche  $u$  in Betracht, welche ungleich  $x, y$  im definierenden Ausdruck schon völlige komplexe Bewegungsfreiheit besitzt, von isolierten Punkten der  $u$ -Ebene abgesehen — und stellt Funktionalgleichungen auf, worin  $x, y, u$  eingehen: dann wird auf diesem Umweg die analytische Fortsetzung der Funktion in die komplexen  $x, y$ -Ebenen hinaus vermittelt, und die Beschreibung der  $t$ , geleistet, unabhängig von der besonderen Darstellung (1). Dies entspricht durchaus dem Frühstadium in der Entwicklung der Theorie der Modulfunktionen, als welche Grenzgebilde bedeuteten im umfassenden Bezirk der elliptischen Transzendenten.

Oder aber man wünscht die erwähnte Adjunktion von  $u$  zu vermeiden und eine selbständige Theorie der Funktionenfolge  $t$ , in Angriff zu nehmen. Dabei hätten wir uns also von der engen Darstellung (1) zu lösen, ohne aus dem  $x, y$ -Gebiet hervorzutreten, und solche Aufgabe scheint von Interesse als einfaches Beispiel zur komplexen Funktionentheorie zweier Veränderlicher. Die Entfernung der Hilfsvariablen  $u$  bietet aber noch weitere Vorteile: Die Forderung ganzer  $\nu$  in (1''') sicherte die Eindeutigkeit der  $u$ -Funktion; will man die Bedeutung von (1''') beurteilen, so hat man sich zweckmäßig von  $u$  zu befreien.

Den Gesichtspunkt der Methodenreinheit wollen wir nicht auf die Spitze treiben, denn der Konvergenzbeweis für (1) wird durch  $u$ -Adjunktion nicht komplizierter:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda, k}^{h^2 + k^2 < n} \frac{e^{y\pi i (x\lambda + yk)}}{u + h\omega_1 + k\omega_2} = s \left( \begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix} \right)$$

konvergiert für  $u \not\equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$  zugleich mit  $t_1$ ; und „der Additionssatz“ der  $s$ -Funktion, d. h. die dreigliedrige Funktionalgleichung

$$(2) \quad s \left( \begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix} \right) s \left( \begin{matrix} \xi, \eta \\ v \end{matrix} \right) = s \left( \begin{matrix} x, y \\ u-v \end{matrix} \right) s \left( \begin{matrix} x+\xi, y+\eta \\ v \end{matrix} \right) + s \left( \begin{matrix} \xi, \eta \\ v-u \end{matrix} \right) s \left( \begin{matrix} x+\xi, y+\eta \\ u \end{matrix} \right)$$

kann bestätigt werden genau mit denselben Schritten wie die quadratische Funktionalgleichung

$$(2') \quad \begin{vmatrix} t_n(x) & t_{n+1}(x) \\ t_\lambda(\xi) & t_{\lambda+1}(\xi) \end{vmatrix} = \sum_{\mu=0}^{n+\lambda+1} \begin{vmatrix} \binom{x+\mu}{\mu} t_{n+\mu}(x) & t_{n+1-\mu}(x+\xi) \\ \binom{\lambda+\mu}{\mu} t_{\lambda+\mu}(\xi) & t_{\lambda+1-\mu}(x+\xi) \end{vmatrix},$$

wo  $x, \lambda = 0, 1, \dots$ ;  $t_0 = -1$ ;  $t_n(x, y) = t_n(x)$ ;  $t_1(\xi, \eta) = t_1(\xi)$ ;  $t_{-1} = \dots = 0$ ;  $0 < \xi < 1-x$ ;  $0 < \eta < 1-y$ : nämlich durch Ausmultiplikation der Ausdrücke (1), Teilbruchzerlegung, Restschätzung. Andererseits ist (2') nichts anderes als das  $u$ -Eliminat aus (2) und der Definitionsgleichung für  $s \left( \begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix} \right)$ , also das Ergebnis einer Koeffizientengleichung.

Nimmt man noch aus (1) die triviale Spiegelung hinzu

$$(3) \quad t_r(1-x, 1-y) = (-1)^r t_r(x, y)$$

und benutzt die aus der Theorie der Modulfunktionen bekannte Tatsache, daß jedes  $t_m(0, 0)$  für  $m > 2$  sich homogen mit rationalen Zahlkoeffizienten aus  $t_4(0, 0)$  und  $t_6(0, 0)$  aufbauen läßt, so fließt aus (2') für  $r = 1, 2, \dots$  die quadratische  $t_r$ -Rekursion

$$(4) \quad \sum_{\lambda=-2}^{r+1} (\lambda+1)(-1)^{r-\lambda} t_{\lambda+2} t_{r-\lambda+1} = (r+1) t_1 \cdot t_{r+2}(0, 0) - \binom{r+2}{2} t_{r+2}(0, 0),$$

welche jedes  $t_r$  höheren Zeigers rational zurückbringt auf die Anfangswerte  $t_1, t_2, t_3$ .

Zwar sind die Funktionen  $t_1, t_2, t_3$  rational unabhängig, nicht aber algebraisch; durch nochmalige Benutzung von (2') findet man nämlich

$$(5) \quad 9t_3^2 + 6t_2[t_1^2 + 3t_1 t_2] + \{-8t_2^3 - 3t_1^2 t_2^2 + 15t_4(0, 0)[t_1^2 + 2t_2] + 35t_6(0, 0)\} = 0,$$

so daß es genügt, nur zwei verschiedene der  $t_r$  in einer independenten Theorie zu behandeln, etwa  $t_1, t_2$ .

Die Aussagen (2'), (4), (5) wurden gewonnen<sup>2)</sup> unter Verwendung der  $s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u \end{smallmatrix}\right)$ -Funktion, wobei die Abhängigkeit von der einen Veränderlichen  $u$  wesentlich benutzt wurde. Diesen Standpunkt wollen wir jetzt verlassen, um vielmehr das Funktionenpaar  $t_1, t_2$  des Paares komplexer Argumente  $x, y$  direkt zu untersuchen. Wir beginnen mit  $t_1$ .

## § 2.

### Einführung von $t_1(x, y)$ .

Riemann stellte fest, daß die Bestimmung analytischer Funktionen zweckmäßigerweise nicht durch Angabe eines Größenausdruckes zu vollziehen ist. Abgesehen von der Zufälligkeit des darstellenden Elementes bringt es nämlich die Analytizität der gewünschten Funktion mit sich, daß jeder Ausdruck für eine Funktion die letztere überbestimmt, insofern jeder endliche Existenzbereich jenes Ausdruckes „zu groß“ ist. In der Tat ist solche Überbestimmung nicht nur ein Schönheitsfehler, sondern sie verschleiert die Bilanz der definierenden Elemente, lähmt die logische Durchdringung des Untersuchungsgegenstandes und hemmt dessen Transformierbarkeit. Im gegenwärtigen Beispiel der Funktion  $t_1$  lösen wir uns also völlig ab von der Darstellung (1.1), um statt dessen eine Kennzeichnung durch innere Eigenschaften zu vollziehen. Die Bestimmung soll geschehen durch

Angabe von Lage und Art der Singularitäten, eine partielle Differentialgleichung und zwei partielle Differenzgleichungen. Für  $0 < |\omega_1|$ ;  $0 < \left| J\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \right|$  und komplexes  $x, y$  genüge die meromorphe Funktion  $t_1(x, y) = t_1$  etwa den Bedingungen:

Singularitäten sind möglich nur für

$$(1) \quad \omega_1 y \equiv \omega_1 x \pmod{\omega_1, \omega_2};$$

es gelte die Grenzgleichung

$$(2) \quad \lim_{x, y \rightarrow 0} \left[ 2t_1(x, y) - t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \right] = 0,$$

die differentielle Koppelung

$$(3) \quad \left\{ \frac{\omega_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\omega_2}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y} \right\} t_1 = -1,$$

und folgende Periodizität:

$$(4) \quad t_1(x, y) = t_1(x+1, y) = t_1(x, y+1).$$

Das System (1), (2), (3), (4) reicht zur völligen Bestimmung von  $t_1(x, y)$  aus; insbesondere werden wir gelegentlich auf die trigonometrische Darstellung (1.1) geführt werden, womit dann nachträglich die Existenz einer Lösung bewiesen ist.

Zuvor bemerken wir, daß jedenfalls nicht zwei verschiedene Lösungen  $t_1 + \tau_1$  bestehen; deren Differenz würde nämlich (1) erfüllen, wäre nach (3) eine Funktion von  $\omega_1 y - \omega_2 x$  allein, also nach (4) doppelperiodisch, aber nach (2) zu arm an Polen, also konstant, und nach (2) identisch in  $x, y$  verschwindend; somit existiert höchstens eine Lösung  $t_1$ , welche nach (3) in folgender Gestalt angeschrieben werden kann:

$$(5) \quad t_1 = -\frac{2\pi i x}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1} \Phi\left(y - \frac{\omega_2}{\omega_1} x\right).$$

Die analytische Funktion  $\Phi$  des einen Argumentes  $y - \frac{\omega_2}{\omega_1} x = z$  genügt nach (4) den Bedingungen

$$(6) \quad \Phi(z+1) = \Phi(z),$$

$$(6') \quad \Phi\left(z + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \Phi(z) + 2\pi i$$

und nach (1), (2) mit  $\frac{\partial c}{\partial z} = 0$

$$(6'') \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{c}{z} - \Phi(z) \right] = 0, \quad \Phi \text{ regulär für } z \not\equiv 0 \pmod{1, \frac{\omega_2}{\omega_1}}.$$

Durch (6), (6'), (6'') ist die meromorphe Funktion  $\Phi$  bestimmt und Cauchys Integralsatz zeigt  $c = 1$ .

Benutzt man die für  $0 < J\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$  erklärte Transzendente

$$-i \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{\pi i \left[ \frac{\omega_2}{\omega_1} \left( r + \frac{1}{2} \right)^2 + 2z \left( r + \frac{1}{2} \right) \right]} = \vartheta \left( z, \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = \vartheta(z),$$

so gibt der Vergleich  $\Phi(z) = \frac{\vartheta'}{\vartheta}(z)$  oder

$$(7) \quad t_1(x, y) = -\frac{2\pi i x}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1} \frac{\vartheta'}{\vartheta} \left( y - \frac{\omega_2}{\omega_1} x \right).$$

Das einfach polare Wachstum von  $t_1$  bei  $x, y \rightarrow 0$  sichert die Existenz

von  $\int_0^1 \int_0^1 dx dy t_1$ , erstreckt über ein Einheitsquadrat der  $xy$ -Ebene. Da  $\vartheta(z)$  ungerade ist, folgt mit (4)

$$\int_0^1 \int_0^1 dx dy t_1 = 0$$

als unmittelbare Folge von

$$(8) \quad t_1(x, y) + t_1(1-x, 1-y) = 0.$$

Nun sei  $0 < h^2 + k^2$ ;  $h, k \equiv 0(1)$ . Dann gilt der

Hilfssatz:

$$(9) \quad \int_0^1 \int_0^1 dx dy t_1(x, y) \cdot e^{-2\pi i (xh + yk)} = \frac{1}{\omega_1 h + \omega_2 k}.$$

Beweis. Mit  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$ ;  $y - \omega x = z$  erhält man

$$\int_0^1 \int_0^1 dx dy e^{-2\pi i (xh + yk)} \cdot t_1 = \int_0^1 dx \int_{-\omega x}^{1-\omega x} dz e^{-2\pi i xh - 2\pi i (\omega x + z)k} \left\{ -\frac{2\pi i x}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1} \frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) \right\},$$

mit  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$ :

$$(10) \quad \begin{aligned} &= -\frac{2\pi i}{\omega_1} \int_0^1 dx e^{-2\pi i x(h + \omega k)} \cdot x \cdot \int_0^1 dz e^{-2\pi i kz} + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_1} \int_0^1 dx e^{-2\pi i x(h + \omega k)} \int_0^{\alpha+1} dz e^{-2\pi i kz} \frac{\vartheta'}{\vartheta}(z). \end{aligned}$$

Durch zweckmäßige Fallunterscheidung und Benutzung einer Symmetrie ergibt sich beiläufig, ohne die Produktentwicklung für  $\vartheta(z)$  in Anspruch zu nehmen, das innere

$$\int_0^{\alpha+1} dz e^{-2\pi i kz} \frac{\vartheta'}{\vartheta}(z)$$

in (10). Denn für  $\begin{cases} k=0 \\ h \neq 0 \end{cases}$  gibt (10) durch Integration nach Teilen

$$(11) \quad \int_0^1 \int_0^1 dx dy e^{-2\pi i x h} t_1(x, y) = \frac{1}{\omega_1 h};$$

andererseits aber für  $\begin{cases} h=0 \\ k \neq 0 \end{cases}$  wird

$$(11') \quad \int_0^1 \int_0^1 dx dy e^{-2\pi i y k} t_1(x, y) = 0 + \frac{1}{\omega_1} \int_0^1 dx e^{-2\pi i x \omega k} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+1} dz e^{-2\pi i z k} \frac{\partial'}{\partial}(z) \\ = \frac{1 - e^{-2\pi i \omega k}}{2\pi i \omega k} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+1} dz e^{-2\pi i z k} \frac{\partial'}{\partial}(z).$$

In die Definition (1), (2), (3), (4) gehen die  $\omega_1, \omega_2$  explizite nur in (1), (3) ein, derart, daß die Vertauschung gilt

$$(12) \quad t_1\left(\begin{smallmatrix} x, & y \\ \omega_1, & \omega_2 \end{smallmatrix}\right) = t_1\left(\begin{smallmatrix} y, & x \\ \omega_2, & \omega_1 \end{smallmatrix}\right).$$

Beim Vergleich von (11), (11') berechnet sich daher für  $0 < -\frac{\alpha}{\omega} < 1$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} dz e^{-2\pi i z k} \frac{\partial'}{\partial}(z) = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \omega k}},$$

was in (10) eingetragen zu (9) führt.

Zusammen mit (8') kommen wir für  $0 < x, y < 1$  somit zur trigonometrischen Entwicklung

$$(13) \quad t_1(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{0 < h^2 + k^2 < n \\ h, k}} \frac{e^{2\pi i (xh + yk)}}{\omega_1 h + \omega_2 k}.$$

Der Gültigkeitsbereich von (13) wird aber durch die berandenden Pole der dargestellten Funktion nur unterbrochen; nämlich die Darstellung (13) reproduziert für reelle, nicht ganze  $x, y$  die Definitionsbedingung (4), so daß der wahre Konvergenzbereich obiger Doppelreihe beschrieben wird durch  $\omega_1 y - \omega_2 x \not\equiv 0 \pmod{(\omega_1, \omega_2)}$ , wobei

$$(14) \quad -\infty < x, y < \infty.$$

Bemerkenswert ist im Grenzfall  $\left| J\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \right| \rightarrow \infty$  der triviale Verlust der  $y$ -Periode durch „Verdrängung“; der nicht aus (13), wohl aber aus (3) evidente Verlust der  $x$ -Periode, begleitet von der Schrumpfung des vielfach punktierten zweidimensionalen Entwicklungsbereiches (14) auf das Einstreck  $0 < x < 1$ . Zugleich entartet die Transzendente  $t_1$  von einem konstanten Faktor abgesehen, zum ersten Bernoullischen Polynom, dessen Pol nach dem unendlich fernen Punkt der  $x$ -Ebene verdrängt ist und

nichts mehr anzeigt hinsichtlich der Gültigkeitsgrenzen der einfach erstreckten Reihendarstellung

$$\lim_{\substack{J(\omega_1) \\ (\omega_1) \rightarrow \infty}} t_1(x, y) = \sum_{0 < h^2} e^{\frac{2\pi i x h}{\omega_1 h}}.$$

## § 3.

Argumentteilung für  $t_1(x, y)$ .

Das kennzeichnende System (2.1.2.3.4) bestimmte eindeutig die lösende Funktion  $t_1$ ; jeder anders gestaltete Ausdruck, der jene Bedingungen erfüllt, muß mit  $t_1$  daher zusammenfallen, identisch in  $x, y, \omega_1, \omega_2$ . Die Konstruktion solcher Ausdrücke liegt nahe; durch Argumentteilung einerseits können Singularitäten entfernt werden; durch lineare Kombination von  $t_1$ -Funktionen andererseits kann die alte Dichte der Singularitätenverteilung wiederhergestellt werden. Zugleich findet man beim Abschluß dieses Zweitaktprozesses die Perioden unverändert.

Seien  $\mu, \nu = 1, 2, \dots$ ; die endliche Doppelsumme

$$\sum_{\alpha=0}^{\mu-1} \sum_{\beta=0}^{\nu-1} t_1\left(\frac{x+\alpha}{\mu}, \frac{y+\beta}{\nu}\right) = f(x, y)$$

genügt den Forderungen (2.1.4)). Um auch (2.2) zu befriedigen, ist die Einschränkung  $\mu = \nu$  nötig. Nach (2.3) wird dann

$$\frac{1}{\nu} \left\{ \frac{\omega_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\omega_2}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y} \right\} f(x, y) = -1,$$

d. h.

$$(1) \quad \frac{1}{\nu} \sum_{\alpha, \beta=0}^{\nu-1} t_1\left(\frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu}\right) = t_1(x, y).$$

Diese Funktionalgleichung verknüpft also jedes  $t_1$  mit einer elementarsymmetrischen Verbindung solcher Funktionen transformierten Argumentes. Wurden zur Herleitung von (3.1) die Bedingungen (2.1.2.3.4) benötigt, so doch keineswegs in vollem Umfang. Denn irgendeine Lösung  $\tau$  von (3.1) muß noch nicht (2.4) erfüllen, sondern unterliegt nur der schwächeren Bindung

$$(2) \quad \tau(x, y) - \tau(x+1, y) - \tau(x, y+1) + \tau(x+1, y+1) = 0.$$

Daher ist es von Interesse, (2.13) mit (3.1) zu vergleichen, indem man mit dem unbestimmten Ansatz

$$(3) \quad \tau(xy) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 < h^2 + k^2 < n} a_{h,k} \frac{e^{2\pi i (xh + yk)}}{\omega_1 h + \omega_2 k}$$

in (3.1) eingeht. Aus bekannten Eigenschaften der Einheitswurzeln folgt für konvergente (3) und  $\mu = 1, 2, \dots$

$$(4) \quad a_{h,k} = a_{\mu h, \mu k}$$



als Äquivalent für (3.1); unter allen Gitterpunkten einer  $h, k$ -Ebene sind die vom Nullpunkt aus „belichteten“ durch (4) ausgezeichnet vor den „beschatteten“. Die den ersteren entsprechenden Koeffizienten in (3) bleiben unabhängig gegenüber der Bindung (1).

Wegen (2.3.7) kann den Differenzengleichungen (2.4) ein anderes Paar solcher gegenübergestellt werden, wie aus der Periodizität von  $\vartheta$  unmittelbar zu ersehen. Es gilt

$$(5) \quad t_1\left(x + \frac{\omega_1}{\omega_2}, y\right) - t_1(x, y) = \frac{2\pi}{i\omega_2},$$

$$(5') \quad t_1\left(x, y + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - t_1(x, y) = \frac{2\pi}{i\omega_1},$$

wo (5') aus (5) und (2.12) zu entnehmen ist; übrigens drückt die Symmetrie (2.12) die lineare Transformation der  $\vartheta$ -Funktion aus und führt also zum quadratischen Reziprozitätsgesetz im Körper der rationalen Zahlen. Die Benutzung von (5), (5') an Stelle von (2.4) gibt weitere Darstellungen

$$(6) \quad t_1(x, y) = \frac{1}{v} \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_1\left(\frac{x + \alpha \frac{\omega_1}{\omega_2} + \beta \frac{\omega_2}{\omega_1}}{v}, \frac{y}{v}\right)$$

$$(6') \quad = \frac{1}{v} \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_1\left(\frac{x + \alpha \frac{\omega_1}{\omega_2} + \beta}{v}, \frac{y}{v}\right)$$

$$(6'') \quad = \frac{1}{v} \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_1\left(\frac{x}{v}, \frac{y + \alpha + \beta \frac{\omega_2}{\omega_1}}{v}\right)$$

in Ergänzung zu (1). Irgendeine Lösung  $\tau$  von (6) ist wieder nicht notwendig Lösung von (5), (5'), sondern hat nur die partielle Differenzengleichung

$$(2') \quad \tau(x, y) - \tau\left(x + \frac{\omega_1}{\omega_2}, y\right) - \tau\left(x, y + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) + \tau\left(x + \frac{\omega_1}{\omega_2}, y + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = 0$$

zu befriedigen. Die (2.13) entsprechenden trigonometrischen Entwicklungen zu (6), (6'), (6'') führen wir nicht aus, da sie in theoretischer Hinsicht nichts Neues bieten, während zur numerischen Berechnung die Konvergenzverhältnisse bei (2.7) günstiger sind.

Ohne Berufung auf die  $\vartheta$ -Funktion liefert die Taylorsche Reihe eine lineare Funktionalgleichung für  $t_1$ , worin die Differenzengleichungen (5), (5') als Sonderfälle enthalten sind. Für komplexes  $w$  ist

$$\begin{aligned} t_1\left(x + w \frac{\omega_1}{2\pi i}, y + w \frac{\omega_2}{2\pi i}\right) &= t_1(x, y) + w \left[ \frac{\partial}{\partial w} t_1(x + \dots) \right]_0 + \frac{w^2}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial w^2} \dots \right] \dots \\ &= t_1(x, y) + w \left\{ \frac{\omega_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\omega_2}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y} \right\} t_1 + \frac{w^2}{2} \{ \dots \}^2 t_1 + \dots \end{aligned}$$

oder nach (2.8)

$$(7) \quad t_1\left(x + w \frac{\omega_1}{2\pi i}, y + w \frac{\omega_2}{2\pi i}\right) = t_1(x, y) - w.$$

## § 4.

Einführung von  $t_2$  und  $t_3$ .

Die lineare Funktionalgleichung (3.1) verknüpfte  $t_1(x, y)$  nicht nur mit  $t_1\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}\right)$ , sondern auch noch mit  $(v^2 - 1)$  weiteren Funktionen. Um letztere zu entfernen, suchen wir nach weiteren Zusammenhängen zwischen den in (3.1) eingehenden Gebilden; es liegt nahe, besonders einfache symmetrische Funktionen aller geteilten Argumente heranzuziehen, etwa Potenzsummen der  $t_1\left(\frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v}\right)$ . Führt man die Bezeichnung ein

$$(1) \quad \sigma_k = v^{-k} \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_1^k\left(\frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v}\right) \quad (v, k = 1, 2, \dots),$$

so ist nach (3.1)

$$\sigma_1 = t_1$$

bekannt. An Stelle von  $\sigma_2$  bilden wir mittels (2.2) eine für jedes reelle  $x, y$  endliche meromorphe Funktion

$$(1') \quad -t_1^2 + \sigma_2 = -t_1^2(x, y) + v^{-2} \cdot \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_1^2\left(\frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v}\right) = \varphi(x, y),$$

so gibt (2.4)

$$\varphi(x, y) = \varphi(x+1, y) = \varphi(x, y+1).$$

Um aus (2.8) Schlüsse zu ziehen, schreibe man das partielle Differentiationsymbol

$$(2) \quad \frac{\omega_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\omega_2}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y} = \mathfrak{D},$$

so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} t_1\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}\right) &= v \mathfrak{D} t_1(x, y) = -v, \\ \mathfrak{D} t_1^2(x, y) &= \frac{\omega_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} t_1^2(x, y) + \frac{\omega_2}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y} t_1^2(x, y) \\ &= 2t_1(x, y) \cdot \left\{ \frac{\omega_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\omega_2}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y} \right\} t_1(x, y) \\ &= -2t_1(x, y), \end{aligned}$$

und es ist die vollständige Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\mathfrak{D} \psi(x, y) = 0$$

bekannt als analytische Funktion nur einer Veränderlichen

$$(3) \quad \psi(x, y) = A(\omega_1 y - \omega_2 x).$$

Ist  $\psi$  in  $x, y$  reell periodisch, so nimmt  $A$  einen von  $x, y$  unabhängigen festen Wert an, falls  $|\psi|$  nach oben beschränkt bleibt. Mit einem von  $v$  freien

$$t_2(x, y)$$

habe nun die inhomogene Differentialgleichung

$$\mathfrak{D}\varphi(x, y) = \mathfrak{D}\left[-t_1^2(x, y) + v^{-2} \cdot \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_1^2\left(\frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v}\right)\right] = 2(1-v^{-2})t_1(x, y)$$

eine für reelle  $x, y$  endliche Lösung

$$(4) \quad \varphi(x, y) = 2(1-v^{-2}) \cdot t_2(x, y);$$

diese ist nach (3) bis auf eine additive Zusatzkonstante festgelegt. Verbindet man (1') mit (4)

$$v^{-2} \left[ 2t_2(x, y) + \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_1^2\left(\frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v}\right) \right] = t_1^2(x, y) + 2t_2(x, y),$$

benutzt

$$(5) \quad \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_2\left(\frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v}\right) = t_2(x, y)$$

zur Bestimmung jener Integrationskonstanten, so wird durch (1'), (4), (5) die neue Funktion  $t_2$  eindeutig erklärt, wobei die rationale Verbindung

$$(6) \quad t_1^2 + 2t_2 = \varphi(x, y)$$

der Funktionalgleichung

$$v^{-2} \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} \varphi\left(\frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v}\right) = \varphi(x, y)$$

genügt, während ihr Wachstum an der Stelle  $(0, 0)$  durch

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \left[ \varphi\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) - 4\varphi(x, y) \right] = 0$$

eingeschränkt ist. Aus (2.1.4) schließt man, daß

$$(6') \quad \varphi(x, y) = \varphi(\omega_1 y - \omega_2 x)$$

mit der Weierstraßschen Funktion zusammenfällt, die in der Tat für

$$(6'') \quad \omega_1 y - \omega_2 x = z$$

durch Grenzbedingung

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left[ \varphi\left(\frac{z}{2}\right) - 4\varphi(z) \right] = 0$$

und Teilungsgleichung

$$v^{-2} \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} \varphi\left(\frac{z + \omega_1 \alpha + \omega_2 \beta}{v}\right) = \varphi(z)$$

als meromorphe Funktion von  $z$  bestimmt ist. Aus

$$(7) \quad \sigma_2 = v^{-2} \cdot \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_1^2\left(\frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v}\right) = t_1^2 + 2(1-v^{-2}) \cdot t_2$$

folgt insbesondere die Grenzformel

$$(7') \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^{-2} \sum_{\alpha, \beta=0}^{\nu-1} t_1^2 \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right) = \wp(\omega_1 y - \omega_2 x),$$

während (7) mit (3.1) die elementarsymmetrische Kombination liefert

$$(7'') \quad \sum_{\substack{\alpha \neq \beta \\ -1 < \alpha, \beta < \nu}} t_1 \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\alpha}{\nu} \right) \cdot t_1 \left( \frac{x+\beta}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right) = 2(1-\nu^2) \cdot t_2(x, y);$$

die Ungleichung  $\alpha \neq \beta$  meint im vierfachen Summationsprozeß, daß aus  $\alpha_1 = \beta_1$  notwendig  $\alpha_2 \neq \beta_2$  folgt, und umgekehrt. Schließlich entnimmt man aus (4), (5) die trigonometrische Darstellung

$$(8) \quad t_2(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 < h^2 + k^2 < n} \frac{e^{2\pi i(xh + yk)}}{(\omega_1 h + \omega_2 k)^2} \quad \left( \begin{array}{l} g = 0, \pm 1, \dots \\ g < x, y < g+1 \end{array} \right).$$

Das Verhalten von  $t_1$  im kleinen wird beschrieben durch (2.7); es beginnt die zugehörige Potenzreihe nach (6'')

$$t_1 = \frac{1}{z} - 2\pi i x + \alpha z + \dots,$$

woraus

$$t_1^2 = \frac{1}{z^2} - 4\pi i \frac{x}{z} - 4\pi^2 x^2 + 2\alpha \dots$$

Tragen wir dies in (7) ein, so folgt das Grenzverhalten von  $t_2$ , nämlich die Existenz von

$$(8') \quad \lim_{x, y \rightarrow 0} \left[ \frac{2\pi i x}{z} - t_2(x, y) \right].$$

Bezeichnet man  $\sum'_{0 < \alpha^2 + \beta^2}$  durch  $\sum'$ , so liefert (5) für  $\nu = 2, 3, \dots$

$$\sum'_{\alpha, \beta=0}^{\nu-1} t_2 \left( \frac{\alpha}{\nu}, \frac{\beta}{\nu} \right) = 0;$$

im einfachsten Falle also

$$t_2 \left( \frac{1}{2}, 0 \right) + t_2 \left( 0, \frac{1}{2} \right) + t_2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Jetzt werde eine weitere Funktion  $t_3$  erklärt durch folgende Eigenschaften:

$$(9) \quad \nu \cdot \sum_{\substack{\text{mod } \nu \\ \alpha, \beta=0}} t_3 \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right) = t_3(x, y),$$

$$(10) \quad \mathfrak{D} t_3(x, y) = t_3(x, y),$$

wobei  $\sum_{\text{mod } \nu}$  anzeigt, daß  $\alpha, \beta$  je  $(\text{mod. } \nu)$  ein volles Restsystem durchlaufen. Nach (9), (10) kann  $t_3$  singular sein höchstens in den singulären Mannigfaltigkeiten von  $t_2$ , d. h. für  $z \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$ . Zu jedem reellen  $x, y$

gehört nach (9) ein endliches  $t_3$ , welches nach (8'), (10) endliche partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt. Die in (9) postulierte Existenz der Doppelsumme zieht  $t_3(x, y) = t_3(x+1, y) = t_3(x, y+1)$  nach sich, so daß (9), (10) zur eindeutigen Bestimmung von  $t_3$  ausreicht.

Es soll nun

$$(11) \quad v^{-3} \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_1^3 \left( \frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v} \right) = \sigma_3$$

durch  $t$ -Funktionen der vollen Argumente ausgedrückt werden. Mit Koeffizienten  $a, b$ , die von  $x, y$  frei sind, bilden wir in unbestimmtem Ansatz

$$\sigma_3 = t_1^3 + a t_1 t_2 + b t_3,$$

$$\mathfrak{D} \sigma_3 = -3 t_1^2 + a t_1^2 + (b-a) t_2,$$

welches aber nach (11)

$$= \frac{-3}{v^3} \sum_0^{v-1} t_1^2 \left( \frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v} \right)$$

und nach (7)

$$= \frac{-3}{v^2} \left[ t_1^2 + \left( 2 - \frac{2}{v^2} \right) t_3 \right]$$

wird.

Ein Vergleich bestimmt  $a$  und  $b$  zu

$$a = 3 \left( 1 - \frac{1}{v^2} \right), \quad b = 3 \left( 1 - \frac{1}{v^2} \right) \left( 1 - \frac{2}{v^2} \right),$$

$$(12) \quad \sigma_3 = t_1^3 + 3 \left( 1 - \frac{1}{v^2} \right) t_1 t_2 + 3 \left( 1 - \frac{1}{v^2} \right) \left( 1 - \frac{2}{v^2} \right) t_3,$$

woraus beiläufig

$$t_3(x, y) + t_3(1-x, 1-y) = 0$$

folgt und im besonderen

$$t_3(0, 0) = 0.$$

Bezeichnet man entsprechend

$$\frac{1}{v} \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_1 \left( \frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v} \right) t_2 \left( \frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v} \right) = \sigma_{12},$$

so findet sich

$$(13) \quad \sigma_{12} = t_1 t_2 + 3 \left( 1 - \frac{1}{v^2} \right) t_3,$$

und aus (9), (12), (13) erhält man für

$$-2 t_1^3 - 6 t_1 t_2 - 6 t_3 = \varphi'(x, y)$$

entsprechend (6) eine Funktionalgleichung der Gestalt

$$v^{-3} \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} \varphi' \left( \frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v} \right) = \varphi'(x, y),$$

was wegen

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \left[ \varphi' \left( \frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) - 8 \varphi'(x, y) \right] = 0$$

zu

$$\varphi'(x, y) = \varphi'(\omega_1 y - \omega_2 x)$$

führt.

Dies ist nur eine Umformulierung des von C. Siegel gegebenen Verfahrens, elliptische Funktionen auf rationalem Wege aufzubauen bei vorgegebenen  $t_1, t_2, t_3$ . Umgekehrt fließt aus Weierstraß' Differentialgleichung

$$\varphi'^2 = 4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3,$$

wo

$$g_2 = 35t_4(0, 0); \quad g_3 = 140t_6(0, 0),$$

eine algebraische Abhängigkeit zwischen  $t_1, t_2, t_3$ , nämlich (1.5), deren Ableitung wir hier übergehen. Entsprechend (7') vermerken wir den Grenzfall zu (12)

$$-\frac{1}{2} \lim_{v \rightarrow \infty} v^{-3} \sum_{\alpha, \beta=0}^{v-1} t_1^3 \left( \frac{x+\alpha}{v}, \frac{y+\beta}{v} \right) = \varphi'(\omega_1 y - \omega_2 x).$$

Verbindet man (12) mit (7) und (3.1), so folgt entsprechend (7'')

$$(14) \quad \sum_{\substack{\alpha \neq \beta \\ -1 < \alpha_j, \beta_j < v}} t_1 \left( \frac{x+\alpha_1}{v}, \frac{y+\beta_1}{v} \right) t_1 \left( \frac{x+\alpha_2}{v}, \frac{y+\beta_2}{v} \right) t_1 \left( \frac{x+\alpha_3}{v}, \frac{y+\beta_3}{v} \right) = 6 \frac{(v^3-1)(v^2-2)}{v}$$

dabei dürfen höchstens zwei der Differenzen  $\alpha_j - \beta_j$  für  $j=1, 2, 3$  in einem Summanden verschwinden. Aus (9), (10) entnimmt man für jedes reelle Paar  $x, y$  die Reihenentwicklung

$$t_3 = \sum_{0 < h^2 + k^2} h, k \frac{e^{2\pi i(xh + yk)}}{(\omega_1 h + \omega_2 k)^3}.$$

# § 5.

## Rekursionen für $t_x$ .

Setzt man für  $x=1, 2, \dots$

$$(1) \quad \mathfrak{D} t_x = t_{x-1},$$

so ergibt (2.5) den Anfangswert

$$(2) \quad t_0 = -1.$$

Die Existenz reeller  $x, y$ -Perioden für  $t_x$  zusammen mit Angaben über Lage und Art zugehöriger Singularitäten kann durch eine Funktionalgleichung gekennzeichnet werden, wenn das Summationsymbol  $\sum^{\text{mod } v}$  wieder so allgemein verstanden wird, daß die eingehenden Summationszeiger nicht nur ein volles Restsystem durchlaufen, sondern daß die Summe bestimmt

ist allein durch die Restklassen. Für  $\nu = 1, 2, \dots$  sei

$$(3) \quad t_n = \nu^{n-2} \sum_{\alpha, \beta}^{\text{mod } \nu} t_n \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right);$$

durch (1), (2), (3) ist dann  $t_n$  eindeutig festgelegt. Jedes Lösungspaar  $t, \tau$  nämlich gäbe nach (3)

$$t_n - \tau_n = \varphi(x, y) = \varphi(x+1, y) = \varphi(x, y+1)$$

und nach (1)

$$t_n - \tau_n = \psi(\omega_1 y - \omega_2 x),$$

welche analytische Funktion also doppelperiodisch, nach (3) aber beschränkt und also konstant ist; diese Konstante kann nach (3) nur den Wert Null haben. Für  $2 < \kappa$  und  $-\infty < x, y < \infty$  besteht die Darstellung

$$(4) \quad t_n = \sum_{h, k}^{0 < h^2 + k^2} \frac{e^{2\pi i(xh + yk)}}{(\omega_1 h + \omega_2 k)^\kappa}.$$

Die in (4.1.7.11) benutzte Bezeichnungsweise setzte die symmetrisch gliedweise eingehenden Produkte von  $t$ -Funktionen in Evidenz:

$$\sigma_2 = \nu^{-2} \sum_{\alpha, \beta=0}^{\nu-1} t_1^2 \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right) = t_1^2 + 2 \left( 1 - \frac{1}{\nu^2} \right) t_2,$$

$$\sigma_3 = \nu^{-3} \sum_{\alpha, \beta=0}^{\nu-1} t_1^3 \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right) = t_1^3 + 3 \left( 1 - \frac{1}{\nu^2} \right) t_1 t_2 + 3 \left( 1 - \frac{1}{\nu^2} \right) \left( 1 - \frac{2}{\nu^2} \right) t_3,$$

$$\sigma_{12} = \nu^{-1} \sum_{\alpha, \beta=0}^{\nu-1} t_1 \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right) t_2 \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right) = t_1 t_2 + 3 \left( 1 - \frac{1}{\nu^2} \right) t_3.$$

Verallgemeinern wir und setzen, entsprechend alle „Gewichte“ der Zeiger andeutend,

$$(5) \quad \sigma_{103} = \sum_{\alpha, \beta=0}^{\nu-1} t_1 \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right) t_3 \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right),$$

$$(6) \quad \sigma_{04} = \sum_{\alpha, \beta=0}^{\nu-1} t_2^2 \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right),$$

so macht sich beim unbestimmten Ansatz das Nichtverschwinden des Absolutgliedes  $t_4(0, 0)$  geltend; z. B. gibt

$$(5') \quad \sigma_{13} = a t_1 t_3 + b t_2^2 + c t_4 + d t_4(0, 0),$$

worin alle  $t$ -Kombinationen gleicher Zeigersumme aufgenommen sind, nach Differentiation nur zwei Bestimmungsgleichungen für vier unbekannte Koeffizienten. Durch bestimmte Integration entsteht eine dritte Bindung, während die vierte eine  $t$ -Rekursion liefert, identisch in  $x$  und  $y$ .



Nach (5), (5') ist

$$\frac{1}{r} \sum_{\alpha, \beta=0}^{r-1} \left[ t_1 \left( \frac{x+\alpha}{r}, \frac{y+\beta}{r} \right) t_2 \left( \frac{x+\alpha}{r}, \frac{y+\beta}{r} \right) - t_3 \left( \frac{x+\alpha}{r}, \frac{y+\beta}{r} \right) \right] = (2b+a)t_1 t_2 + (c-a)t_3$$

woraus

$$a + 2b = 1; \quad -a + c = 3 - \frac{4}{r^2};$$

(5') gibt

$$\frac{1}{r^2} \int_0^r dx \int_0^r dy \sigma_{12} = [a + b + d] t_4(0, 0)$$

und daher (5)

$$-a + b + d = 1.$$

Somit

$$b = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \quad c = a + 3 - \frac{4}{r^2}, \quad d = \frac{3a}{2} + \frac{1}{2};$$

$$(7) \quad \sigma_{103} = a \left[ t_1 t_3 - \frac{1}{2} t_2^2 + t_4 + \frac{3}{2} t_4(0, 0) \right] + \frac{1}{2} t_2^2 + \left[ 3 - \frac{4}{r^2} \right] t_4 + \frac{1}{2} t_4(0, 0) \\ = \frac{1}{2} t_2^2 + \left[ 3 - \frac{4}{r^2} \right] t_4 + \frac{1}{2} t_4(0, 0),$$

während die  $t$ -Reihen der quadratischen Rekursion genügen

$$(8) \quad t_1 t_3 - \frac{1}{2} t_2^2 + t_4 + \frac{3}{2} t_4(0, 0) = 0,$$

welche (7) umzuformen gestattet. Ubrigens stellt (8) einen Sonderfall von (1.4) dar, und man erhält die höheren Summen und Rekursionen entsprechend (7), (8), wie

$$\sigma_{1001} = r \sum_0^{r-1} t_1 \left( \frac{x+\alpha}{r}, \frac{y+\alpha}{r} \right) t_4 \left( \frac{x+\alpha}{r}, \frac{y+\alpha}{r} \right) = a t_1 t_4(0, 0) + b t_1 t_4 + c t_2 t_3 + d t_5$$

nach gleicher Methode; es ist das in (6) angeschriebene

$$\sigma_{04} = 6 \left[ \frac{1}{r^2} - 1 \right] t_1 t_3 + \left[ \frac{3}{r^2} - 2 \right] t_2^2 + 9 \left[ 1 - \frac{1}{r^2} \right] t_4(0, 0)$$

zwar leicht,  $\sigma_4$  dagegen nur mit neuen Hilfsmitteln, wie Hinzunahme weiterer Veränderlicher, zu bestimmen.

Zur Herleitung von (1.4) knüpfe man an (3.7) unter Verwertung von (5.1.2) an. Für komplexes  $w$  hinreichend kleinen Betrages, der von  $\omega_1, \omega_2$  abhängt,  $\omega_1 y - \omega_2 x \not\equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$  und  $x = 1, 2, \dots$  ist

$$(9) \quad t_n \left( x + w \frac{\omega_1}{2\pi i}, y + w \frac{\omega_2}{2\pi i} \right) = \sum_{v=0}^n \frac{w^v}{v!} t_{n-v}.$$

Ausreichend zur Bestimmung aller  $t_n$  sind also die in  $\nu, \kappa, x, y, \omega_1, \omega_2, w$  gebildeten Aussagen (3), (9). Wie in (3.4) allgemeine Merkmale auftraten, die schon jeder Sonderlösung von (3) zukommen, so liegt es nahe, solche Kennzeichen zu suchen, die jeder Lösung  $t_n$  von (9) eigen sind; wenn  $a_{h,k}$  von  $\kappa$  frei bleibt, so muß jede konvergente trigonometrische Darstellung in der Gestalt

$$t_n = \sum_{0 < h^2 + k^2} a_{h,k} \frac{e^{2\pi i(xh + yk)}}{(\omega_1 h + \omega_2 k)^n}$$

auftreten.

Weil mit  $t_n(x, y)$  auch  $t_n(x, y) + 2^{-n} t_n(2x, 2y) + 3^{-n} t_n(3x, 3y) + \dots$  im Fall der Konvergenz (9) befriedigt wird, wird man zu den besonderen Funktionen geführt, die durch

$$\sum_{\substack{0 < h^2 + k^2 \\ (h,k) = 1}} a_{h,k} \frac{e^{2\pi i(xh + yk)}}{(\omega_1 h + \omega_2 k)^n} \quad \text{für } 0 < x, y < 1; \kappa = 1, 2, \dots$$

dargestellt werden können; sie führen insbesondere zur Transformation von  $x, \dots, \omega_2$ . Zu den  $t$ -Funktionen zurückkehrend, bestätigt man (1.2'.4) entweder durch unbestimmten Ansatz und Eintragung nach (9), oder wie oben (7) mittels Anwendung von  $\mathfrak{D}$  und  $\iint dx dy$ .

## § 6.

### Teilungsgleichungen.

Die drei elementarsymmetrischen Funktionen (3.1, 4.7'', 4.14) gewinnen an Einheitlichkeit bei geeigneter Normierung durch eine Potenz von  $\nu$ . Außerdem zerfallen die eingehenden endlichen Summen der Vielfachheit  $2 \cdot 2, 2 \cdot 3$  in  $2!$  bzw.  $3!$  identische Bestandteile. Schreibt man zur Abkürzung  $\nu^2 = l$ , behält übrigens die früheren Bezeichnungen bei und setzt mit  $\frac{\partial c_\lambda}{\partial w} = 0$

$$(1) \quad -\frac{1}{l!} \prod_{\alpha, \beta=0}^{\nu-1} \left\{ w - \nu t_\lambda \left( \frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu} \right) \right\} = \sum_{\lambda=0}^l c_\lambda \frac{w^{l-\lambda}}{(l-\lambda)!},$$

so folgt für  $\lambda = 0, 1, 2, 3$

$$c_\lambda = t_\lambda(x, y).$$

Dagegen ist, allgemein zu reden, für  $3 < \lambda$   $c_\lambda \neq t_\lambda$ , und wir werden auf direktem Wege nur das einfachste Beispiel zu (1), den Fall der Zweiteilung durchführen, d. h. die Berechnung von  $t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$  aus  $t_1, t_2$ . Es wird hier (1) zu

$$(1) \quad -\frac{1}{24} \prod_{\alpha, \beta=0}^1 \left\{ w - 2 t_1 \left( \frac{x+\alpha}{2}, \frac{y+\beta}{2} \right) \right\} = -\frac{w^4}{24} + t_1 \frac{w^3}{6} + t_2 \frac{w^2}{2} + t_3 w + \delta,$$

und zu leisten bleibt die Bestimmung der von  $w$  unabhängigen Größe  $\delta$ ; dabei ist

$$(2) \quad \delta = -\frac{2}{3} t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}\right) t_1\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) t_1\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right),$$

$$\delta = \frac{1}{3} \cdot \left[ t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}\right) t_1\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) t_1\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) + t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) t_1\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) t_1\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \right. \\ \left. + t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) t_1\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) t_1\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) + t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}\right) t_1\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) \right].$$

Nach (1') also

$$(3) \quad \mathfrak{D}\delta = t_3, \quad \delta = t_4 + A(\omega_1 y - \omega_2 x);$$

die analytische Zusatzfunktion  $A$  von nur einem Argument in (3) ist mit  $t_4$  in  $x, y$  periodisch, wegen

$$t_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) = t_1\left(0, \frac{1}{2}\right) = t_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$$

für reelle  $x, y$  beschränkt, also von  $x, y$  unabhängig. Weil  $t_1$  nur in erster Ordnung unendlich wird, finden wir

$$A = -t_4(0, 0, 0), \quad \text{und nennen}$$

$$(4) \quad -\frac{1}{4!} \prod_{\alpha, \beta=0}^1 \left\{ w - 2t_1\left(\frac{x+\alpha}{2}, \frac{y+\beta}{2}\right) \right\} = -t_4(0, 0) + \sum_{\lambda=0}^4 t_4 \frac{w^{4-\lambda}}{(4-\lambda)!}$$

die Zweiteilungsgleichung für  $t_1(x, y)$ ; die biquadratische Bestimmungsgleichung

$$\sum_{\lambda=0}^4 t_4 \frac{w^{4-\lambda}}{(4-\lambda)!} = t_4(0, 0)$$

läßt nämlich für  $w$  die Lösung zu:

$$w = 2t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

Verbindet man (5.9) mit (4), so wird

$$\frac{1}{4!} \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \left\{ w - 2t_1\left(\frac{x+\alpha}{2}, \frac{y+\beta}{2}\right) \right\} = t_4(0, 0) - t_4\left(x + w \frac{\omega_1}{2\pi i}, y + w \frac{\omega_2}{2\pi i}\right),$$

und es gilt iteriert in  $t$ -Funktionen

$$t_4(0, 0) = t_4\left[x + \frac{\omega_1}{\pi i} t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), y + \frac{\omega_2}{\pi i} t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)\right]$$

identisch in  $x, y, \omega_1, \omega_2$ .

University of Chicago, 4. 4. 1930.

(Eingegangen am 22. 4. 1930.)

## Über Folgen analytischer Funktionen.

(Ergänzung zur Arbeit im 100. Band.)

Von

F. Hartogs in München und A. Rosenthal in Heidelberg.

In § 6 ihrer Arbeit im Band 100 der Mathematischen Annalen haben die Verfasser als „ $\alpha$ -Menge“ jede beschränkte, abgeschlossene Punktmenge der  $xy$ -Ebene bezeichnet, auf welcher  $x$  und daher auch jede stetige Funktion von  $x$  und  $y$  durch Polynome von  $z (= x + iy)$  gleichmäßig approximiert werden kann<sup>1)</sup>, andererseits als „ $\beta$ -Menge“ jede Punktmenge der  $xy$ -Ebene, auf welcher jede Funktion von  $x$  und  $y$  der Klasse 0 oder 1 (im Baireschen Sinne) durch Polynome von  $z$  (gleich- oder ungleichmäßig) approximiert werden kann, und haben daselbst zu der Frage, wie diese beiden Arten von Mengen geometrisch (bzw. mengentheoretisch) charakterisiert werden können, einige Untersuchungen beige-steuert. Nach Abschluß ihrer Arbeit ist es ihnen weiterhin gelungen, nachzuweisen, daß *jede beschränkte, abgeschlossene Punktmenge  $M$ , welche die Ebene nicht zerlegt<sup>2)</sup> und das Flächenmaß Null hat, eine  $\alpha$ -Menge sein muß*. Aber auch durch dieses Ergebnis wurde die Frage nach dem Charakter der  $\alpha$ -Mengen nicht abschließend beantwortet, wie schon daraus hervorgeht, daß jede ungeschlossene Jordansche Kurve, einerlei ob ihr Flächenmaß Null ist oder nicht, eine  $\alpha$ -Menge darstellt. Herr M. Lavrentieff, auf dessen in den Comptes Rendus erschienene

<sup>1)</sup> Erwähnt sei, daß (wie leicht nachzuweisen) in dieser Definition, ohne ihre Tragweite zu ändern, die Worte „beschränkte, abgeschlossene“ sowie „ $x$  und daher auch“ gleichzeitig fortgelassen werden dürfen (wobei unter „stetige Funktion von  $x$  und  $y$ “ nach wie vor eine auf der betreffenden Punktmenge stetige Funktion zu verstehen ist).

<sup>2)</sup> Wird diese Voraussetzung fortgelassen, so ist eine gleichmäßige Approximation von  $x$  durch Polynome von  $z$  selbstverständlich nicht mehr möglich (vgl. Fußnote 36 der früheren Arbeit), wohl aber eine solche durch rationale Funktionen von  $z$ ; siehe im Folgenden Nr. 3.

Note<sup>3)</sup> die Verfasser schon in ihrer damaligen Arbeit hingewiesen hatten und dem einer der Verfasser auf dem Kongreß in Bologna von dem obigen Resultat Kenntnis gab, hat diesem inzwischen unter Übersendung einer Skizze seines Beweises mitgeteilt, daß (wie die Verfasser bereits vermutet hatten) die Einschränkung bezüglich des Flächenmaßes der Menge  $M$  ersetzt werden könne durch die, daß  $M$  ein *linienhaftes Kontinuum* sei. Hierdurch erhält dann die Frage nach dem mengentheoretischen Charakter der  $\alpha$ -Mengen tatsächlich ihre abschließende Beantwortung; denn mit Anwendung des Satzes von S. 233<sup>4)</sup> folgt daraus, daß die  $\alpha$ -Mengen identisch sind mit den *nirgends dichten, beschränkten, abgeschlossenen Mengen, welche die Ebene nicht zerlegen*<sup>5)</sup>. Da nun aber die Untersuchungen des Herrn Lavrentieff auf ganz anderen Methoden beruhen und viel weitergehende und kompliziertere Hilfsmittel benötigen, so schien den Verfassern eine Veröffentlichung ihres eigenen, früheren und auf äußerst einfachem Wege sich ergebenden Resultats doch noch gerechtfertigt zu sein.

Bezüglich der  $\beta$ -Mengen sei in diesem Zusammenhang noch folgendes bemerkt: Sobald nachgewiesen ist, daß jedes linienhafte, die Ebene nicht zerlegende Kontinuum eine  $\alpha$ -Menge darstellt, läßt sich auf Grund der Untersuchungen der Verfasser (siehe die Sätze S. 235 und 260) auch die Frage nach dem mengentheoretischen Charakter der *abgeschlossenen*<sup>6)</sup>  $\beta$ -Mengen sofort beantworten, und zwar sind diese letzteren dann charakterisiert als diejenigen *abgeschlossenen Mengen, die als Vereinigungsmengen von (höchstens) abzählbar vielen  $\alpha$ -Mengen dargestellt werden können*<sup>7)</sup>.

Daraus folgt dann noch, daß dem Ausspruch auf S. 236 der früheren Arbeit nunmehr die folgende abschließendere Form gegeben werden kann: „ $\Gamma_0$  ist dann und nur dann eine  $\beta$ -Menge, wenn (für die Menge der

<sup>3)</sup> Sur un problème de M. P. Montel. Par. C. R. 184 (1927), p. 1634.

<sup>4)</sup> Die angegebenen Seitenzahlen beziehen sich, wenn nicht anders bemerkt, stets auf die frühere Arbeit der Verfasser.

<sup>5)</sup> Oder auch mit denjenigen nirgends dichten, beschränkten, abgeschlossenen Mengen, deren einzelne „Stücke“ (Encykl. d. math. Wiss. II C 9a, S. 902) die Ebene nicht zerlegen.

<sup>6)</sup> Allgemeiner lassen sich (wie aus dem Satze des Textes sofort folgt, da jede abgeschlossene Teilmenge einer  $\beta$ -Menge wieder eine  $\beta$ -Menge ist) diejenigen  $\beta$ -Mengen, welche zugleich „ $F_\sigma$ -Mengen“ (d. h. Vereinigungsmengen von höchstens abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen) sind, charakterisieren als die *Vereinigungsmengen von (höchstens) abzählbar vielen  $\alpha$ -Mengen*. [Daß keineswegs jede  $\beta$ -Menge (auch nicht jede auf der  $x$ -Achse gelegene) eine  $F_\sigma$ -Menge zu sein braucht, ergibt sich leicht bei Benutzung eines Satzes von Hausdorff (Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 309, letzter Satz für  $\alpha = 1$ ).

<sup>7)</sup> Daß es nirgends dichte, beschränkte, abgeschlossene Mengen (und sogar solche, die mit der Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Gebietes identisch sind) gibt, welche diese Eigenschaft nicht besitzen (also nicht  $\beta$ -Mengen sind), ist auf S. 258–259 der früheren Arbeit bemerkt. (Vgl. daselbst auch S. 238 sowie Fußnote 47.)

zu  $\Gamma_0 + C$  komplementären Gebiete  $\mathfrak{F}_*$  die „Bedingung  $B'$  erfüllt ist.“ Denn ist die Bedingung  $B$  für die Gebiete  $\mathfrak{F}_*$  erfüllt, so ist gemäß der auf S. 258 angegebenen Umformung der Bedingung  $B^*)$   $\Gamma_0$  darstellbar als Vereinigungsmenge von (höchstens) abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen, welche die Ebene nicht zerlegen, also (da  $\Gamma_0$  nirgends dicht) von  $\alpha$ -Mengen und daher nach S. 235 selbst eine  $\beta$ -Menge.

### 1. Unter Benutzung der mittels der Gleichungen

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi$$

eingeführten Polarkoordinaten  $\varrho, \varphi$  werde das über ein beliebiges quadrierbares<sup>\*)</sup> Flächenstück  $f$  der  $xy$ -Ebene erstreckte Doppelintegral  $\iint d\varrho d\varphi$  zur Abkürzung als „Pseudoinhalt“  $f^*$  dieses Flächenstücks bezeichnet. Dasselbe hat stets einen positiven (von der Wahl des Nullpunkts abhängigen) Wert. Für den Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius  $r$  ist  $f^* = 2\pi r$ . Für ein Flächenstück  $f$ , das außerhalb dieses Kreises liegt, hat man (wenn  $f$  zugleich den Inhalt desselben bezeichnet)

$$f = \iint \varrho d\varrho d\varphi \geq \iint r d\varrho d\varphi = r f^*$$

und somit

$$f^* \leq \frac{f}{r}.$$

Für jedes beliebige Flächenstück  $f$  gilt (unabhängig von der Wahl des Nullpunktes) die Beziehung

$$f^* < 6\sqrt{f}.$$

Denn beschreibt man um den Nullpunkt einen Kreis mit dem Radius  $r = \sqrt{\frac{f}{2\pi}}$  und bezeichnet mit  $f_1$  den innerhalb, mit  $f_2$  den außerhalb desselben gelegenen Bestandteil von  $f$ , so ist

$$f^* = f_1^* + f_2^* \leq 2\pi r + \frac{f_2}{r} \leq \sqrt{2\pi f} + \sqrt{2\pi f} < 6\sqrt{f}.$$

2. Für einen beliebigen, von endlich vielen rektifizierbaren Kurven begrenzten Bereich<sup>\*)</sup>  $\mathfrak{B}$  der  $xy$ -Ebene gilt, wenn die Funktionen  $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  in  $\mathfrak{B}$  stetig sind, die bekannte Beziehung

$$\int_{(\partial)} P dx + Q dy = \iint_{(\mathfrak{B})} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

<sup>\*)</sup> Wegen der Ersetzbarkeit von  $\Gamma$  durch  $\Gamma_0$  vgl. das in Fußnote 95 der früheren Arbeit Gesagte.

<sup>\*)</sup> Es kommen bei der nachherigen Anwendung bloß Polygonflächen in Betracht.

wobei das erste Integral über die Begrenzung  $l$  des Bereiches  $\mathfrak{B}$  im positiven Sinne zu erstrecken ist.

Wählt man

$$P = \frac{x}{x+iy}, \quad Q = iP = \frac{iz}{x+iy},$$

so ergibt sich

$$\int_{(l)} \frac{x}{x+iy} (dx + i dy) = i \iint_{(\mathfrak{B})} \frac{dx dy}{x+iy}$$

zunächst unter der Voraussetzung, daß  $\mathfrak{B}$  den Nullpunkt nicht enthält. Die Gleichung behält aber auch dann, wenn der Nullpunkt im Innern von  $\mathfrak{B}$  liegt (oder auch auf dem Rande von  $\mathfrak{B}$ , was jedoch für die folgenden Betrachtungen belanglos ist), ihre Gültigkeit unverändert bei. Denn zerlegt man in diesem Falle  $\mathfrak{B}$  in zwei Teilbereiche, deren erster ein Kreis um den Nullpunkt ist, so gilt die Gleichung für jeden der beiden Teilbereiche (und zwar sind für den ersteren beide Seiten der Gleichung, wie sich durch Anwendung von Polarkoordinaten sofort ergibt, gleich Null).

Allgemein hat man also, wenn man noch  $x+iy = z$ ,  $x_0+iy_0 = z_0$  setzt, für jeden Bereich  $\mathfrak{B}$  der  $z$ -Ebene die Beziehung

$$\int_{(l)} \frac{z-z_0}{z-z_0} dz = i \iint_{(\mathfrak{B})} \frac{dx dy}{z-z_0}.$$

3. Sei  $M$  eine in der  $z(=x+iy)$ -Ebene gelegene beschränkte, abgeschlossene Punktmenge, deren Flächenmaß gleich Null ist. Es existiert dann eine ein- oder mehrfach zusammenhängende Polygonfläche  $\mathfrak{P}$ , welche  $M$  ganz in ihrem Innern enthält und deren Inhalt kleiner ist als das Quadrat einer vorgeschriebenen positiven Größe  $\varepsilon$ .

Wird der Rand dieser Polygonfläche mit  $p$  bezeichnet, so stellt

$$\psi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(p)} \frac{x dz}{z-z_0}$$

infolge der Stetigkeit des Integranden eine im Innern von  $\mathfrak{P}$  reguläre analytische Funktion von  $z_0$  dar, und es gilt, wenn  $z_0 = x_0 + iy_0$  einen beliebigen inneren Punkt von  $\mathfrak{P}$  bezeichnet:

$$\psi(z_0) - x_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(p)} \frac{x-x_0}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathfrak{P})} \frac{dx dy}{z-z_0}$$

oder, indem man mittels der Gleichungen  $x-x_0 = \varrho \cos \varphi$ ,  $y-y_0 = \varrho \sin \varphi$  zu Polarkoordinaten übergeht:

$$\psi(z_0) - x_0 = \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathfrak{P})} e^{-i\varphi} d\varrho d\varphi.$$



Der absolute Betrag des letzteren Integrals ist aber höchstens gleich dem Pseudoinhalt von  $\mathfrak{P}$ , also  $< 6\varepsilon$  und somit schließlich

$$|\psi(z) - x| < \varepsilon$$

für alle  $z$  innerhalb  $\mathfrak{P}$ .

Ist nun  $\mathfrak{P}_0$  eine im Innern von  $\mathfrak{P}$  gelegene Polygonfläche, welche  $M$  ebenfalls noch enthält, so existieren<sup>10)</sup> rationale Funktionen von  $z$ , deren Pole außerhalb  $\mathfrak{P}_0$  liegen und die sich in  $\mathfrak{P}_0$  von  $\psi(z)$  um weniger als  $\varepsilon$  unterscheiden. Damit ist also bewiesen, daß  $x$  — und daher<sup>11)</sup> auch jede auf  $M$  stetige Funktion von  $x$  und  $y$  — auf  $M$  durch rationale Funktionen von  $z$  gleichmäßig approximiert werden kann.

Fügt man nun noch die weitere Voraussetzung hinzu, daß die Punktmenge  $M$  die Ebene nicht zerlege, so können die Polygonflächen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{P}_0$  als einfach zusammenhängend angenommen werden, was zur Folge hat, daß in  $\mathfrak{P}_0$  eine gleichmäßige Approximation von  $\psi(z)$  durch ganze rationale Funktionen von  $z$  möglich ist. Damit ist dann nachgewiesen, daß  $M$  in diesem Falle eine  $\alpha$ -Menge ist.

<sup>10)</sup> C. Runge, Acta Math. 6 (1885), S. 229.

<sup>11)</sup> Vgl. Fußnote 35 der früheren Arbeit.

(Eingegangen am 1. 12. 1930.)

# Über ausgezeichnete Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

Von

Stefan Bergmann in Berlin.

## § 1.

### Problemstellung. Definitionen.

Der reelle, wie auch der imaginäre Teil einer Funktion

$$f(X, Z) = U_1(\xi, \eta, \zeta, \tau) + iU_2(\xi, \eta, \zeta, \tau)^1)$$

der beiden komplexen Veränderlichen  $X = \xi + i\eta$ ,  $Z = \zeta + i\tau$  genügen den Gleichungen<sup>2)</sup>

$$(A) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$(B) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta \partial \eta} = 0.$$

Die Funktionen, die nur dem System (A) genügen, werden als doppeltharmonische, die (A) und (B) befriedigen, als biharmonische bezeichnet<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Es soll im folgenden anstatt  $U(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  zur Abkürzung  $U(X, Z)$  geschrieben werden. Wir sagen demgemäß von der Funktion  $U(X, Z)$ , sie sei doppelt- oder biharmonisch in den Veränderlichen  $X$  und  $Z$  und (einfach) harmonisch in  $X$  oder  $Z$ .

<sup>2)</sup> Vgl. dazu H. Poincaré, Sur les fonctions de deux variables, Acta mathematica 2 (1883), S. 99.

<sup>3)</sup> Man muß somit drei Arten von Funktionen unterscheiden:

1. harmonische, d. h. die die Gleichung

$$(C) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = 0$$

befriedigen;

2. doppeltharmonische, d. h. die, die das Gleichungssystem (A) simultan befriedigen;

3. biharmonische, d. h. die, die das Gleichungssystem (A) und (B) gleichzeitig befriedigen.

Jede dieser Funktionenklassen ist offenbar ein Spezialfall der vorhergehenden.

Bei der letzten Funktionenklasse untersuchen wir im folgenden, in Verallgemeinerung der entsprechenden Problemstellung der Potentialtheorie, die Frage, für gewisse einfachzusammenhängende<sup>4)</sup> Bereiche  $\mathfrak{B}$ <sup>5)</sup> einen solchen Randteil  $\mathfrak{F}$  zu bestimmen, daß zu einer auf  $\mathfrak{F}$  definierten und dort stetigen Funktion, die bestimmten Nebenbedingungen<sup>6)</sup> genügt, eine und nur eine in  $\mathfrak{B}$  biharmonische Funktion, die auf  $\mathfrak{F}$  die vorgegebenen Randwerte annimmt, existiert.

Bekanntlich muß bei den harmonischen Funktionen die Funktion auf dem ganzen Rande vorgeschrieben werden, um die Potentialfunktion im Innern von  $\mathfrak{B}$  eindeutig zu definieren (die Randmenge fällt also mit der ganzen Berandung zusammen). Bei den biharmonischen Funktionen liegen statt der einen Gleichung (C) die Gleichungen (A) und (B) zugrunde, und es wird nicht mehr möglich sein, die Randwerte auf der ganzen (dreidimensionalen) Begrenzung von  $\mathfrak{B}$  vorzuschreiben. Wir betrachten insbesondere solche Bereiche  $\mathfrak{B}$ , wo auf der (dreidimensionalen) Begrenzung eine geschlossene (zweidimensionale) Fläche  $\mathfrak{F}$  liegt, so daß es zu jeder vorgeschriebenen stetigen Funktion auf  $\mathfrak{F}$  mit den oben erwähnten N.B. eine und nur eine in  $\mathfrak{B}$  biharmonische Funktion gibt, die bei der Annäherung an jeden Punkt von  $\mathfrak{F}$  gegen den vorgeschriebenen Funktionswert konvergiert. Wir nennen dann  $\mathfrak{F}$  die Bestimmungsfläche von  $\mathfrak{B}$ , und sagen auch:  $\mathfrak{B}$  besitzt bei der zugrunde gelegten N.B. die Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}$ .

Ist  $\mathfrak{E}$  der Einheitsbizzylinder

$$(1) \quad |X| < 1, \quad |Z| < 1,$$

<sup>4)</sup> Unter einem einfachzusammenhängenden Bereich wird ein Bereich verstanden, der topologisch einer Hyperkugel homöomorph ist.

<sup>5)</sup> Mit deutschen Buchstaben sollen im folgenden stets Mannigfaltigkeiten bezeichnet werden, wobei:

fette große	Buchstaben	vierdimensionale	Mannigfaltigkeiten,
" kleine	"	dreidimensionale	"
gewöhnliche große	"	zweidimensionale	"
" kleine	"	eindimensionale	"

bedeuten.

Durch die (großen und kleinen) gleichen Buchstaben werden wir im folgenden einen Bereich und seine Berandung bezeichnen (so bedeutet  $\mathfrak{c}$  die Berandung von  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{a}(Z)$  die Berandung von  $\mathfrak{A}(Z)$ ,  $\mathfrak{b}(Z)$  die von  $\mathfrak{B}(Z)$ ).

Die im folgenden vorkommenden zweidimensionalen Bereiche sind stets relativ zu der sie enthaltenden Ebene offen, falls nicht ausdrücklich das Gegenteil hervorgehoben wird.

<sup>6)</sup> Für die von uns auf S. 614 betrachteten Flächen  $\mathfrak{F}$  ist das die N.B. ( $N_1$ ) (siehe auch ( $N_0$ ), S. 613).

N.B. = Nebenbedingung.

so ist seine Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}$  durch

$$(2) \quad |X| = 1, \quad |Z| = 1$$

gegeben. Wird nämlich auf  $\mathfrak{F}$  die stetige (reelle) Funktion  $u(\varphi, \psi)$  vorgegeben, wo  $X = Re^{i\varphi}$ ,  $Z = Se^{i\psi}$  ist, so ist die doppeltharmonische Funktion  $U(X, Z)$ , die auf  $\mathfrak{F}$  die Randwerte  $u(\varphi, \psi)$  annimmt, eindeutig durch das Poissonsche Doppelintegral

$$(3) \quad U(X, Z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\Phi, \Psi) P(R, \Phi - \varphi) P(S, \Psi - \psi) d\Phi d\Psi,$$

$$(3a) \quad P(R, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - R^2}{1 + R^2 - 2R \cos t}$$

gegeben<sup>7)</sup>. Als N.B. ( $N_0$ ) für  $u(\varphi, \psi)$  wählt man

$$(N_0) \quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi, \psi) \cos(m\varphi - n\psi) d\varphi d\psi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi, \psi) \sin(m\varphi - n\psi) d\varphi d\psi &= 0, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} m=1, 2, 3, 4, 5, \dots, \\ n=1, 2, 3, 4, 5, \dots \end{pmatrix}$$

da die doppeltharmonische Funktion  $U(X, Z)$  dann und nur dann biharmonisch wird, wenn ( $N_0$ ) erfüllt ist<sup>8)</sup>.

Das Funktionenpaar

$$(4) \quad X' = f(X, Z), \quad Z' = g(X, Z)$$

sei in  $\mathfrak{B}$  regulär-analytisch<sup>9)</sup> und besitze ferner die Eigenschaft, daß bei der Annäherung des Punktes  $X, Z$  an einen Punkt der Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{B}$  (bei Zugrundelegung gewisser N.B. ( $N$ )) die Funktionen  $f, g$  gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren. Wir erklären die Abbildung auch für Punkte von  $\mathfrak{F}$ , indem wir sie durch diese Grenzwerte definieren. Ist nun die so definierte Abbildung in  $\mathfrak{B} + \mathfrak{F}$  schlicht, so liefert sie als Bild von  $\mathfrak{B}$  einen einfach zusammenhängenden Bereich  $\mathfrak{B}'$ , zu dessen Rand die geschlossene Fläche  $\mathfrak{F}'$  (das Bild von  $\mathfrak{F}$ ) gehört.  $\mathfrak{F}'$  ist dann die Bestimmungs-

<sup>7)</sup> Für einen Produktbereich  $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$  ist die doppeltharmonische Funktion  $U(X, Z)$  durch

$$(3b) \quad U(X, Z) = \int_{\mathfrak{C}_1} \int_{\mathfrak{C}_2} u dH_1 dH_2$$

gegeben, wo  $H_k$  ( $k=1, 2$ ) die zur Greenschen Funktion von  $\mathfrak{C}_k$  konjugierte Potentialfunktion bedeutet.

<sup>8)</sup> Vgl. dazu W. W. Küstermann, Über Fouriersche Doppelreihen und das Poissonsche Doppelintegral. Inauguraldissertation, München 1913, § 6, S. 40–45, wie auch Hilda Geiringer, Trigonometrische Doppelreihen, Monatshefte für Mathematik und Physik 29 (1918), S. 65–144, insbesondere (53) S. 133 und (55) S. 137, und L. Nikliborc, Sur les fonctions hyperharmoniques, Comptes rendus 180 (1925), S. 1008 und 182 (1926), S. 110.

<sup>9)</sup> Betrachtet als Funktionen zweier komplexen Veränderlichen  $X, Z$ .

fläche von  $\mathfrak{B}'$ , wenn man die N.B.  $(N')$  für die Randfunktion auf  $\mathfrak{F}'$  so wählt, daß sie bei der Transformation (4) in die N.B.  $(N)$  für die transformierte Randfunktion auf  $\mathfrak{F}$  übergehen. Dies folgt unmittelbar daraus, daß durch die analytische Abbildung eine in  $\mathfrak{B}$  biharmonische Funktion in eine in  $\mathfrak{B}'$  biharmonische Funktion übergeht, in Verbindung mit der Stetigkeit und Eineindeutigkeit der Abbildung in  $\mathfrak{B} + \mathfrak{F}$ . Wendet man dies auf  $\mathfrak{C}$  an, so ergibt sich, daß mit  $\mathfrak{C}$  zugleich alle Bereiche  $\mathfrak{B}$ , die aus  $\mathfrak{C}$  durch solche analytische Abbildungen hervorgehen, Bestimmungsflächen besitzen, wenn man die N.B. entsprechend transformiert, die wir im folgenden für diese Bereiche *unterschiedslos* mit  $(N_0)$  bezeichnen werden.

Diesen unmittelbar gegebenen Bereichen mit Bestimmungsflächen werden wir in dieser Arbeit eine weitere Bereichsklasse hinzufügen. Hierbei werden wir unter einer gewissen Modifikation des Gedankenganges so vorgehen, daß wir die Möglichkeit zeigen, zu jeder (zweidimensionalen) Fläche  $\mathfrak{F}$  von gewissem Typus einen (vierdimensionalen) Bereich  $\mathfrak{A}$  zu konstruieren, für den  $\mathfrak{F}$  bei bestimmten N.B.  $(N_1)$  (s. u.) die Bestimmungsfläche ist.

Die von uns betrachteten Flächen  $\mathfrak{F}$  weisen folgende Struktur auf:

Es sei in der Ebene:  $X = 0$  eine geschlossene Kurve  $c$  gegeben, die den Bereich  $\mathfrak{C}$  begrenzt und deren Punkte wir mit  $\bar{Z}$  bezeichnen<sup>10)</sup>. In der Ebene:  $Z = 0$  entspreche jedem Punkte  $\bar{Z}$  von  $c$  eine geschlossene Kurve  $b(\bar{Z})$ , die einen Bereich  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  begrenzt, wobei alle  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  dieselbe Kreisscheibe  $\mathfrak{S}_0$  vom Radius  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) um  $X = 0$  enthalten sollen. (Für die näheren Voraussetzungen über  $c$  und  $b(\bar{Z})$  vgl. § 3.) Durch

$$(5) \quad \mathfrak{F} = c \times b(\bar{Z})$$

bezeichnen wir die Fläche, die dadurch entsteht, daß man die Kurve  $b(\bar{Z})$  in die Ebene:  $Z = \bar{Z}$  verlegt (mit Erhaltung der  $X$ -Koordinaten) und die Vereinigungsmenge der so verlegten  $b(\bar{Z})$  für sämtliche  $\bar{Z}$  bildet<sup>11)</sup>.

Unsere Aufgabe wird es dann sein, auch für die inneren Punkte  $Z$  des durch  $c$  begrenzten Bereiches  $\mathfrak{C}$  der  $Z$ -Ebene geschlossene Kurven  $b(Z)$  zu definieren, die je einen Bereich  $\mathfrak{B}(Z)$  begrenzen, der stetig von  $Z$  abhängt und wiederum die Kreisscheibe  $\mathfrak{S}_0$  enthält. Der vierdimensionale Bereich  $\mathfrak{A}$ , zu dem  $\mathfrak{F}$  (mit der N.B.  $(N_1)$ ) als Bestimmungsfläche gehört,

<sup>10)</sup> Mit  $\bar{X}, \bar{Z}$  werden im folgenden stets die Punkte von  $\mathfrak{F}$  bezeichnet.

<sup>11)</sup> Diese Flächen sind analytisch in der Form

$$\xi = f_1(u, v), \quad \eta = f_2(u, v), \quad \zeta = g_1(v), \quad \tau = g_2(v)$$

darstellbar, wobei  $f_x$  und  $g_x$  ( $x = 1, 2$ ) reelle periodische Funktionen der reellen Veränderlichen  $u, v$  bzw.  $v$  sind.

wird dann durch

$$(5a) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}(Z)$$

gegeben. Die Produktoperation hat analog wie früher die Bedeutung, daß für jeden inneren Punkt  $Z^*$  von  $\mathfrak{C}$  die Bereiche  $\mathfrak{B}(Z^*)$  in die Ebene  $Z = Z^*$  verlegt werden, und die Vereinigungsmenge der so verlegten  $\mathfrak{B}(Z^*)$  für sämtliche  $Z^*$  aus  $\mathfrak{C}$  gebildet wird.

Die Bedingung ( $N_1$ ), die wir dem vorgegebenen Wertevorrat  $u(\bar{X}, \bar{Z})$  auf  $\mathfrak{F}$  auferlegen, formulieren wir folgendermaßen: Wir bilden in  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  für jedes  $\bar{Z}$  die in  $X$  harmonische Funktion  $U(X, \bar{Z})$  mit den Randwerten  $u(\bar{X}, \bar{Z})$  und verlangen, daß  $U(X, \bar{Z})$  auf der Bestimmungsfläche

$$c \times j_\sigma$$

des Produktbereiches  $\mathfrak{C} \times \mathfrak{J}_\sigma$  die (entsprechend transformierte) N.B. ( $N_0$ ) erfüllt<sup>12)</sup>.

Der Bizylinder  $\mathfrak{C}'$

$$(1a) \quad |X'| < 1, \quad |Z'| < 1$$

geht durch die schlichte Abbildung

$$(4a) \quad X = f(X', Z'), \quad Z = g(Z'),$$

wo  $f(X', Z')$  und  $g(Z')$  im Innern von  $\mathfrak{C}'$  regulär analytisch<sup>12)</sup> und am Rande stetig sind und für  $f(X', Z')$  überdies

$$(4b) \quad f(0, Z') = 0, \\ 0 < \alpha \leq \left| \frac{\partial f(X', Z')}{\partial X'} \right|_{X'=0} \leq \beta < \infty$$

gilt, in einen Bereich  $\mathfrak{B}$  über, dessen Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}$  im Sinne der Erörterungen auf S. 613 durch

$$\mathfrak{F} = c \times b(\bar{Z})$$

gegeben ist. Hier bedeutet  $c$  das Bild von  $|Z'| = 1$  und  $b(\bar{Z})$  das Bild von  $|X'| = 1$  bei festem  $\bar{Z} = g(\bar{Z}')$ , und für den Wertevorrat auf  $\mathfrak{F}$  ist die N.B. ( $N_0$ ) zu wählen. Die Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}$  hat hier die in (5) angegebene Gestalt, und auch der Bereich  $\mathfrak{B}$  besitzt die oben für  $\mathfrak{A}$  angegebene Struktur. (Die Existenz eines positiven  $\sigma$  mit der Eigenschaft, daß sämtliche  $\mathfrak{B}(Z)$  die Kreisscheibe  $\mathfrak{J}_\sigma$  vom Radius  $\sigma$  um  $X=0$  enthalten, folgt durch Anwendung der Sätze von Koebe und Bieberbach<sup>13)</sup>, nach denen  $\sigma = \frac{1}{4}\alpha$  genommen werden kann.)

<sup>12)</sup> Offenbar kann in der N.B. ( $N_1$ ) der Kreis  $\mathfrak{J}_\sigma$  durch jeden  $\mathfrak{J}_{\sigma'}$  ( $0 < \sigma' \leq \sigma$ ) ersetzt werden. Unter Heranziehung der Greenschen Funktionen der Bereiche  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  und  $\mathfrak{C}$  kann man die Bedingung ( $N_1$ ) auch in expliziter Form als Integraleigenschaft der Randwerte  $u(\bar{X}, \bar{Z})$  aufschreiben.

<sup>13)</sup> Z. B. Bieberbach, Funktionentheorie, II. Bd. (Leipzig u. Berlin 1927), S. 86.

Wir werden nun zeigen, daß im Falle, wenn zur Fläche  $\mathfrak{F}$  von der Struktur (5) in der eben angegebenen Weise vermöge der Transformation (4a) ein Bereich  $\mathfrak{B}$  konstruiert werden kann, die N.B.  $(N_0)$  und  $(N_1)$  für die Randfunktion äquivalent sind. Es seien auf  $\mathfrak{F}$  die Werte  $u(\bar{X}, \bar{Z})$  vorgeschrieben, die dort der N.B.  $(N_1)$  genügen. Wir bilden für jeden Punkt  $\bar{Z}$  von  $c$  die in  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  harmonische Funktion  $U(X, \bar{Z})$ , die auf  $\mathfrak{b}(\bar{Z})$  die vorgeschriebenen Werte  $u(\bar{X}, \bar{Z})$  annimmt ( $U(\bar{X}, \bar{Z}) = u(\bar{X}, \bar{Z})$ ), und die also im Bereiche

$$\mathfrak{b} = [c \times \mathfrak{B}(\bar{Z})] + \mathfrak{F}^{14})$$

definiert ist. Durch die Transformation (4a) geht  $U(X, \bar{Z})$  in die Funktion  $U'(X', \bar{Z}')$  über, die im Bilde  $\mathfrak{b}'$  von  $\mathfrak{b}$  definiert ist, wobei die Bestimmungsfläche

$$(2a) \quad |X'| = 1, \quad |Z'| = 1$$

von  $\mathfrak{C}'$  in  $\mathfrak{b}'$  liegt. Wir können somit diejenige doppeltharmonische Funktion  $V'(X', Z')$  bilden, die auf (2a) die Werte  $U'(X', \bar{Z}')$  annimmt. Um nun den biharmonischen Charakter von  $V'(X', Z')$  zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß in  $\mathfrak{b}'$

$$(6) \quad U'(X', \bar{Z}') = V'(X', \bar{Z}')$$

ist. Die Funktion  $U'(X', Z')$  ist nämlich in  $\mathfrak{b}'$  für jedes  $\bar{Z}'$  in  $X'$  harmonisch, denn sie geht aus  $U(X, \bar{Z})$  durch die Transformation (4a) hervor, die bei festen  $\bar{Z}$  in  $X$  analytisch ist; die beiden in  $X'$  harmonischen Funktionen  $U'(X', \bar{Z}')$  und  $V'(X', \bar{Z}')$  nehmen für jedes  $\bar{Z}'$  auf der Berandung  $|X'| = 1$  die gleichen Randwerte  $U'(\bar{X}', \bar{Z}')$  an und stimmen folglich auch für alle  $|X'| < 1$ , d. h. in  $\mathfrak{b}'$  überein.

Andererseits enthalten alle Bereiche  $\mathfrak{B}(Z)$  die Kreisscheibe  $\mathfrak{Z}_0$  mit dem Radius  $\sigma = \frac{1}{2}\alpha$  um den Punkt  $X = 0$ , also liegt in  $\mathfrak{B}$  der Produktbereich

$$\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{C} \times \mathfrak{Z}_0.$$

Bilden wir mittelst des Poissonschen Doppelintegrals (3b) die in  $\mathfrak{Z}_0$  doppeltharmonische Funktion  $W(X, Z)$ , die auf  $c \times j_0$  (der Bestimmungsfläche von  $\mathfrak{Z}_0$ ) die Werte  $U(X, \bar{Z})$  annimmt, so ist sie biharmonisch, weil nach der Definition von  $(N_1)$  die N.B.  $(N_0)$  auf  $c \times j_0$  erfüllt ist.

Im Durchschnitte  $\mathfrak{b}_0$  von  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{Z}_0$  stimmen nun die beiden in  $X$  harmonischen Funktionen  $W(X, \bar{Z})$  und  $U(X, \bar{Z})$  überein, da sie ja für  $|X| = \sigma$  nach der Konstruktion zusammenfallen. Durch die Transformation (4a) geht die biharmonische Funktion  $W(X, Z)$  in die biharmonische

<sup>14)</sup> Die Produktoperation hat analog wie früher die Bedeutung, daß für jeden Punkt  $\bar{Z}$  von  $c$  die Bereiche  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  in die Ebene  $Z = \bar{Z}$  verlegt und die Vereinigungsmenge der so verlegten  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  für sämtliche  $\bar{Z}$  aus  $c$  gebildet wird.



$W'(X', Z')$  über, die im Bilde  $\mathfrak{Z}'$  von  $\mathfrak{Z}_\sigma$  definiert ist, und es gilt in  $\mathfrak{b}'$  (Durchschnitt von  $\mathfrak{b}'$  und  $\mathfrak{Z}'_\sigma$ ) nach (6) und dem eben Bewiesenen

$$(6a) \quad W'(X', \bar{Z}') = U'(X', \bar{Z}') = V'(X', \bar{Z}').$$

Nun enthalten die Bilder  $\mathfrak{Z}'_\sigma(Z')$  der Kreisscheibe  $\mathfrak{Z}_\sigma$ , wie aus den erwähnten Sätzen von Koebe und Bieberbach folgt, eine Kreisscheibe  $\mathfrak{Z}'_\sigma$  mit dem Radius  $\kappa = \frac{1}{4} \frac{\sigma}{\beta}$ . Im Innern von  $\mathfrak{Z}'_\sigma$  liegt also der Produktbereich

$$\mathfrak{Z}_\sigma = \mathfrak{C} \times \mathfrak{Z}_\sigma,$$

auf dessen Bestimmungsfläche  $c \times j_\sigma$  die doppeltharmonischen Funktionen  $V'(X', Z')$  und  $W'(X', Z')$  nach (6a) übereinstimmen. Es ist also in  $\mathfrak{Z}_\sigma$

$$V'(X', Z') = W'(X', Z'),$$

und somit ist  $V'(X', Z')$  in  $\mathfrak{C}'$  biharmonisch. Folglich ist für die Werte  $U(\bar{X}, \bar{Z}) = U'(\bar{X}', \bar{Z}') = V'(\bar{X}', \bar{Z}')$  die N.B. ( $N_0$ ) erfüllt.

Ist umgekehrt die N.B. ( $N_0$ ) erfüllt und bildet man mit den transformierten Randwerten  $U'(\bar{X}', \bar{Z}')$  auf (2a) die doppeltharmonische Funktion  $V'(X', Z')$ , so ist diese biharmonisch. Sie geht vermöge (4a) in eine biharmonische Funktion  $V(X, Z)$  über, die in  $\mathfrak{B}$  definiert ist, und es gilt in  $\mathfrak{b}$

$$V(X, \bar{Z}) = U(X, \bar{Z}),$$

da die beiden in  $X$  harmonischen Funktionen für jedes  $\bar{Z}$  auf  $\mathfrak{b}(Z)$  dieselben Randwerte  $U(\bar{X}, \bar{Z})$  annehmen. Die Funktion  $V(X, Z)$  ist a fortiori in  $\mathfrak{Z}_\sigma$  biharmonisch, folglich muß  $U(X, Z)$  auf der Bestimmungsfläche  $c \times j_\sigma$  von  $\mathfrak{Z}_\sigma$  den N.B. ( $N_0$ ) genügen oder, was dasselbe bedeutet, die N.B. ( $N_1$ ) ist für  $U(\bar{X}, \bar{Z})$  erfüllt.

Im § 2 definieren wir eine Funktion  $T_\mu(Z, \mu)$ , mit deren Hilfe wir im § 3 den Bereich  $\mathfrak{A}$  konstruieren, und zeigen dann im § 4, daß  $\mathfrak{A}$  die Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}$  besitzt.

Für die Ausführungen im § 4 benötigen wir noch den

Hilfssatz<sup>15)</sup>. Im Einheitsbizzylinder  $\mathfrak{C}$

$$(1) \quad \begin{aligned} |X| < 1, & \quad |Z| < 1, \\ X = R e^{i\varphi}, & \quad Z = S e^{i\psi} \end{aligned}$$

sei eine von einem Parameter  $\lambda$  abhängige Menge von doppeltharmonischen Funktionen  $U(X, Z; \lambda)$  gegeben, die auf der Bestimmungsfläche

$$(2) \quad \begin{aligned} |X| = 1, & \quad |Z| = 1, \\ X = e^{i\varphi}, & \quad Z = e^{i\psi} \end{aligned}$$

<sup>15)</sup> Den Hilfssatz beweisen wir für doppeltharmonische Funktionen, obwohl wir nur den Spezialfall der biharmonischen Funktionen benötigen.

die Werte  $u(\varphi, \psi; \lambda) = U(e^{i\varphi}, e^{i\psi}; \lambda)$  annehmen. Von den Randwerten  $u(\varphi, \psi; \lambda)$  sei vorausgesetzt, daß sie (gleichmäßig) stetig sind, und zwar gleichmäßig in  $\lambda$ . Dann sind auch die  $U(X, Z; \lambda)$  im abgeschlossenen  $\mathfrak{G}$  (gleichmäßig) stetig, und zwar gleichmäßig in  $\lambda$ .

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} U(R'e^{i\varphi'}, S'e^{i\psi'}; \lambda) - U(Re^{i\varphi}, Se^{i\psi}; \lambda) \\ = \{U(R'e^{i\varphi'}, S'e^{i\psi'}; \lambda) - U(R'e^{i\varphi}, S'e^{i\psi'}; \lambda)\} \\ + \{U(R'e^{i\varphi}, S'e^{i\psi'}; \lambda) - U(Re^{i\varphi}, Se^{i\psi}; \lambda)\} \end{aligned}$$

genügt es zu zeigen:

1.  $U(Re^{i\varphi}, Se^{i\psi}; \lambda)$  ist (gleichmäßig) stetig in  $\varphi$  und  $\psi$ , und zwar gleichmäßig für  $R, S, \lambda$ .

2.  $U(Re^{i\varphi}, Se^{i\psi}; \lambda)$  ist (gleichmäßig) stetig in  $R$  und  $S$ , und zwar gleichmäßig in  $\varphi, \psi, \lambda$ .

Zu 1. Es ist

$$\begin{aligned} (7) \quad & U(Re^{i\varphi'}, Se^{i\psi'}; \lambda) - U(Re^{i\varphi}, Se^{i\psi}; \lambda) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\varphi' + \Phi, \psi' + \Psi; \lambda) - u(\varphi + \Phi, \psi + \Psi; \lambda)] P(R, \Phi) P(S, \Psi) d\Phi d\Psi. \end{aligned}$$

Ist nun  $\eta(\delta)$  die obere Grenze von

$$|u(\varphi' + \Phi, \psi' + \Psi; \lambda) - u(\varphi + \Phi, \psi + \Psi; \lambda)|$$

für sämtliche

$$|\varphi' - \varphi| \leq \delta, \quad |\psi' - \psi| \leq \delta$$

und für alle  $\Phi, \Psi$  und  $\lambda$ , so folgt aus der vorausgesetzten gleichmäßigen Stetigkeit von  $u(\varphi, \psi; \lambda)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta(\delta) = 0,$$

andererseits folgt aus (7)

$$\begin{aligned} & |U(Re^{i\varphi'}, Se^{i\psi'}; \lambda) - U(Re^{i\varphi}, Se^{i\psi}; \lambda)| \\ & \leq \eta(\delta) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, \Phi) P(S, \Psi) d\Phi d\Psi = \eta(\delta), \end{aligned}$$

womit 1. bewiesen ist.

Zu 2. Es genügt offenbar<sup>16)</sup> zu zeigen, daß der Grenzübergang

$$(8) \quad \lim_{R \rightarrow 1, S \rightarrow 1} U(Re^{i\varphi}, Se^{i\psi}; \lambda) = u(\varphi, \psi; \lambda)$$

gleichmäßig für alle  $\varphi, \psi, \lambda$  erfolgt.

<sup>16)</sup> Für die inneren Punkte von  $\mathfrak{G}$  läßt sich die behauptete Stetigkeitseigenschaft aus der Darstellung (3) unmittelbar ablesen.

Es ist nun

$$(9) \quad U(R e^{i\varphi}, S e^{i\psi}; \lambda) - u(\varphi, \psi; \lambda) \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\varphi + \Phi, \psi + \Psi; \lambda) - u(\varphi, \psi; \lambda)] P(R, \Phi) P(S, \Psi) d\Phi d\Psi.$$

Es sei nun  $\omega(\Phi, \Psi)$  die obere Schranke von

$$|u(\varphi + \Phi, \psi + \Psi; \lambda) - u(\varphi, \psi; \lambda)|$$

für alle  $\varphi, \psi$  und  $\lambda$ . Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt dann:

$$(10) \quad \lim_{\Phi \rightarrow 0, \Psi \rightarrow 0} \omega(\Phi, \Psi) = 0.$$

Aus der Ungleichung

$$(11) \quad |U(R e^{i\varphi}, S e^{i\psi}; \lambda) - U(e^{i\varphi}, e^{i\psi}; \lambda)| \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\Phi, \Psi) P(R, \Phi) P(S, \Psi) d\Phi d\Psi$$

folgt dann<sup>17)</sup> wegen (10), daß das auf der rechten Seite von (11) stehende Doppelintegral gegen 0 konvergiert (und zwar unabhängig von  $\varphi, \psi$  und  $\lambda$ ), womit 2. ebenfalls bewiesen ist.

## § 2.

### Die Aufstellung der Hilfsfunktion $T_\nu(Z; \mu)$ .

Durch den Koordinatenanfangspunkt  $O$  der komplexen  $w$ -Ebene führen wir symmetrisch zu der reellen Achse unter den Winkeln  $\pm \frac{\pi}{2\nu}$  zwei

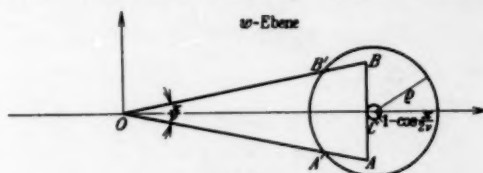


Fig. 1.

Halbstrahlen und tragen auf ihnen die Strecke  $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$  ab. Das gleichschenklige Dreieck  $OAB$  (im folgenden mit  $A_\nu$  bezeichnet) mit den Winkeln  $\frac{\pi}{\nu}, \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{\nu}), \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{\nu})$  geht durch die Abbildung

$$(12) \quad w = t_\nu(z) \equiv e^{-i\frac{\pi}{2\nu}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\nu})}{\Gamma(\frac{1}{\nu}) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\nu})} \int_0^z z^{\frac{1}{\nu}-1} (1-z)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\nu}} dz$$

<sup>17)</sup> Vgl. dazu z. B. die in der Fußnote \*) angegebene Arbeit von H. Geiringer, S. 133 und 134.

aus der oberen Hälfte der komplexen  $z$ -Ebene hervor. Hierbei entspricht dem Punkt  $z=0$  der Punkt  $w=0$ , den Punkten  $z=1$  und  $z=\infty$  die anderen Eckpunkte  $A$  bzw.  $B$ ; für  $\arcsin z$  und  $\arcsin(1-z)$  in der oberen Halbebene soll derjenige Wert gewählt werden, der den Ungleichungen

$$-\pi < \arcsin z < 0, \quad 0 < \arcsin(1-z) < \pi$$

genügt.

Es sei:  $0 < \lambda < 1$ . Für  $|z| \leq \lambda$  erhält man wegen

$$(1-z)^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\nu}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\nu}}{n} z^n$$

für  $t_\nu(z)$  den Ausdruck

$$w = t_\nu(z) = e^{-\frac{\pi i}{2\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\nu}\right)} z^{\frac{1}{\nu}} \left[ \nu + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\nu}}{n} \frac{z^n}{n + \frac{1}{\nu}} \right].$$

Aus

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\nu}\right)} = \frac{1}{\nu} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$$

folgt dann weiter

$$(13) \quad t_\nu(z) = e^{-\frac{\pi i}{2\nu}} z^{\frac{1}{\nu}} + z^{\frac{1}{\nu}} p_\nu(z),$$

wo

$$(13a) \quad p_\nu(z) = O\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

ist. Es gilt also ( $|z| \leq \lambda$ )

$$(14) \quad |t_\nu(z)| \leq k(\nu) |z|^{\frac{1}{\nu}},$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} k(\nu) = 1.$$

Auf der positiven reellen Achse der  $w$ -Ebene wählen wir den Punkt  $C$  derart, daß  $\overline{OC} (= \overline{OA} = \overline{OB}) = 1$  wird, und beschreiben um den Punkt  $C$  als Mittelpunkt einen Kreis vom Radius  $\varrho$ , wobei  $\varrho$  kleiner als 1 und größer als die Entfernung  $\overline{AC}$  vorausgesetzt wird (s. Fig. 1). Dieser Kreis schneidet  $OA$  bzw.  $OB$  in den Punkten  $A'$  bzw.  $B'$ , denen in der  $z$ -Ebene die Punkte  $z=a$  bzw.  $z=b$  entsprechen werden. Die Punkte  $A'$  und  $B'$  und die ihnen entsprechenden  $a$  und  $b$  hängen bei festem  $\varrho$  von  $\nu$  ab, und zwar streben die Entfernungen  $\overline{OA'} = \overline{OB'}$  für  $\nu \rightarrow \infty$  offenbar dem Werte  $1-\varrho$  zu. Für die Punkte  $a$  und  $b$ , die wir von jetzt an mit  $a(\nu)$  und  $b(\nu)$  bezeichnen, gilt nun, wie wir zeigen wollen,

$$(15) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} a(\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} b(\nu) = 0.$$

Ist nämlich ein beliebiges positives  $\delta < 1$  vorgegeben und  $0 < |z| \leq \delta$ , so folgt aus (13) und (13a), daß der Bildpunkt von  $z$  für genügend großes  $\nu$  dem Punkte  $w = 1$  beliebig nahe kommt. Wählt man  $z = x$  ( $0 < x \leq \delta < 1$ ) auf der reellen Achse, so werden die beiden Strecken von  $O$  bis  $x$  und von  $O$  bis  $-x$  auf die Strecken  $OA_1$  und  $OB_1$  der Berandung von  $A_1$  abgebildet. Da also die Entfernungen  $\overline{OA_1}$  und  $\overline{OB_1}$  bei genügend großem  $\nu$  beliebig nahe an 1 herankommen, während  $\overline{OA'}$  und  $\overline{OB'}$  nach  $1 - \varrho$  konvergieren, so besteht bei genügend großem  $\nu$  — für die Punkte auf dem Rande von  $A_1$  — die Reihenfolge:

$$O, A', A_1, A \text{ bzw. } O, B', B_1, B.$$

Aus der Eineindeutigkeit und Stetigkeit der Abbildung (12) folgt jetzt, daß die Bildpunkte  $a(\nu)$  und  $b(\nu)$  von  $A'$  und  $B'$  (bei genügend großem  $\nu$ ) auf der Strecke  $-\delta < x < \delta$  liegen, womit, da  $\delta$  beliebig ist, (15) bewiesen ist.

Für jedes  $\lambda$ , mit  $0 < \lambda < 1$ , ist von einem bestimmten  $\nu$  ab

$$|a(\nu)| < \lambda < 1, \quad |b(\nu)| < \lambda < 1.$$

Schreiben wir nun, indem  $z = x + iy$  gesetzt wird,

$$(16) \quad t_\nu(z) = t'_\nu(x, y) + i t''_\nu(x, y); \quad (t'_\nu(x, y) \geq 0),$$

so ist

$$(17) \quad t'_\nu(x, 0) = |x|^{\frac{1}{\nu}} \cos \frac{\pi}{2\nu} + |x|^{\frac{1}{\nu}} p'_\nu(x),$$

$$(17a) \quad p'_\nu(x) = O\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

und

$$(18) \quad |t''_\nu(x, 0)| = |t_\nu(x)| \sin \frac{\pi}{2\nu} \leq k(\nu) |x|^{\frac{1}{\nu}} \sin \frac{\pi}{2\nu},$$

sobald

$$|x| \leq \lambda$$

ist. Wählt man  $\nu$  genügend groß, daß

$$(19) \quad |a(\nu)| < \lambda, \quad |b(\nu)| < \lambda$$

wird, was nach (15) immer möglich ist, so folgt, daß auf der Strecke zwischen  $b(\nu)$  und  $a(\nu)$  die Beziehungen (17, 17a) und (18) gelten.

Andererseits folgt aus

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu[a(\nu)] = \lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu[b(\nu)] = 1 - \varrho$$

und

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} t''_\nu[a(\nu), 0] = \lim_{\nu \rightarrow \infty} t''_\nu[b(\nu), 0] = 0,$$

daß

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} t'_\nu[a(\nu), 0] = 1 - \varrho$$

ist. (Es ist  $\lim_{v \rightarrow \infty} t'_v[a(v), 0] = \lim_{v \rightarrow \infty} t'_v[b(v), 0]$ .) Für genügend großes  $v$  wird also auf der Strecke  $b(v) \leq x \leq a(v)$

$$(20) \quad t'_v(x, 0) \leq t'_v[a(v), 0] < 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

und somit

$$(21) \quad 1 - t'_v(x, 0) > \frac{\epsilon}{2}$$

sein.

Durch die lineare Transformation

$$(22) \quad z = i \frac{1 - Z e^{-i\mu}}{1 + Z e^{-i\mu}}$$

geht das Innere des Einheitskreises in die obere Halbebene über, wobei dem Punkt  $Z = e^{i\mu}$  der Kreisperipherie der Punkt  $x = 0$  der reellen Achse entspricht.

Ferner möge die Strecke

$$b(v) \leq x \leq a(v)$$

der reellen Achse in den Kreisbogen der Peripherie des Einheitskreises

$$(23) \quad \beta(v) + \mu \leq \arg Z \leq \alpha(v) + \mu \quad (\mu - \pi \leq \arg Z < \mu + \pi)$$

übergehen.

Es gilt dann auf der Peripherie des Kreises

$$(22a) \quad x = \operatorname{tg} \frac{\psi - \mu}{2},$$

wobei  $\psi$  den  $\arg Z$  bedeutet.

Setzt man nun

$$(24) \quad T_v(Z; \mu) = 1 - t_v \left( i \frac{1 - Z e^{-i\mu}}{1 + Z e^{-i\mu}} \right),$$

$$(24a) \quad T_v(Z; \mu) = |T_v(Z; \mu)| e^{i\theta_v(Z; \mu)},$$

so gelten für alle  $Z$  auf dem Bogen (23) des Einheitskreises die Abschätzungen

$$(25) \quad |T_v(Z; \mu)| \leq |1 - t'_v(x, 0)| + |t''_v(x, 0)| \leq 1 - \left( \cos \frac{\pi}{2v} \right) |x|^{\frac{1}{v}} + |x|^{\frac{1}{v}} O\left(\frac{1}{v}\right) + k(v) \left( \sin \frac{\pi}{2v} \right) |x| \\ = 1 - |x|^{\frac{1}{v}} \left[ \cos \frac{\pi}{2v} + O\left(\frac{1}{v}\right) + o\left(\frac{1}{v}\right) \right]$$

Für genügend großes  $v$  wird nun

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\psi - \mu}{2} \right|^{\frac{1}{v}} \left[ \cos \frac{\pi}{2v} + O\left(\frac{1}{v}\right) + o\left(\frac{1}{v}\right) \right] > \frac{1}{2} |\psi - \mu|^{\frac{1}{v}},$$

also

$$(26) \quad |T_v(Z; \mu)| < 1 - \frac{1}{2} |\psi - \mu|^{\frac{1}{v}} \quad (Z \equiv \arg \psi)$$

sein. Andererseits ist auf dem Einheitskreise

$$\operatorname{tg} \vartheta_*(Z; \mu) = \frac{t''_*(x, 0)}{1 - t'_*(x, 0)},$$

und (18), (21), (22a) ergeben dann auf dem Bogen (23)

$$|\operatorname{tg} \vartheta_*(Z; \mu)| \leq \frac{2k(\nu) \sin \frac{\pi}{2\nu}}{\varrho} \left| \operatorname{tg} \frac{\psi - \mu}{2} \right|^{\frac{1}{\nu}},$$

und da für genügend kleines  $|\psi - \mu|$

$$\frac{2k(\nu)}{\varrho} \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\psi - \mu}{2} \right) \right|^{\frac{1}{\nu}} \leq M |\psi - \mu|^{\frac{1}{\nu}} \quad (M - \text{Konstante})$$

ist, so gilt

$$(27) \quad |\vartheta_*(Z; \mu)| < \operatorname{tg} |\vartheta_*(Z; \mu)| \leq M |\psi - \mu|^{\frac{1}{\nu}} \sin \frac{\pi}{2\nu}.$$

Für die Funktion  $T_*(Z; \mu)$  gelten somit für genügend große  $\nu^{19)}$  auf dem Bogen (23) die Abschätzungen (26) und (27); ferner gewinnt man für den zu (23) komplementären Bogen leicht die Ungleichung:

$$(28) \quad |T_*(Z; \mu)| = |1 - t_*(x)| < \varrho.$$

( $|1 - t_*(x)|$  ist die Entfernung des Punktes  $C$  vom Punkte  $t_*(x)$  und das dem komplementären Bogen entsprechende Randstück von  $A$ , liegt ganz innerhalb des mit Radius  $\varrho$  beschriebenen Kreises.) Für den ganzen Einheitskreis gilt außerdem:

$$(29) \quad |T_*(Z; \mu)| \geq 1 - \cos \frac{\pi}{2\nu}.$$

### § 3.

#### Die Konstruktion des Bereiches $\mathfrak{A}$ und seine Eigenschaften.

Wir betrachten jetzt (vgl. § 1) die Fläche

$$(31) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{I} \times \mathfrak{b}(\bar{Z}),^{10)}$$

so daß  $\mathfrak{b}(\bar{Z})$  für jedes  $\bar{Z}$  die Berandung eines zweidimensionalen Bereiches  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  in der  $X$ -Ebene bildet, während  $\bar{Z}$  die Berandung  $\mathfrak{f}$  des Einheits-

<sup>19)</sup> Wird  $\varrho$  festgegeben, so ist  $\nu$  außerdem so zu wählen, daß

$$(30) \quad \frac{\pi}{4\nu} < \frac{\varrho}{2}$$

ist. (Dies entspricht der Bedingung, daß  $\varrho$  größer als  $\overline{AC}$  ist.)

<sup>10)</sup> Mit  $\bar{Z}$  sollen die Punkte vom  $\mathfrak{f}$  bezeichnet werden (vgl. § 1, S. 614), mit  $\bar{X}, \bar{Z}$  die Punkte von  $\mathfrak{F}$ .



kreises  $\mathfrak{K}$  durchläuft<sup>20)</sup>. Wir setzen

$$X = R e^{i\varphi}, \quad Z = S e^{i\psi} \quad \text{und} \quad \bar{Z} = e^{i\psi} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \psi < 2\pi)$$

und machen über die Bereiche  $\mathfrak{B}(\bar{Z}) \equiv \mathfrak{B}(e^{i\psi})$  folgende Voraussetzungen:

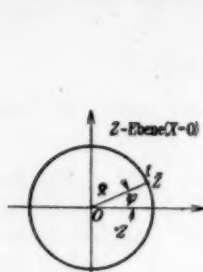


Fig. 2.

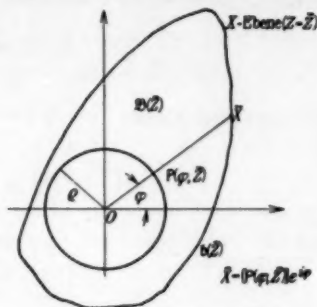


Fig. 3.

1.  $\mathfrak{B}(e^{i\psi})$  ist für jedes  $\psi$  ein Sternbereich<sup>21)</sup>, dessen Berandung durch die Gleichung

$$R = P(\varphi; e^{i\psi})$$

gegeben ist.

2. Es ist

$$(32) \quad 0 < \rho \leq P(\varphi; e^{i\psi}) \leq 1,$$

wo  $\rho$  eine (von  $\varphi$  und  $\psi$  unabhängige) Konstante ist, d. h. die sämtlichen Bereiche  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  enthalten einen festen Kreis um den Koordinatenanfangspunkt vom Radius  $\rho$ .

3. Die Funktion  $P$  von  $\varphi$  und  $\psi$  erfüllt die Lipschitzbedingung:

$$(33) \quad |P(\varphi'; e^{i\psi'}) - P(\varphi; e^{i\psi})| \leq K|\varphi' - \varphi| + L|\psi' - \psi|.$$

( $K$  und  $L$  sind absolute Konstanten.)

Satz. Zu jeder Fläche

$$(31) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{f} \times \mathfrak{b}(\bar{Z})$$

mit den oben angegebenen Eigenschaften gehört ein vierdimensionaler Bereich

$$(34) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{A}(Z),$$

<sup>20)</sup> Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, daß wir die Kurve  $\epsilon$  des § 1 (vgl. S. 614) als Kreisperipherie voraussetzen, da der allgemeine Fall vermittle einer Abbildung durch eine Funktion einer komplexen Veränderlichen auf den speziellen zurückgeführt werden kann.

<sup>21)</sup> In einer anschließenden Arbeit werden die Betrachtungen auch auf Nicht-Sternbereiche ausgedehnt werden.

wo  $\mathfrak{A}(Z)$  für jedes  $Z$  aus  $\mathfrak{R}$  in der  $X$ -Ebene liegt und die Berandungskurve  $\alpha(Z)$  besitzt, so daß:

1. Es ist:

$$(35) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \alpha(S e^{i\varphi}) = \mathfrak{b}(e^{i\varphi})^{22};$$

2.  $\alpha(Z)$  hängt stetig<sup>23</sup> von  $Z$  ab;

3. die zweidimensionale Mannigfaltigkeit

$$(31) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{I} \times \mathfrak{b}(\bar{Z})$$

ist die Bestimmungsfläche von  $\mathfrak{A}$ .

Beweis. In diesem Paragraphen geben wir die Konstruktion von  $\mathfrak{A}$  an und beweisen die Eigenschaften 1. und 2., während im § 4 der Nachweis von 3. erfolgt.

Wir teilen die Peripherie des Einheitskreises in  $2^n$  gleiche Teile, bezeichnen die Teilpunkte mit  $\bar{Z}_{nk}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ ;  $\bar{Z}_{n0} = 1$ ) und setzen:

$$\mathfrak{B}_{nk} = \mathfrak{B}(\bar{Z}_{nk}), \quad \mathfrak{b}_{nk} = \mathfrak{b}(\bar{Z}_{nk}).$$

Jeder der  $2^n$  Produktbereiche

$$(36) \quad \mathfrak{B}_{nk} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{B}_{nk}$$

besitzt die Bestimmungsfläche (vgl. § 1)

$$(37) \quad \mathfrak{F}_{nk} = \mathfrak{I} \times \mathfrak{b}_{nk}.$$

Durch die Transformation

$$(38) \quad X^* = T_*\left(Z; \frac{2\pi k}{2^n}\right) \cdot X, \quad Z^* = Z,$$

wo  $T_*(Z; \frac{2\pi k}{2^n})$  die in § 2 (24) definierte Funktion  $\left[\mu = \frac{2\pi k}{2^n}\right]$  ist, geht  $\mathfrak{B}_{nk}$  in einen neuen Bereich  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  und seine Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}_{nk}$  nach § 1 in die Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}_{nk}^*$  des Bereiches  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  über. Symbolisch können wir schreiben

$$(39) \quad \mathfrak{B}_{nk}^* = \mathfrak{R} \times \mathfrak{B}_{nk} \cdot T_*\left(Z; \frac{2\pi k}{2^n}\right) = \mathfrak{R} \times \mathfrak{B}_{nk}^*(Z),$$

$$(40) \quad \mathfrak{F}_{nk}^* = \mathfrak{I} \times \mathfrak{b}_{nk} \cdot T_*\left(\bar{Z}; \frac{2\pi k}{2^n}\right) = \mathfrak{I} \times \mathfrak{b}_{nk}^*(\bar{Z}).$$

<sup>22</sup>) Darunter verstehen wir, daß

$$\lim_{s \rightarrow 1} P^\dagger(\varphi; S e^{i\varphi}) = P(\varphi; e^{i\varphi})$$

wird, wo

$$R = P^\dagger(\varphi; Z)$$

die Gleichung der Berandungskurve  $\alpha(Z)$  bedeutet.

<sup>23</sup>) M. a. W.:  $P^\dagger(\varphi; Z)$  hängt stetig von  $Z$  ab.

Wir setzen

$$(41) \quad \mathfrak{A}_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathfrak{B}_{nk}^*.$$

Es ist dann

$$(42) \quad \mathfrak{A}_n = \mathfrak{R} \times \mathfrak{A}_n(Z),$$

wenn

$$(43) \quad \mathfrak{A}_n(Z) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathfrak{B}_{nk}^*(Z)$$

gesetzt wird.

Da beim Übergang von  $n$  zu  $n+1$  die Kreisperipherie nur eine Unterteilung erfährt, so hat man:

$$(44) \quad \mathfrak{A}_n(Z) \subset \mathfrak{A}_{n+1}(Z) \quad \text{und} \quad (44a) \quad \mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}_{n+1}.$$

In der Vereinigungsmenge aller  $\mathfrak{A}_n$

$$(45) \quad \mathfrak{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n = \sum_{k,n} \mathfrak{B}_{nk}^*$$

haben wir einen (von  $\nu$  abhängigen) Bereich konstruiert. Wir zeigen im folgenden vorbehaltlich der teilweise noch zu treffenden Einschränkungen für  $\nu$  (es sind dies die Ungleichungen (19), (21), (26), (30), (53)), daß die sich auf ihn beziehenden Behauptungen 1., 2., 3. des vorhin aufgestellten Satzes sämtlich erfüllt sind.

1. Stellt die Gleichung

$$(46) \quad R = P_{nk}(\varphi; Z)$$

die Berandungskurve von  $\mathfrak{B}_{nk}^*(Z)$  dar, so ist die Berandungskurve von  $\mathfrak{A}_n(e^{i\nu}) = \mathfrak{A}_n(\bar{Z})$  (die  $\mathfrak{B}_{nk}^*(e^{i\nu})$  sind Sternbereiche) für jedes  $\nu$  durch

$$(47) \quad R = \max [P_{n0}(\varphi; e^{i\nu}), P_{n1}(\varphi; e^{i\nu}), \dots, P_{n(2^n-1)}(\varphi; e^{i\nu})] = P_n(\varphi; e^{i\nu})$$

gegeben. Wir werden zeigen:

a) Es gilt

$$(48) \quad P_{nk}(\varphi; e^{i\nu}) \leq P(\varphi; e^{i\nu}) \quad (\mathfrak{B}_{nk}^*(\bar{Z}) \subset \mathfrak{B}(\bar{Z})),$$

also auch

$$(49) \quad P_n(\varphi; e^{i\nu}) \leq P(\varphi; e^{i\nu}), \quad d. h.$$

$$(49a) \quad \mathfrak{A}_n(\bar{Z}) \subset \mathfrak{B}(\bar{Z}).$$

b) Es gilt

$$(50) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi; e^{i\nu}) = P(\varphi; e^{i\nu}).$$

a) Es ist, wie man leicht einsieht (vgl. (24a), (38) und (40)):

$$(51) \quad P_{nk}(\varphi; e^{i\nu}) = P \left[ \varphi - \vartheta, \left( e^{i\nu}; \frac{2\pi k}{2^n} \right); \exp. \left( i \frac{2\pi k}{2^n} \right) \right] \left| T_{\nu} \left( e^{i\nu}; \frac{2\pi k}{2^n} \right) \right|^{24}.$$

<sup>24</sup>)  $\exp. (w) = e^w$ .

Liegt nun  $\psi$  außerhalb des Bogens (23) (mit  $\mu = \frac{2\pi k}{2^n}$ ), so ist nach (28)

$$(52) \quad \left| T_\nu(e^{i\psi}; \frac{2\pi k}{2^n}) \right| < \varrho,$$

während nach der Voraussetzung (32)

$$|P| \leq 1$$

ist. Die Ungleichung (48) ist dann erfüllt, da

$$P_{nk}(\varphi; e^{i\psi}) \leq \varrho \leq P(\varphi; e^{i\psi})$$

wird. Für diejenigen  $\psi$ , die innerhalb des Bogens (23) (mit  $\mu = \frac{2\pi k}{2^n}$ ) liegen, schreiben wir nach (33)

$$P\left[\varphi - \vartheta_\nu(e^{i\psi}; \frac{2\pi k}{2^n}); \exp\left(i\frac{2\pi k}{2^n}\right)\right] \leq P[\varphi, e^{i\psi}] + K\left|\vartheta_\nu(e^{i\psi}; \frac{2\pi k}{2^n})\right| + L\left|\psi - \frac{2\pi k}{2^n}\right|.$$

Nun ist unter Berücksichtigung von (27)

$$K\left|\vartheta_\nu(e^{i\psi}; \frac{2\pi k}{2^n})\right| \leq KM\left|\psi - \frac{2\pi k}{2^n}\right|^{\frac{1}{\nu}} \sin \frac{\pi}{2\nu} \quad (25)$$

$$L\left|\frac{2\pi k}{2^n} - \psi\right| \leq L[\gamma(\nu)]^{1-\frac{1}{\nu}} \left|\psi - \frac{2\pi k}{2^n}\right|^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\gamma(\nu) = \max[|\alpha(\nu)|, |\beta(\nu)|], \quad (15) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma(\nu) = 0.$$

Wählt man also  $\nu$  so groß, daß (außer (19), (21), (26), (30)<sup>15)</sup>)

$$(53) \quad KM \sin \frac{\pi}{2\nu} + L[\gamma(\nu)]^{1-\frac{1}{\nu}} \leq \frac{1}{2}\varrho$$

wird, so ist

$$(54) \quad P\left[\varphi - \vartheta_\nu\left[e^{i\psi}; \frac{2\pi k}{2^n}\right]; \exp\left(i\frac{2\pi k}{2^n}\right)\right] \leq P(\varphi; e^{i\psi}) \left[1 + \frac{1}{2}\left|\psi - \frac{2\pi k}{2^n}\right|^{\frac{1}{\nu}}\right]$$

und somit nach (51) und (26):

$$(55) \quad P_{nk}(\varphi; e^{i\psi}) \leq P(\varphi; e^{i\psi}) \left[1 - \frac{1}{4}\left|\psi - \frac{2\pi k}{2^n}\right|^{\frac{2}{\nu}}\right] \leq P(\varphi; e^{i\psi}),$$

womit (49) und (49a) bewiesen ist.

b) Nachdem  $\nu$  den vorher angegebenen Bedingungen gemäß fest gewählt wurde, nehmen wir  $n$  so groß an, daß

$$\frac{2\pi}{2^n} < \gamma(\nu), \quad \gamma(\nu) = \max[|\alpha(\nu)|, |\beta(\nu)|]$$

ist.

Für jedes  $\psi$  wählen wir ein  $\kappa(\psi)$  so, daß

$$(56) \quad \left|\psi - \frac{2\pi\kappa(\psi)}{2^n}\right| \leq \frac{\pi}{2^n}$$

<sup>15)</sup>  $M$  ist die auf S. 623 eingeführte Konstante.

wird. Schreiben wir dann

$$P_{n \times (\varphi)}(\varphi; e^{i\varphi}) = P_n^*(\varphi; e^{i\varphi}),$$

so ist

$$(57) \quad P_n^*(\varphi; e^{i\varphi}) \leq P_n(\varphi; e^{i\varphi}) \leq P(\varphi; e^{i\varphi}).$$

Um b) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß

$$(58) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^*(\varphi; e^{i\varphi}) = P(\varphi; e^{i\varphi})$$

ist. Nun ist

$$\begin{aligned} (59) \quad & P_n^*(\varphi; e^{i\varphi}) - P(\varphi; e^{i\varphi}) = \\ & = \left[ P \left[ \varphi - \vartheta_r \left( e^{i\varphi}; \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n} \right); \exp \left( i \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n} \right) \right] - P(\varphi; e^{i\varphi}) \right] \left| T_r \left( e^{i\varphi}; \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n} \right) \right| + \\ & \quad + \left[ \left| T_r \left( e^{i\varphi}; \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n} \right) \right| - 1 \right] P(\varphi; e^{i\varphi}) \\ & \leq \left| T_r \left( e^{i\varphi}; \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n} \right) \right| \left[ K \left| \vartheta_r \left( e^{i\varphi}; \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n} \right) \right| + L \left| \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n} - \varphi \right| \right] + \\ & \quad + P(\varphi; e^{i\varphi}) \left| \left| T_r \left( e^{i\varphi}; \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n} \right) \right| - 1 \right|. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\left| T_r \left( e^{i\varphi}; \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n} \right) \right| \leq 1, \quad P(\varphi; e^{i\varphi}) \leq 1;$$

und da nach (56), (27) bzw. (24)

$$\left| \vartheta_r \left( e^{i\varphi}; \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n} \right) \right| \leq M \left| \varphi - \mu \right|^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi}{2\nu} \leq M \left| \frac{\pi}{2^n} \right|^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi}{2\nu}, \quad \mu = \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n},$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_r \left( e^{i\varphi}; \frac{2\pi \kappa(\varphi)}{2^n} \right) = T_r(e^{i\varphi}; \varphi) = 1$$

ist, so konvergiert die rechte Seite von (59) bei wachsendem  $n$  gegen 0; nach (57) ist (50) und somit auch (35) bewiesen.

2. Ist die Berandung von  $\mathfrak{B}_{nk}^*(Z)$  durch die Gleichung

$$(46) \quad R = P_{nk}(\varphi; Z)$$

gegeben, so sind die  $P_{nk}(\varphi; Z)$  stetig in  $\varphi$  und  $Z$ , gleichmäßig in bezug auf  $n, k$ , d. h. es ist

$$(60) \quad |P_{nk}(\varphi'; Z') - P_{nk}(\varphi; Z)| \leq \varepsilon,$$

sobald

$$(60a) \quad |\varphi' - \varphi| \leq \delta, \quad (60b) \quad |Z' - Z| \leq \delta$$

ist, wobei  $\delta$  eine von  $n$  und  $k$  unabhängige Konstante ist.

Es ist nämlich (vgl. (39) und (51)):

$$(61) \quad P_{nk}(\varphi; Z) = P \left[ \varphi - \vartheta_r \left( Z; \frac{2\pi k}{2^n} \right); \exp. \left( i \frac{2\pi k}{2^n} \right) \right] \left| T_r \left( Z; \frac{2\pi k}{2^n} \right) \right|.$$

Unter Berücksichtigung der Stetigkeit (gleichmäßig in  $n, k$ ) von  $\vartheta_r$  und  $|T_r|$  (vgl. (24)), sowie der Ungleichung (33) läßt sich diese Stetigkeitseigenschaft der  $P_{nk}(\varphi; Z)$  erschließen. Die Berandungskurve  $\alpha(Z)$  von  $\mathfrak{A}(Z)$  ist nach (38) (vgl. (47)) durch

$$(62) \quad R = P(\varphi; Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi; Z)$$

$$(47a) \quad P_n(\varphi; Z) = \max [P_{n0}(\varphi; Z), P_{n1}(\varphi; Z) \dots P_{n(2^n-1)}(\varphi; Z)]$$

gegeben. Da  $P_{nk}(\varphi; Z)$  in  $\varphi, Z$  stetig ist (gleichmäßig in  $n, k$ ), so folgt daraus, daß  $P(\varphi; Z)$  in  $\varphi$  und  $Z$  stetig ist<sup>26</sup>).

Wir beweisen noch eine Eigenschaft der Bereiche  $\mathfrak{B}_{nk}^*$ , die im folgenden Paragraphen benötigt wird.

Es sei  $\bar{X}, \bar{Z}$  ein Punkt von  $\mathfrak{F}$ , und  $X_m, Z_m$  eine Punktfolge aus  $\mathfrak{A}$ , die gegen  $\bar{X}, \bar{Z}$  konvergiert, und es gehöre der Punkt  $X_m, Z_m$  dem Bereich  $\mathfrak{B}_{n_m k_m}^*$  an. Dann gilt

$$(63) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}} = \arccos \bar{Z}.$$

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so hätte die Folge  $\frac{2\pi k_m}{2^{n_m}}$  einen von  $\arccos \bar{Z}$  verschiedenen Limespunkt und es gäbe also eine Teilfolge  $m'$  der  $m$ , so daß

$$(64) \quad \lim_{m' \rightarrow \infty} \frac{2\pi k_{m'}}{2^{n_{m'}}} \neq \arccos \bar{Z}$$

wäre. Nach vorhergehendem ist nun<sup>27</sup>)  $(X_{m'} = |X_{m'}| e^{i\varphi_{m'}})$

$$(65) \quad P_{n_{m'}, k_{m'}}(\varphi_{m'}; Z_{m'}) = P_{n_{m'}, k_{m'}}(\varphi; \bar{Z}) + \varepsilon(m'),$$

wo

$$\lim_{m' \rightarrow \infty} \varepsilon(m') = 0$$

ist, während nach der Ungleichung (55)

$$(66) \quad P_{n_{m'}, k_{m'}}(\varphi; \bar{Z}) \leq P(\varphi; \bar{Z}) \left[ 1 - \frac{1}{4} \left| \frac{2\pi k_{m'}}{2^{n_{m'}}} - \arccos \bar{Z} \right|^{\frac{2}{v}} \right]$$

ist, und da aus (64) folgt, daß

$$\lim_{m' \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{4} \left| \frac{2\pi k_{m'}}{2^{n_{m'}}} - \arccos \bar{Z} \right|^{\frac{2}{v}} \right) < 1$$

<sup>26</sup>) Vgl. z. B. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Bd. 1, Berlin 1921, S. 306.

<sup>27</sup>) Vgl. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Bd. 1, Berlin 1921, S. 248, Satz 3.

ist, so hat man nach (65) und (66)<sup>29)</sup>

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |X_m| \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} P_{n_m, k_m}(\varphi_m; Z_m) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} P_{n_m, k_m}(\varphi; \bar{Z}) < P(\varphi; \bar{Z}).$$

$|X_m|$  wird also nicht gegen  $|\bar{X}| = P(\varphi; \bar{Z})$  konvergieren, was im Widerspruch mit unserer Annahme steht.

#### § 4.

##### Die Konstruktion der biharmonischen Funktion, die auf $\mathfrak{F}$ die vorgeschriebenen Werte annimmt.

Es sei nun  $\mathfrak{A}$  der im § 3 zu vorgegebener Fläche  $\mathfrak{F}$  konstruierte Bereich, wobei wir  $\nu$  so groß gewählt denken, daß die Ungleichungen (19), (21), (26), (30), (53) erfüllt sind.

Auf seiner Berandung liegt, wie wir im § 3 nachgewiesen haben (Behauptung 1 des Satzes des § 3), die Fläche  $\mathfrak{F}$ , und es ist zu zeigen, daß  $\mathfrak{F}$  die Bestimmungsfläche von  $\mathfrak{A}$  ist. Wir beweisen also:

A. Zu der auf  $\mathfrak{F}$  vorgeschriebenen stetigen Funktion  $u(\bar{X}, \bar{Z})$ , die dort den Bedingungen  $(N_1)$  genügt, gibt es eine in  $\mathfrak{A}$  biharmonische Funktion  $U(X, Z)$ , die auf  $\mathfrak{F}$  die vorgeschriebenen Werte annimmt (d. h.  $\lim_{\substack{X \rightarrow \bar{X} \\ Z \rightarrow \bar{Z}}} U(X, Z) = u(\bar{X}, \bar{Z})$ ).

B. Die biharmonische Funktion  $U(X, Z)$  ist dadurch eindeutig bestimmt.

A. Wir betrachten für jedes  $\bar{Z}$  diejenige Potentialfunktion  $U(X, \bar{Z})$  in  $X$ , die auf der Berandung  $\mathfrak{b}(\bar{Z})$  von  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  die Werte  $u(\bar{X}, \bar{Z})$  annimmt. Um die gesuchte biharmonische Funktion  $U(X, Z)$  zu konstruieren, benutzen wir den Umstand, daß die Bereiche  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  — da sie durch die Transformation (38) aus den Produktbereichen hervorgehen — ebenfalls nach § 1 die Bestimmungsflächen

$$(40) \quad \mathfrak{F}_{nk}^* = \mathfrak{f} \times \mathfrak{b}_{nk} T, \left( \bar{Z}; \frac{2\pi k}{2^n} \right) = \mathfrak{f} \times \mathfrak{b}_{nk}^*(\bar{Z})$$

besitzen, die, wie sich aus (48) leicht ergibt, im Bereich

$$(67) \quad \mathfrak{b} = [\mathfrak{f} \times \mathfrak{B}(\bar{Z})] + \mathfrak{F}, \\ \mathfrak{F} = \mathfrak{f} \times \mathfrak{b}(\bar{Z})$$

liegen, wo die Funktion  $U(X, \bar{Z})$  definiert und, wie wir nachträglich zeigen, stetig ist.

<sup>29)</sup> Da  $R = P_{nk}(\varphi; Z)$  die Berandung eines Sternbereiches  $\mathfrak{B}_{nk}^*(Z)$  bildet, so gilt für jeden Punkt von  $\mathfrak{B}_{nk}^*(Z)$ :  $X = R e^{i\varphi}$  die Ungleichung

$$|X| \leq P_{nk}(\varphi; Z).$$



Die Transformation

$$(68) \quad \begin{aligned} X &= T_* \left( Z'; \frac{2\pi k}{2^n} \right) h_{nk}(X'), & [h_{nk}(0) = 0] \\ Z &= Z', \end{aligned}$$

vermittels deren  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  aus  $\mathfrak{C}'$  (s. S. 615) entsteht, befriedigt die auf der S. 615 für  $f(X', Z')$  aufgestellten Forderungen. Insbesondere folgt aus (39), (32), (29), daß alle  $\mathfrak{B}_{nk}^*(Z)$  eine Kreisscheibe  $\mathfrak{J}_\sigma$  mit  $\sigma = \varrho \left(1 - \cos \frac{\pi}{2^n}\right)$  enthalten. Der Bereich  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  enthält somit den Bizylinder

$$\mathfrak{J}_\sigma = \mathfrak{K} \times \mathfrak{J}_\sigma.$$

Es gibt also für jedes  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  eine biharmonische Funktion  $U_{nk}(X, Z)$ , die auf der Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}_{nk}^*$  von  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  die Werte  $U(X, \bar{Z})$  annimmt. Für jedes  $\bar{Z}$  ist nämlich  $U_{nk}(X, \bar{Z})$  diejenige Potentialfunktion in  $X$ , die auf der Berandung  $b_{nk}^*(\bar{Z})$  von  $\mathfrak{B}_{nk}^*(\bar{Z})$  die Werte  $U_{nk}(X, \bar{Z}) = U(X, \bar{Z})$  annimmt, und es gilt in  $\mathfrak{B}_{nk}^*(\bar{Z})$

$$(69) \quad U_{nk}(X, \bar{Z}) = U(X, \bar{Z}),$$

so daß die N.B. ( $N_1$ ) [und somit nach den Ausführungen auf S. 616 auch ( $N_0$ )] für  $U(X, \bar{Z})$  auf  $\mathfrak{F}_{nk}^*$  erfüllt ist, da sie nach Voraussetzung für  $U(\bar{X}, \bar{Z})$  auf  $\mathfrak{F}$  erfüllt ist.

Auf der Bestimmungsfläche des Bizylinders  $\mathfrak{J}_\sigma$  ist dann nach dem vorhergehenden

$$(69) \quad U_{nk}(X, \bar{Z}) = U(X, \bar{Z});$$

folglich stimmen in diesem Bizylinder die  $U_{nk}(X, Z)$  untereinander überein. Gehört somit ein Punkt  $X, Z$  den beiden Bereichen  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  und  $\mathfrak{B}_{n'l}^*$  an, so müssen für ihn

$$(70) \quad U_{nk}(X, Z) = U_{n'l}(X, Z)$$

sein.

Ist  $X, Z$  ein beliebiger Punkt von  $\mathfrak{H}$  (der Vereinigungsmenge aller  $\mathfrak{H}_n$ ), der etwa zu den Bereichen  $\mathfrak{B}_{n_1 k_1}^*, \mathfrak{B}_{n_2 k_2}^*, \dots$  gehören möge, so ist durch

$$(71) \quad U(X, Z) = U_{n_1 k_1}(X, Z) = U_{n_2 k_2}(X, Z) = \dots$$

eine im ganzen Bereiche  $\mathfrak{H}$  biharmonische Funktion  $U(X, Z)$  definiert, von der nun zu zeigen ist, daß sie auf der Fläche  $\mathfrak{F}$  die vorgeschriebenen Randwerte  $u(\bar{X}, \bar{Z})$  annimmt.

Dieser Beweis geschieht in drei Schritten.

I. Wir betrachten  $U(X, Z)$  zunächst im Bereich  $\mathfrak{b} = [\mathfrak{k} \times \mathfrak{B}(\bar{Z})] + \mathfrak{F}$  und beweisen dort die Stetigkeit von  $U(X, Z)$ , d. h. beweisen, daß

$$(72) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} U(X_m, \bar{Z}_m) = U(X, \bar{Z}),$$

wenn

$$(72a) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} X_m = X, \quad (72b) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{Z}_m = \bar{Z}$$

ist.

Durch die Transformation

$$(73) \quad X = \chi(W, \bar{Z}) \quad (\chi(0, \bar{Z}) = 0; \chi'(0, \bar{Z}) > 0)$$

möge der Einheitskreis  $|W| < 1$  auf den Bereich  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  abgebildet werden. Die Potentialfunktion  $U(X, \bar{Z})$  geht dann in  $V(W, \bar{Z}) = U[\chi(W, \bar{Z}), \bar{Z}]$  über, die für jedes  $\bar{Z}$  den Einheitskreis zum Definitionsbereich hat. Wegen

$$\begin{aligned} U(X_m, \bar{Z}_m) - U(X, \bar{Z}) &= V(W_m, \bar{Z}_m) - V(W, \bar{Z}) = \\ &= [V(W_m, \bar{Z}_m) - V(W_m, \bar{Z})] + [V(W_m, \bar{Z}) - V(W, \bar{Z})] \end{aligned}$$

(es bedeuten hier  $W_m, \bar{Z}$  bzw.  $W, \bar{Z}$  die Bildpunkte von  $X_m, \bar{Z}$  bzw. von  $X, \bar{Z}$ ) genügt es, um (72) zu beweisen, zu zeigen, daß gilt:

$$(74) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} V(W_m, \bar{Z}) = V(W, \bar{Z}),$$

$$(75) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [V(W_m, \bar{Z}_m) - V(W_m, \bar{Z})] = 0.$$

Da  $X_m \rightarrow X$  den Grenzübergang  $W_m \rightarrow W$  nach sich zieht, und  $V(W, \bar{Z})$  eine im Bereich  $|W| \leq 1$  stetige Funktion von  $W$  ist, so ist (74) von selbst erfüllt.

Die Beziehung (75) wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß gleichmäßig in  $W$

$$(76) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} V(W, \bar{Z}_m) = V(W, \bar{Z})$$

ist. Hierzu genügt es zu zeigen<sup>29)</sup>, daß

$$(77) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} V(\bar{W}, \bar{Z}_m) = V(\bar{W}, \bar{Z}),$$

und zwar gleichmäßig in  $\bar{W}$ , ist.

Es ist

$$(78) \quad V(\bar{W}, \bar{Z}_m) - V(\bar{W}, \bar{Z}) = U(\bar{X}_m, \bar{Z}_m) - U(\bar{X}, \bar{Z}),$$

wo

$$\bar{X}_m = \chi(\bar{W}, \bar{Z}_m), \quad \bar{X} = \chi(\bar{W}, \bar{Z})$$

<sup>29)</sup> Die Folge von Potentialfunktionen

$$V(W, \bar{Z}_m) - V(W, \bar{Z})$$

konvergiert dann für  $m \rightarrow \infty$  auf dem Rande des Einheitskreises in der  $W$ -Ebene gegen 0. Nach einem bekannten Satz der Potentialtheorie gilt die Beziehung

$$\lim_{\bar{Z}_m \rightarrow \bar{Z}} V(W, \bar{Z}_m) = V(W, \bar{Z})$$

gleichmäßig in  $W$  im Innern des Einheitskreises, womit dann (75) bewiesen ist.

ist. Nun ist nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie<sup>30)</sup> infolge der von uns in 3. vorausgesetzten stetigen Abhängigkeit der Bereiche  $\mathfrak{B}(\bar{Z})$  von  $\bar{Z}$

$$(79) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \chi(\bar{W}, \bar{Z}_m) = \chi(\bar{W}, \bar{Z})$$

gleichmäßig in  $W$ . Aus der hiermit bewiesenen in bezug auf  $W$  gleichmäßigen Konvergenz von  $\bar{X}_m$  gegen  $\bar{X}$  und der Stetigkeit von  $u(\bar{X}, \bar{Z})$  auf  $\mathfrak{F}$  folgt nach (78) die Beziehung (77) gleichmäßig in  $W$ .

II. Die Funktion  $U(X, Z)$  ist in jedem der Bereiche  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  (gleichmäßig) stetig. Wir wollen zeigen, daß dies gleichmäßig in  $n, k$  gilt.

Führt die analytische Abbildung  $A_{nk}$  den Bereich  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  umkehrbar eindeutig und stetig (mit Einschluß des Randes) in einen Bereich  $\mathfrak{B}_{nk}'$  über, wobei  $U(X, Z)$  in  $V_{nk}(X, Z)$  übergeht, so genügt es zu zeigen, daß die verpflanzten Funktionen  $V_{nk}(X, Z)$  (gleichmäßig) stetig, gleichmäßig in  $n, k$ , sind, sobald man weiß, daß die Stetigkeit der Abbildungsfunktionen von  $A_{nk}$  gleichmäßig in  $n, k$  ist. Hiervon machen wir Gebrauch, indem wir die  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  durch die zu (38) inverse Transformation auf den Produktbereich

$$(36) \quad \mathfrak{B}_{nk} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{B}_{nk}$$

abbilden und dann vermittels der Transformation

$$(80) \quad \begin{aligned} X' &= X'(X, \bar{Z}_{nk}), \\ Z' &= Z \end{aligned}$$

in den Einheitsbizzylinder  $\mathfrak{E}'$  überführen. (Die Gleichmäßigkeit in  $\bar{Z}_{nk}$  ergibt sich auf Grund des früher in I. zitierten Satzes der ebenen Funktionentheorie<sup>30)</sup>). Die Bereiche  $\mathfrak{B}_{nk}'$  fallen alle mit dem Einheitsbizzylinder  $\mathfrak{E}'$  zusammen, und wir haben somit für jedes  $n, k$  eine in  $\mathfrak{E}'$  biharmonische Funktion, die durch die Verpflanzung von  $U(X, Z)$  vermittels der Abbildung  $A_{nk}$ <sup>31)</sup> entsteht. Hierbei geht aber die Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}_{nk}^*$  von  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  in die Bestimmungsfläche (2) von  $\mathfrak{E}'$  über. Nun liegen aber sämtliche Bestimmungsflächen von  $\mathfrak{B}_{nk}^*$  im Bereiche  $\mathfrak{b} = [\mathfrak{f} \times \mathfrak{B}(\bar{Z})] + \mathfrak{F}$ , also ist dort nach I. die Funktion  $U(X, Z)$  (gleichmäßig) stetig, und zwar gleichmäßig in  $n, k$ , und infolge der Beschaffenheit der Transformation  $A_{nk}$  folgt dies

<sup>30)</sup> Vgl. dazu R. Courant, Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung, Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl., 1914, S. 101–109, Satz IIIa und Bemerkung zu der obigen Note, Nachr. der Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl., 1922, S. 69–70, ferner T. Radó, Sur la représentation conforme de domaines variables, Acta litt. ac scient. R. Univ. Hung. (Szeged) 1 (1922 bis 1923), S. 180–186.

<sup>31)</sup>  $A_{nk}$  ist diejenige Abbildung, die die Zusammensetzung der Inversen von (38) und der Abbildung (80) ergibt.

auch für die verpflanzten Funktionen auf der Bestimmungsfläche (2) von  $\mathfrak{G}'$ . Die Anwendung des im § 1 angeführten Hilfssatzes (S. 617) ergibt dann die am Anfang von II. aufgestellte Behauptung.

III. Es sei nun  $\bar{X}, \bar{Z}$  ein beliebiger Punkt der Fläche  $\mathfrak{F}$  und  $X_m, Z_m$  eine gegen ihn konvergierende Punktfolge aus  $\mathfrak{A}$ , d. h. es gelte

$$(81) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} X_m = \bar{X}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} Z_m = \bar{Z}.$$

Der Punkt  $X_m, Z_m$  gehört einem  $\mathfrak{B}_{n_m k_m}^*$  an und nach der Schlußbemerkung in § 3 (S. 629) ist:

$$(82) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \exp. \left( i \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}} \right) = \bar{Z}.$$

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  kann man also das  $m$  genügend groß bestimmen, so daß die drei Ungleichungen

$$(83) \quad |X_m - \bar{X}| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad |Z_m - \bar{Z}| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \exp. \left( i \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}} \right) - \bar{Z} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

zugleich gelten.

Wir wählen nun auf der Berandung

$$b \left[ \exp. \left( i \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}} \right) \right] \quad \text{von} \quad \mathfrak{B} \left[ \exp. \left( i \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}} \right) \right]$$

einen Punkt  $\bar{X}_m$  derart, daß

$$(84) \quad |\bar{X}_m - \bar{X}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. (Infolge der stetigen Abhängigkeit des  $b(\bar{Z})$  von  $\bar{Z}$  gibt es wegen (82) auf  $b \left[ \exp. \left( i \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}} \right) \right]$  immer solche Punkte.)

Es ist dann

$$(85a) \quad |\bar{X}_m - X_m| \leq |\bar{X}_m - \bar{X}| + |\bar{X} - X_m| \leq \varepsilon$$

und

$$(85b) \quad \left| Z_m - \exp. \left( i \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}} \right) \right| \leq \left| \exp. \left( i \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}} \right) - \bar{Z} \right| + |\bar{Z} - Z_m| \leq \varepsilon.$$

Infolge der in II. bewiesenen gleichmäßigen Stetigkeit von  $U(X, Z)$  in  $\mathfrak{B}_{n_k}^*$  gibt es zu jedem  $\eta > 0$  ein  $\varepsilon_1$ , so daß für zwei Punkte  $X, Z$  und  $X', Z'$ , die einem und denselben  $\mathfrak{B}_{n_k}^*$  angehören und für die

$$(86a) \quad |X - X'| \leq \varepsilon_1, \quad (86b) \quad |Z - Z'| \leq \varepsilon_1$$

ist,

$$(86c) \quad |U(X, Z) - U(X', Z')| \leq \frac{\eta}{2}$$

wird. Andererseits gibt es ein  $\varepsilon_2$  so, daß für zwei Punkte der Bestimmungsfläche  $\bar{X}', \bar{Z}'$  und  $\bar{X}'', \bar{Z}''$ , für die

$$(87a) \quad |\bar{X}' - \bar{X}''| \leq \varepsilon_2, \quad (87b) \quad |\bar{Z}' - \bar{Z}''| \leq \varepsilon_2$$

ist,

$$(87c) \quad |U(\bar{X}', \bar{Z}') - U(\bar{X}'', \bar{Z}'')| = |u(\bar{X}', \bar{Z}') - u(\bar{X}'', \bar{Z}'')| \leq \frac{\eta}{2}$$

wird.

Nimmt man  $\varepsilon$  gleich  $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , berücksichtigt, daß  $X_m, Z_m$  und  $\bar{X}_m, \bar{Z}_m = \exp\left(i \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}}\right)$  demselben (abgeschlossenen)  $\mathfrak{B}_{n_m k_m}^{*22)}$  angehören, und daß die Punkte  $\bar{X}_m, \bar{Z}_m = \exp\left(i \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}}\right)$  und  $\bar{X}, \bar{Z}$  auf der Fläche  $\mathfrak{F}$  liegen, so folgt, daß

$$(88) \quad |U(X_m, Z_m) - U(\bar{X}, \bar{Z})| \leq \left| U(X_m, Z_m) - U(\bar{X}_m, \exp\left(i \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}}\right)) \right| + \\ + \left| U\left[\bar{X}_m, \exp\left(i \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}}\right)\right] - U(\bar{X}, \bar{Z}) \right| \leq \eta$$

ist, sobald  $m$  so groß ist, daß die Ungleichungen (83) erfüllt sind.

Damit ist der Beweis von A zu Ende geführt.

B. Wir zeigen zunächst, daß eine in  $\mathfrak{A}$  biharmonische Funktion  $V(X, Z)$ , die in  $\mathfrak{A} + \mathfrak{F}$  stetig ist, auf  $\mathfrak{F}$  ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Es sei nämlich  $X, Z$  ein beliebiger innerer Punkt von  $\mathfrak{A}$ , er gehört dann zu einem  $\mathfrak{B}_{n k}^*$ .

Es gilt dann

$$(89) \quad V(X, Z) \leq \max_{\mathfrak{B}_{n k}^*} V(X, Z)^{23}).$$

Also gibt es einen Punkt  $X_1, \bar{Z}_1$  auf der Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}_{n k}^*$  von  $\mathfrak{B}_{n k}^*$ , so daß

$$(90) \quad V(X, Z) \leq V(X_1, \bar{Z}_1)$$

<sup>22)</sup> Für den Punkt  $\bar{X}_m, \bar{Z}_m$  folgt dies aus Formel (38), da nach ihr wegen  $T_v\left(\bar{Z}_m, \frac{2\pi k_m}{2^{n_m}}\right) = 1$ ,  $\mathfrak{B}_{n_m k_m}^*$  den Bereich  $\mathfrak{B}_{n_m k_m}(\bar{Z}_m)$  enthält.

<sup>23)</sup> Für einen Bizylinder folgt die Ungleichung (89) ohne weiteres aus der Poissonischen Darstellung (3), und  $\mathfrak{B}_{n k}^*$  geht durch die auf S. 633 angegebene Transformation aus dem Einheitsbizylinder  $\mathfrak{E}$  hervor.

$\max_{\mathfrak{B}_{n k}^*} V(X, Z)$  bedeutet: das Maximum der Funktion  $V(X, Z)$ , wobei die Argumente  $X, Z$  alle Punkte der Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{F}_{n k}^*$  (Bestimmungsfläche von  $\mathfrak{B}_{n k}^*$ ) durchlaufen.

wird. Nun ist  $V(X_1, \bar{Z}_1)$  eine (in  $X$ ) im Bereiche  $\mathfrak{B}(\bar{Z}_1)$  reguläre Potentialfunktion und es ist

$$(91) \quad V(X, Z) \leq V(X_1, \bar{Z}_1) \leq \max_{\mathfrak{B}(\bar{Z}_1)} V(X, \bar{Z}_1) \leq \max_{\mathfrak{B}} V(X, Z),$$

w. z. b. w.

Hieraus folgt die Eindeutigkeit der zu den vorgegebenen Randwerten  $u(\bar{X}, \bar{Z})$  konstruierten Funktion  $U(X, Z)$  in üblicher Weise:

Gäbe es nämlich eine zweite Funktion  $U'(X, Z)$  mit denselben Eigenschaften, so hätte man in

$$(92) \quad V(X, Z) = U(X, Z) - U'(X, Z)$$

eine biharmonische Funktion, die auf  $\mathfrak{F}$  die Randwerte 0 annimmt, und  $V(X, Z)$  müßte nach dem Vorherigen in  $\mathfrak{A}$  identisch verschwinden.

Herrn A. Plessner bin ich für mehrfache Ratschläge bei der Durchführung der Arbeit zum Dank verpflichtet.

(Eingegangen am 15. 5. 1930.)

### Berichtigung

zu der Arbeit von W. Feller: „Über die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus“, *Math. Annalen* 102, S. 633–649.

Bei der Niederschrift wurde an die Formel (17') (S. 643) versehentlich eine falsche Bemerkung geknüpft. Sie gilt unmittelbar nur für den Fall  $c = 0$ . Sonst muß man für  $v$  die Greensche Funktion  $G(\xi, x)$  nehmen. Für die betrachteten, hinreichend kleinen Gebiete ist  $G \geq 0$ , da sonst für ein Teilgebiet eine reguläre, am Rande verschwindende Lösung existieren würde. Also gilt  $-\frac{\partial G}{\partial n} \geq 0$ , und daher gelten die auf S. 643–644 bewiesenen Sätze. Auf S. 648 wird die schärfere Ungleichung  $-\frac{\partial G}{\partial n} > 0$  benötigt ( $x$  am Rande,  $\xi$  fest im Innern). Da  $\frac{\partial G}{\partial n}$  als Funktion von  $\xi$  in jedem „echten“ Teilgebiet eine reguläre und nicht negative Lösung ist, kann sie nach S. 643 nicht verschwinden. Alle Resultate bleiben mithin erhalten.

# Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche.

Von

Heinz Hopf in Zürich.

## Einleitung.

Unter einer „Abbildung“ eines Komplexes (oder auch einer beliebigen Menge)  $A$  „auf“ einen Komplex  $B$  verstehen wir stets eine eindeutige und stetige, nicht notwendig eineindeutige, Abbildung von  $A$ , bei der die Menge der Bildpunkte zu  $B$  gehört. Zwei Abbildungen von  $A$  auf  $B$  nennen wir zu derselben „Klasse“ gehörig, wenn man sie stetig ineinander überführen kann, d. h. wenn es eine sie enthaltende stetige Schar von Abbildungen von  $A$  auf  $B$  gibt, und wir bezeichnen eine Abbildung als „topologisch wesentlich“, wenn bei jeder Abbildung der durch sie bestimmten Klasse die Bildmenge aus allen Punkten von  $B$  besteht, d. h. wenn es unmöglich ist, durch stetige Abänderung der Abbildung einen Punkt von  $B$  von der Bedeckung durch die Bildmenge zu befreien.

Das Hauptziel und -ergebnis dieser Arbeit ist der Beweis von

Satz I. *Die Abbildungen der 3-dimensionalen Sphäre  $S^3$  auf die 2-dimensionale Sphäre  $S^2$  bilden unendlich viele Klassen.*

Da sich jede echte Teilmenge der Kugelfläche  $S^2$  stetig auf einen willkürlichen Punkt der  $S^2$  zusammenziehen läßt, gehören alle topologisch unwesentlichen Abbildungen einer Menge  $A$  auf die  $S^2$  zu einer einzigen Klasse. Mithin enthält Satz I den

Satz Ia. *Die  $S^3$  läßt sich topologisch wesentlich auf die  $S^2$  abbilden.*

Darüber, für welche Dimensionszahlen  $a$  und  $b$  sich ähnliche Aussagen über die Abbildungen der  $a$ -dimensionalen Sphäre  $S^a$  auf die  $b$ -dimensionale  $S^b$  machen lassen, ist mir fast nichts bekannt. Trivial sind die Fälle  $a < b$ , denn dann läßt sich jedes stetige Bild der  $S^a$  in der  $S^b$  auf einen willkürlichen Punkt zusammenziehen, die Abbildungen bilden also eine einzige



Klasse und sind sämtlich topologisch unwesentlich. Ist  $a = b$ , so sind die Antworten auf unsere Fragen aus der Theorie des Abbildungsgrades bekannt: zu jeder ganzen Zahl  $c$  gibt es genau eine Klasse, deren Abbildungen den Grad  $c$  haben; die Klasse vom Grade 0, und nur diese, enthält topologisch unwesentliche Abbildungen<sup>1)</sup>. Schließlich ist noch der Fall  $a > b = 1$  leicht zu übersehen: hier ist die  $S^b = S^1$  ein Kreis; bezeichnet  $w$  seine Winkelkoordinate,  $x$  die Punkte von  $S^a$ , so wird die zunächst nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmte Größe  $w$  bei jeder Abbildung infolge des einfachen Zusammenhanges von  $S^a$  nach dem Monodromieprinzip eine eindeutige Funktion  $w = f(x)$ ; durch die Abbildungsschar  $w = tf(x)$  wird, während der Parameter  $t$  von 1 bis 0 läuft,  $f$  stetig in eine Abbildung auf einen einzigen Punkt des Kreises übergeführt; die Abbildungen von  $S^a$  auf  $S^1$  mit  $a > 1$  sind also sämtlich topologisch unwesentlich und bilden eine einzige Klasse. Dagegen sind für  $a > b > 1$  die Sätze I und Ia die einzigen mir bekannten hierhergehörigen Aussagen über Abbildungen der  $S^a$  auf die  $S^b$ .

Satz I ist eine leichte Folge aus

Satz II. *Jeder Abbildung  $f$  der  $S^3$  auf die  $S^2$  läßt sich eine ganze Zahl  $\gamma(f)$  zuordnen, die unter anderem folgende Eigenschaften hat:*

- a)  $\gamma(f) = \gamma(f')$ , wenn  $f$  und  $f'$  zu einer Klasse gehören;
- b) *ist  $g$  eine Abbildung einer 3-dimensionalen Sphäre  $S_1^3$  auf eine 3-dimensionale Sphäre  $S^3$  mit dem Grade  $c$ ,  $f$  eine Abbildung der  $S^3$  auf die  $S^2$ , so ist  $\gamma(fg) = c \cdot \gamma(f)$ ;*
- c) *es gibt eine Abbildung der  $S^3$  auf die  $S^2$  mit  $\gamma(f) = 1$ .*

In der Tat folgt I aus II; denn da man  $S_1^3$  auf  $S^3$  mit beliebigem Grade  $c$  abbilden kann, gibt es nach b) und c) Abbildungen von  $S_1^3$  auf  $S^2$  mit beliebigem  $\gamma$ , und diese gehören nach a) zu verschiedenen Klassen.

Die geometrische Bedeutung der Größe  $\gamma$  läßt sich ungefähr so beschreiben: Die Originalmenge eines Punktes  $x$  von  $S^2$ , d. h. die Menge der durch  $f$  auf  $x$  abgebildeten Punkte von  $S^3$ , besteht bei hinreichender Regularität von  $f$ , z. B. wenn  $f$  eine simpliziale Abbildung ist, aus endlich vielen einfach geschlossenen Polygonen, ist also ein 1-dimensionaler Zyklus<sup>2)</sup>;  $\gamma$  ist die *Verschlingungszahl*<sup>3)</sup> der Originalzyklen zweier beliebiger Punkte  $x$  und  $y$ .

<sup>1)</sup> L. E. J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71 (1911), S. 97–115. — H. Hopf, Abbildungsklassen  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 96 (1926), S. 209–224.

<sup>2)</sup> Zyklus = geschlossener, d. h. unberandeter Komplex.

<sup>3)</sup> L. E. J. Brouwer, On Looping Coefficients, Proc. Acad. Amsterdam 15 (1912), S. 113–122.

Die folgende Eigenschaft von  $\gamma$  ist als Gegenstück zu II b bemerkenswert:

II b'. Ist  $h$  eine Abbildung von  $S^3$  auf eine zweite Kugelfläche  $S_1^3$  vom Grade  $c$ ,  $f$  wieder eine Abbildung der  $S^3$  auf  $S^3$ , so ist  $\gamma(hf) = c \cdot \gamma(f)$ .

Der Beweis des Satzes II wird in den §§ 1 bis 5 geführt.

In den §§ 6 und 7 wird eine Verallgemeinerung der bisherigen Sätze für gewisse Abbildungen beliebiger 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten auf die  $S^3$  vorgenommen, die geeignet ist, die Rolle des Satzes Ia für die allgemeine Theorie der Abbildungen zu beleuchten. Sie beruht auf dem Begriff der „algebraischen Wesentlichkeit“ einer Abbildung, zu dem man folgendermaßen geführt wird:

Dafür, daß eine Abbildung  $f$  eines  $n$ -dimensionalen Zyklus  $Z^n$  auf die  $n$ -dimensionale Sphäre  $S^n$  topologisch wesentlich ist, ist hinreichend (und übrigens auch notwendig, worauf es im Augenblick aber nicht ankommt), daß der Grad  $c$  von  $f$  nicht 0 ist; dabei kann man  $c$  durch die Gleichung  $f(Z^n) = cS^n$  definieren, worin  $f(Z^n)$  das in  $S^n$  gelegene Bild von  $Z^n$  im Sinne der algebraischen Topologie<sup>4)</sup> bedeutet; die genannte hinreichende Bedingung läßt sich also auch so ausdrücken:  $f(Z^n) \neq 0$ . Liegt nicht ein Zyklus im gewöhnlichen Sinne, sondern ein „Zyklus modulo  $m$ “ vor, wobei  $m$  eine ganze Zahl  $> 1$  ist, d. h. ein Komplex, dessen Rand mod  $m$  verschwindet<sup>4)</sup>, so ist der „Grad“ nur mod  $m$  bestimmt, und die der obigen analoge Bedingung für die topologische Wesentlichkeit von  $f$  ist, wenn wir den Zyklus mod  $m$  mit  $Z_m^n$  bezeichnen:  $f(Z_m^n) \not\equiv 0 \pmod{m}$ . Da man so im Fall der  $n$ -dimensionalen Zyklen bzw. Zyklen mod  $m$  einfache algebraische, für die topologische Wesentlichkeit von  $f$  hinreichende Bedingungen hat, liegt es nahe, bei der Untersuchung der Abbildungen eines beliebigen Komplexes  $A$  die in ihm liegenden  $n$ -dimensionalen Zyklen ins Auge zu fassen und zu definieren: „Die Abbildung  $f$  des Komplexes  $A$  auf die  $S^n$  heiße ‚algebraisch wesentlich‘, wenn es ein  $m > 1$  und in  $A$  einen  $n$ -dimensionalen Zyklus  $Z_m^n$  mod  $m$  gibt, dessen Bild  $f(Z_m^n) \not\equiv 0 \pmod{m}$  ist.“ Dabei beachte man, daß  $f$  natürlich immer algebraisch wesentlich ist, wenn es einen gewöhnlichen Zyklus  $Z^n$  in  $A$  gibt, dessen Bild  $f(Z^n) = cS^n \neq 0$  ist; denn  $Z^n$  ist ein  $Z_m^n$  für jedes  $m > 1$ , und für jedes  $m$ , das kein Teiler von  $c$  ist, ist  $f(Z^n) \not\equiv 0 \pmod{m}$ . Nun ist eine algebraisch wesentliche Abbildung eines Komplexes  $A$  a fortiori immer topologisch wesentlich, da ja in  $A$  wenigstens ein  $Z_m^n$  enthalten ist, der topologisch wesentlich abgebildet wird. Es entsteht daher die Frage, ob es auch Abbildungen gibt, die zwar algebraisch unwesentlich, aber topologisch wesentlich sind; diese

<sup>4)</sup> Zur Einführung in die kombinatorische oder algebraische Topologie sei empfohlen: J. W. Alexander, Combinatorial Analysis Situs, Transact. Amer. Math. Soc. 28 (1926), S. 301–329.

Frage wird durch den Satz Ia bejaht. Denn jede Abbildung der  $S^3$  auf die  $S^2$  ist algebraisch unwesentlich; da nämlich jeder in  $S^3$  gelegene  $Z_m^3$  homolog  $0 \bmod m$  ist, ist auch sein Bild  $f(Z_m^3) \sim 0 \bmod m$  in  $S^2$ , d. h.  $f(Z_m^3) = 0 \bmod m$ . Und die oben erwähnte Verallgemeinerung des Satzes Ia lautet:

**Satz IIIa.** *Jede (geschlossene orientierbare) Mannigfaltigkeit  $M^3$  gestattet Abbildungen auf die  $S^2$ , die zugleich algebraisch unwesentlich und topologisch wesentlich sind.*

Ebenso wie Ia aus I, folgt IIIa aus

**Satz III.** *Die algebraisch unwesentlichen Abbildungen einer beliebigen  $M^3$  auf die  $S^2$  bilden unendlich viele Klassen.*

Der Beweis von III wird dadurch erbracht, daß die Existenz einer Zahl  $\gamma$  mit den in Satz II genannten Eigenschaften für die algebraisch unwesentlichen Abbildungen einer beliebigen  $M^3$  festgestellt wird. Ob sich nicht nur jede  $M^3$ , sondern sogar jeder 3-dimensionale Zyklus topologisch wesentlich auf die  $S^2$  abbilden läßt, weiß ich nicht.

In einem „Anhang“ wird noch weiter auf die Begriffe der algebraischen und topologischen Wesentlichkeit und den Zusammenhang zwischen ihnen eingegangen. Wenn der abzubildende Komplex  $A$  und die Sphäre  $S$  die gleiche Dimension  $a$  haben, gilt der folgende Satz, den ich an anderer Stelle bewiesen habe<sup>\*)</sup>:

**Satz IV.** *Eine Abbildung eines  $a$ -dimensionalen Komplexes  $A^a$  auf die  $S^a$  ist dann und nur dann topologisch wesentlich, wenn sie algebraisch wesentlich ist.*

Derselbe Satz gilt auch, wenn  $A$  beliebige Dimension,  $S$  die Dimension 1 hat:

**Satz V.** *Eine Abbildung eines beliebigen Komplexes  $A$  auf einen Kreis  $S^1$  ist dann und nur dann topologisch wesentlich, wenn sie algebraisch wesentlich ist.*

Abbildungen eines  $a$ -dimensionalen  $A^a$  auf die  $b$ -dimensionale  $S^b$  mit  $a < b$  sind stets in jedem Sinne unwesentlich; somit ist aus den Sätzen IV und V ersichtlich, daß die niedrigsten Dimensionszahlen, die für die Existenz von zwar topologisch, aber nicht algebraisch, wesentlichen Abbildungen eines  $A^a$  auf die  $S^b$  in Frage kommen,  $a = 3$  und  $b = 2$  sind; und für diese Zahlen existieren in der Tat bereits derartige Abbildungen, wie die Sätze Ia und IIIa zeigen.

<sup>\*)</sup> Über wesentliche und unwesentliche Abbildungen von Komplexen, Moskauer Mathematische Sammlung (z. Z. im Druck).

Welche  $A^a$  lassen sich nun in den Fällen  $b = a$  und  $b = 1$  wesentlich (algebraisch und topologisch) auf die  $S^b$  abbilden? Die Antworten sind:

**Satz IVa.**  $A^a$  läßt sich dann und nur dann wesentlich auf die  $S^a$  abbilden, wenn es ein  $m > 1$  und in  $A$  einen  $a$ -dimensionalen Zyklus mod  $m$  gibt, der nicht homolog 0 mod  $m$  ist, mit anderen Worten: wenn die „ $a$ -te Bettische Zahl mod  $m$ “  $p_m^a > 0$  ist.

**Satz Va.**  $A$  läßt sich dann und nur dann wesentlich auf einen Kreis abbilden, wenn es in  $A$  einen 1-dimensionalen Zyklus (im gewöhnlichen Sinne) gibt, der nicht homolog 0 ist, mit anderen Worten: wenn die erste Bettische Zahl  $p^1 > 0$  ist.

Man beachte den Unterschied zwischen den Bedingungen der beiden Sätze: die Bedingung  $p_m^1 > 0$  für ein gewisses  $m$  ist im allgemeinen nicht hinreichend für die Gültigkeit der Aussage von Va, und die Bedingung  $p^a > 0$ , worin  $p^a$  die  $a$ -te Bettische Zahl ist, im allgemeinen nicht notwendig für die Gültigkeit der Aussage von IVa. Beides bestätigt man z. B. dadurch, daß man für  $A$  die projektive Ebene nimmt.

Bei anderen Dimensionszahlen  $b$  als  $b = a$  und  $b = 1$  sind mir Kriterien für die topologisch wesentliche Abbildbarkeit von  $A^a$  auf  $S^b$  nicht bekannt. Aber über die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit läßt sich noch etwas aussagen:

**Satz VI.** Notwendig für die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit von  $A^a$  auf  $S^b$  ist, daß entweder die  $b$ -te Bettische Zahl  $p^b > 0$  oder daß  $(b-1)$ -te Torsion vorhanden (oder daß beides der Fall) ist.

Man sieht leicht, daß diese Bedingung in den Fällen  $b = a$  und  $b = 1$  mit den in IVa bzw. IVb genannten Bedingungen zusammenfällt; sie ist daher in diesen Fällen auf Grund der Sätze IV und IVa bzw. V und Va nicht nur, wie VI behauptet, notwendig, sondern auch hinreichend für die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit. Dies gilt noch für einen weiteren Fall:

**Satz VII.** Die in Satz VI genannte Bedingung ist — außer in den Fällen  $b = a$  und  $b = 1$  — auch in dem Fall  $b = a - 1$  für die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit von  $A^a$  auf  $S^b$  hinreichend.

Die niedrigsten Dimensionszahlen, die für die Existenz eines Beispielen in Frage kommen, in dem die Bedingung des Satzes VI nicht hinreicht, sind, da immer  $b < a$  sein muß, auf Grund von VII die Zahlen  $a = 4$ ,  $b = 2$ ; und hier gibt es in der Tat ein Beispiel, in dem sogar die stärkere Bedingung des Nichtverschwindens der  $b$ -ten Bettischen Zahl nicht ausreicht:

**Satz VIII.** Die in Satz VI genannte Bedingung und auch die stärkere Bedingung  $p^b > 0$  ist im allgemeinen nicht hinreichend für die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit von  $A^a$  auf  $S^b$ : die 4-dimensionale Mannigfaltigkeit der komplexen Punkte der projektiven Ebene läßt sich nicht algebraisch wesentlich auf die  $S^2$  abbilden, obwohl für sie  $p^2 = 1$  ist.

Ob aus der Tatsache, daß die  $b$ -te Bettische Zahl eines Komplexes  $A^a$  positiv ist, die *topologisch* wesentliche Abbildbarkeit von  $A^a$  auf  $S^b$  folgt, ist mir nicht bekannt.

Die genannten Sätze werden in dem „Anhang“ in der Reihenfolge V, IVa, VI, VII, Va, VIII bewiesen; einen Beweis von IV findet man, wie erwähnt, in einer Arbeit in der „Moskauer Mathematischen Sammlung“<sup>8)</sup>.

Schließlich sei noch folgendes bemerkt: Auf Grund von Satz IV sind algebraisch wesentlich diejenigen Abbildungen von  $A^a$  auf  $S^b$ , durch die ein  $b$ -dimensionaler Teilkomplex von  $A^a$  topologisch wesentlich abgebildet wird. Dieser Umstand legt die Einführung einer Rangordnung der Wesentlichkeit von Abbildungen nahe:  $f$  heiße wesentlich vom Range  $i$ , wenn ein  $(a+1-i)$ -dimensionaler, aber kein niedriger-dimensionaler Teilkomplex von  $A^a$  topologisch wesentlich abgebildet wird. Dann sind die topologisch wesentlichen Abbildungen von  $A^a$  die mit positivem, die algebraisch wesentlichen die mit dem maximalen Rang  $a-b+1$ . Vielleicht ist diese Begriffsbildung von Nutzen bei der Behandlung von Abbildungsproblemen, wie sie z. B. bei der Frage nach der Übertragbarkeit der hier bewiesenen Sätze auf andere Dimensionszahlen entstehen.

### § 1.

#### Die Umkehrung einer simplizialen Abbildung.

1.  $T^2$  und  $\tau^2$  seien orientierte Dreiecke,  $T^2$  sei affin so auf  $\tau^2$  abgebildet, daß seinen Ecken die Ecken von  $\tau^2$  entsprechen. Ein beliebiger innerer Punkt  $\xi$  von  $\tau^2$  hat in  $T^2$ , und zwar im Inneren, genau einen Originalpunkt  $x$ . Das Symbol  $\varphi_{T^2}$  bezeichne die Umkehrung der Abbildung, und zwar setzen wir  $\varphi_{T^2}(\xi) = +x$  oder  $\varphi_{T^2}(\xi) = -x$ , je nachdem  $T^2$  im positiven oder im negativen Sinne auf  $\tau^2$  abgebildet ist. Es sei nun  $A$  ein Komplex beliebiger Dimensionszahl, seine Dreiecke seien mit  $T_i^2$  bezeichnet,  $\Gamma^2$  sei ein  $\tau^2$  enthaltender zweidimensionaler Komplex;  $A$  sei simplizial auf  $\Gamma^2$  abgebildet, d. h. so, daß den Ecken eines Simplexes von  $A$  immer Ecken — nicht notwendig alle drei Ecken — eines Dreiecks von  $\Gamma^2$  entsprechen und daß die Abbildung in jedem einzelnen Simplex von  $A$  affin ist. Wird dabei ein Dreieck  $T_i^2$  nicht-ausartend, also eineindeutig, auf  $\tau^2$  abgebildet, so ist  $\varphi_{T_i^2}(\xi)$  wie oben erklärt; andernfalls, d. h. wenn das Innere von  $\tau^2$  durch das Bild von  $T^2$  nicht bedeckt wird, setzen wir sinngemäß  $\varphi_{T_i^2}(\xi) = 0$ . Als „Originalkomplex“ von  $\xi$  bei der Abbildung eines zweidimensionalen Teilkomplexes  $C^2 = \sum a_i T_i^2$  von  $A$  definieren wir den nulldimensionalen Komplex  $\varphi_{C^2}(\xi) = \sum a_i \varphi_{T_i^2}(\xi)$ . Aus der Definition folgen unmittelbar die Regeln

$$(1) \quad \varphi_{C_1^2 + C_2^2}(\xi) = \varphi_{C_1^2}(\xi) + \varphi_{C_2^2}(\xi), \quad \varphi_{-C^2}(\xi) = -\varphi_{C^2}(\xi),$$

sowie die Berechtigung von

$$(1') \quad \varphi_0(\xi) = 0.$$

2. Betrachten wir eine affine Abbildung eines orientierten Tetraeders  $T^3$  auf das Dreieck  $\tau^2$ : Wenn  $\tau^2$  durch das Bild von  $T^3$  bedeckt wird, wenn dieses Bild also nicht lediglich aus einer Seite oder Ecke von  $\tau^2$  besteht, so werden genau zwei Seitendreiecke  $T_1^2, T_2^2$  von  $T^3$  eineindeutig-affin auf  $\tau^2$  abgebildet; gibt man ihnen die durch die Orientierung von  $T^3$  in bekannter Weise bestimmte Randorientierung, so wird eines von ihnen, etwa  $T_1^2$ , im positiven, das andere,  $T_2^2$ , im negativen Sinne abgebildet. Die Originalmenge des Punktes  $\xi$  ist eine Strecke, deren Endpunkte auf  $T_1^2$  und  $T_2^2$  liegen; diese Strecke, mit der von  $T_2^2$  nach  $T_1^2$  weisenden Richtung versehen, nennen wir  $\varphi_{T^3}(\xi)$ . Wenn wir immer unter  $\dot{C}, \dot{T}, \dot{\varphi}, \dots$  die Ränder von  $C, T, \varphi, \dots$  verstehen (im algebraisch-kombinatorischen Sinne), so hat diese Festsetzung die Gültigkeit von

$$(2) \quad \dot{\varphi}_{T^3}(\xi) = \varphi_{\dot{T}}(\xi)$$

zur Folge, wobei  $\varphi_{\dot{T}}(\xi)$  nach den unter 1. gegebenen Vorschriften zu bilden ist. Wird  $\tau^2$  durch das Bild von  $T^3$  nicht bedeckt, so setzen wir  $\varphi_{T^3}(\xi) = 0$ , und auch dann gilt (2) in Hinblick auf (1'). Liegt nicht nur eine affine Abbildung eines einzelnen  $T^3$  auf  $\tau^2$ , sondern eine simpliziale Abbildung eines dreidimensionalen Komplexes  $C^3 = \sum \alpha_i T_i^3$ , den wir uns etwa wieder als Teil eines beliebigen Komplexes  $A$  denken können, auf den  $\tau^2$  enthaltenden Komplex  $\Gamma^2$  vor, so definieren wir als Originalkomplex von  $\xi$ :  $\varphi_C(\xi) = \sum \alpha_i \varphi_{T_i^3}(\xi)$ . Analog zu (1) und (1') gelten die Regeln

$$(3) \quad \varphi_{C_1^3 + C_2^3}(\xi) = \varphi_{C_1^3}(\xi) + \varphi_{C_2^3}(\xi), \quad \varphi_{-C^3}(\xi) = -\varphi_{C^3}(\xi),$$

$$(3') \quad \varphi_0(\xi) = 0.$$

Ferner folgt aus (2) und (1) leicht

$$(4) \quad \dot{\varphi}_C(\xi) = \varphi_{\dot{C}}(\xi).$$

Hiernach und nach (1') ist  $\varphi_{C^3}(\xi)$  ein Zyklus, wenn  $C^3$  ein Zyklus ist.

3. Bei einer affinen Abbildung eines vierdimensionalen Simplexes  $T^4$  auf  $\tau^2$  ist, falls  $\tau^2$  durch das Bild bedeckt wird, die Originalmenge von  $\xi$  eine zweidimensionale ebene Zelle  $E^2$ ; ihr Rand ist ein einfach geschlossenes Polygon, dessen Seiten die von 0 verschiedenen  $\varphi_{T_i^3}(\xi)$  sind, wobei wir mit  $T_i^3$  die Randtetraeder von  $T^4$  bezeichnen. Da  $\dot{T}^4 = \sum T_i^3$  ein Zyklus ist, ist nach der Schlußbemerkung von 2. auch  $\varphi_{\dot{T}^4}(\xi) = \sum \varphi_{T_i^3}(\xi)$  ein Zyklus, und dieser Zyklus liegt auf dem Randpolygon von  $E^2$ ; daher ist, wenn wir unter  $P$  dieses Polygon in einer bestimmten Durchlaufungs-



richtung verstehen,  $\varphi_{T^3}(\xi)$  ein Vielfaches von  $P$ ; nun kommt aber in  $\varphi_{T^3}(\xi)$  jede Seite nur einmal vor, da in  $T^3$  jedes  $T_1^3$  nur einmal vorkommt; daher ist  $\varphi_{T^3}(\xi) = \pm P$ . Mithin läßt sich  $E^3$  auf eine und nur eine Weise so orientieren, daß  $E^3 = \varphi_{T^3}(\xi)$  wird. Die so orientierte Zelle  $E^3$  nennen wir  $\varphi_{T^3}(\xi)$ ; dann gilt

$$(5) \quad \dot{\varphi}_{T^3}(\xi) = \varphi_{T^3}(\xi).$$

Wenn  $\tau^3$  durch das Bild von  $T^3$  nicht bedeckt wird, so setzen wir wieder  $\varphi_{T^3}(\xi) = 0$ ; ferner definieren wir für die Abbildung eines vierdimensionalen Komplexes  $C^4 = \sum a_i T_i^4$ :  $\varphi_C(\xi) = \sum a_i \varphi_{T_i^4}(\xi)$ . Dann ergibt sich aus (5) analog zu (4)

$$(6) \quad \dot{\varphi}_C(\xi) = \varphi_C(\xi).$$

Die Verallgemeinerung dieser Betrachtungen auf beliebige Dimensionen liegt auf der Hand, spielt aber für diese Arbeit keine Rolle.

4. Wir kehren zu dem in 2. behandelten Fall der Abbildung eines dreidimensionalen Komplexes  $C^3$  auf  $\Gamma^3$  zurück, setzen jetzt aber voraus, daß  $C^3 = M^3$  eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit ist. Dann ist zunächst wegen der Geschlossenheit von  $M^3$  nach der Schlußbemerkung von 2.  $\varphi_{M^3}(\xi)$  ein eindimensionaler orientierter Zyklus  $Z^1$ ; da in  $M^3$  jedes Dreieck  $T_1^3$  auf genau zwei Tetraedern liegt, stoßen in einer Ecke von  $Z^1$  stets genau zwei Kanten zusammen; mithin besteht  $Z^1$  aus einer Anzahl zueinander fremder, einfach geschlossener Polygone, von denen jedes mit einer bestimmten Durchlaufungsrichtung versehen ist. Ist  $T^2$  ein orientiertes Dreieck der (fest gegebenen) Triangulation von  $M^3$ , das mit  $Z^1$  einen Punkt gemeinsam hat, so hat es nur diesen einen Punkt mit  $Z^1$  gemeinsam und wird in ihm von  $Z^1$  geschnitten; dies folgt unmittelbar aus der Definition von  $Z^1 = \varphi_{M^3}(\xi)$ . Der Schnitt ist nach einer bekannten Regel mit einem Vorzeichen zu versehen, und zwar kann man diese Regel so aussprechen:  $T^2$  liegt auf zwei Tetraedern, beide sind durch die Orientierung von  $M^3$  orientiert, die durch sie bewirkten Randorientierungen sind auf  $T^2$  einander entgegengesetzt, für eines von ihnen,  $T_1^3$ , stimmt sie mit der vorgegebenen Orientierung von  $T^2$  überein; der Schnitt von  $Z^1$  mit  $T^2$  ist positiv oder negativ zu zählen, je nachdem  $Z^1$  durch  $T^2$  aus  $T_1^3$  aus- oder in  $T_1^3$  eintritt. Diese Regel und die in 2. gegebene Orientierungsvorschrift für  $\varphi_{T^3}(\xi)$  zeigen, daß der Schnitt dasselbe Vorzeichen erhält wie die Abbildung von  $T^3$  auf  $\tau^3$ ; da überdies dann und nur dann ein Schnitt von  $Z^1$  mit  $T^2$  vorliegt, wenn  $\tau^3$  durch das Bild von  $T^3$  bedeckt wird, ist allgemein die Schnitzzahl von  $Z^1$  mit einem beliebigen  $T^2$  gleich dem Grade, mit dem  $T^2$  auf  $\tau^3$  abgebildet

wird; durch Addition mehrerer  $T_i^2$  folgt hieraus: Die Schnitzzahl von  $\varphi_{M^*}(\xi)$  mit einem in  $M^3$  liegenden Komplex  $C^2 = \sum a_i T_i^2$  ist gleich dem Grade der gegebenen Abbildung von  $C^2$  im Punkte  $\xi$ .<sup>6)</sup>

## § 2.

Die Definition von  $\gamma$  für simpliziale Abbildungen der  $S^3$  auf die  $S^2$ .

1. Wir betrachten eine simpliziale Abbildung der dreidimensionalen Sphäre  $S^3$  auf die zweidimensionale Kugelfläche  $S^2$ .  $\tau^3$  sei ein Dreieck der zugrunde gelegten Triangulation von  $S^3$ ,  $\xi$  ein innerer Punkt von  $\tau^3$ ,  $\varphi(\xi) = \varphi_{S^*}(\xi)$  sein Originalzyklus.  $\varphi(\xi)$  ist, wie jeder eindimensionale Zyklus in  $S^2$ , homolog 0, d. h. es gibt zweidimensionale Komplexe  $K^2$  mit  $K^2 = \varphi(\xi)$ . Da  $\varphi(\xi)$  nicht aus Kanten der in  $S^3$  zugrunde gelegten Triangulation besteht, kann auch  $K^2$  nicht aus Dreiecken dieser Triangulation bestehen; die folgende Wahl von  $K^2$  ist für das Weitere zweckmäßig:

$T^3$  sei ein Tetraeder der Triangulation, dessen Bild  $\tau^3$  bedeckt, das also eine Strecke von  $\varphi(\xi)$  enthält;  $a, b$  seien deren Anfangs- und Endpunkt,  $e$  sei eine der beiden Ecken, die das  $a$  enthaltende Dreieck mit dem  $b$  enthaltenden gemeinsam hat; ersetzen wir die Strecke  $ab$  durch das Streckenpaar  $aeb$ , und tun wir das Analoge in jedem  $T^3$ , das eine Strecke von  $\varphi(\xi)$  enthält, so ersetzen wir  $\varphi(\xi)$  durch einen Zyklus  $X^1$  derart, daß  $X^1$  auf Dreiecken der Triangulation verläuft und zusammen mit  $\varphi(\xi)$  den aus den Dreiecken  $aeb$  gebildeten Komplex berandet; wir ersetzen nun weiter immer die in einem Dreieck verlaufenden Streckenpaare  $e'ae, ebe'', \dots$  (wobei die  $e', e'', \dots$  Ecken sind) durch die Kanten  $e'e, ee'', \dots$ , die auch in Punkte entarten können; diese Kanten bilden einen Zyklus  $Y^1$ ; er berandet zusammen mit  $\varphi(\xi)$  den Komplex  $K_1^2$ , der aus den Dreiecken  $aeb, \dots$  und aus den Dreiecken  $e'ae, \dots$  besteht und somit ganz in den Komplex derjenigen  $T^3$  liegt, deren Bilder  $\tau^3$  bedecken. Ferner berandet  $Y^1$  selbst, da er aus Kanten der Triangulation besteht und homolog 0 ist, einen aus Dreiecken der Triangulation bestehenden Komplex  $K_2^2$ ;  $K^2 = K_1^2 + K_2^2$  ist ein von  $\varphi(\xi)$  berandeter Komplex, wie wir ihn benutzen wollen.

2. Durch die simpliziale Abbildung  $f$  wird jedes Dreieck von  $K_2^2$  affin auf ein Dreieck, eine Seite oder eine Ecke der Triangulation von  $S^2$  abgebildet;  $K_1^2$  besteht, in der oben benutzten Bezeichnung, aus Dreiecken der Art  $aeb$  und aus Dreiecken der Art  $e'ae$ ; die der ersten Art werden durch  $f$  auf die Strecken  $\xi e$  abgebildet, wobei  $e = f(e)$  Ecke von  $\tau^3$  ist, die der zweiten Art auf die (eventuell in Strecken entarteten) Dreiecke  $e'\xi e$ ,

<sup>6)</sup> Bezüglich der Umkehrabbildung  $\varphi$  vergleiche man auch den § 3 meiner Arbeit: „Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten“, Journal f. d. reine u. angew. Math. (Crelle) 163 (1930), S. 71–88.



wobei auch  $\varepsilon' = f(\varepsilon')$  Ecke von  $\tau^2$  ist. Wenn wir daher  $\tau^2$  dadurch unterteilen, daß wir  $\xi$  mit den Ecken verbinden, so ist in bezug auf die so entstandene Triangulation die Abbildung  $f(K^2)$  simplizial im gewöhnlichen Sinne, d. h. sie bildet jedes Dreieck von  $K^2$  affin auf ein Dreieck, eine Seite oder eine Ecke der triangulierten  $S^2$  ab.

Nun ist bei einer simplizialen Abbildung das Bild des Randes eines Komplexes stets mit dem Rand von dessen Bild identisch<sup>7)</sup>; der Rand des zweidimensionalen Bildkomplexes  $f(K^2)$  besteht daher nur aus dem Punkt  $\xi$ , ist also gleich 0 zu setzen, d. h.  $f(K^2)$  ist ein auf  $S^2$  liegender zweidimensionaler Zyklus; er ist mithin ein Vielfaches der  $S^2$ , da es andere zweidimensionale Zyklen auf ihr nicht gibt:  $f(K^2) = \gamma \cdot S^2$ . Mit anderen Worten: Der in den von dem Randbild  $\xi$  verschiedenen Punkten von  $S^2$  definierte Grad der Abbildung  $f(K^2)$  hat in allen diesen Punkten denselben Wert  $\gamma$ .

3. Dieser Grad  $\gamma$  hängt nicht von dem speziell gewählten  $K^2$ , sondern nur von dem Rande  $\varphi(\xi)$  ab. Ist nämlich  $\bar{K}^2$  ein beliebiger von  $\varphi(\xi)$  berandeter Komplex, so ist  $Z^2 = K^2 - \bar{K}^2$  ein zweidimensionaler Zyklus, ein solcher ist in  $S^2$  immer homolog 0, also ist auch sein Bild  $f(Z^2) \sim 0$ , d. h.  $= 0$  in  $S^2$ ; dies bedeutet  $f(\bar{K}^2) = f(K^2) = \gamma \cdot S^2$ .

4. Die Größe  $\gamma = \gamma_\xi$  ist somit allein durch den Punkt  $\xi$  bestimmt; sie ist aber sogar von der Wahl dieses Punktes unabhängig.

Ist nämlich  $\eta$  innerer Punkt eines von  $\tau^2$  verschiedenen Dreiecks von  $S^2$ , so ist nach § 1, 4.  $\gamma_\xi$  die *Schnittzahl* ( $K^2 \cdot \varphi(\eta)$ ) des von  $\varphi(\xi)$  berandeten Komplexes  $K^2$  mit  $\varphi(\eta)$ , also die *Verschlingungszahl* der Zyklen  $\varphi(\xi)$  und  $\varphi(\eta)$ . Die Verschlingungszahl zweier eindimensionaler Zyklen in  $S^2$  ist aber symmetrisch in bezug auf die beiden Zyklen<sup>8)</sup>; in unserem Fall ist also  $\gamma_\xi$  zugleich die Schnittzahl eines von  $\varphi(\eta)$  berandeten Komplexes  $L^2$  mit  $\varphi(\xi)$ ; diese Schnittzahl ist  $\gamma_\eta$ , ebenso wie  $\gamma_\xi$  die Schnittzahl von  $K^2$  mit  $\varphi(\eta)$  ist; folglich ist  $\gamma_\eta = \gamma_\xi$ . Hierbei haben wir vorausgesetzt, daß  $\eta$  nicht in  $\tau^2$  liegt; ist aber  $\zeta$  ein beliebiger Punkt aus  $\tau^2$ , so folgt ebenso  $\gamma_\eta = \gamma_\zeta$ , also  $\gamma_\zeta = \gamma_\xi$ .

<sup>7)</sup> Man verifiziert diese Behauptung erst für ein einzelnes Simplex und beweist sie dann allgemein durch Addition mehrerer Simplexe.

<sup>8)</sup> Beweis. Es sei  $K^2 = \varphi(\xi)$ ,  $L^2 = \varphi(\eta)$ ,  $K^2$  und  $L^2$  seien zueinander in allgemeiner Lage; dann schneiden sie sich in einem Streckenkomplex  $C^1$ , dessen Rand bei richtiger Bestimmung der Vorzeichen  $C^1 = K^2 \cdot \varphi(\eta) - \varphi(\xi) \cdot L^2$  ist; daher ist  $K^2 \cdot \varphi(\eta) \sim \varphi(\xi) \cdot L^2$ , wobei  $K^2 \cdot \varphi(\eta)$  und  $\varphi(\xi) \cdot L^2$  die nulldimensionalen Schnitte der in Frage kommenden Komplexe sind. Daher sind die Schnittzahlen ( $K^2 \cdot \varphi(\eta)$ ) und ( $\varphi(\xi) \cdot L^2$ ) = ( $L^2 \cdot \varphi(\xi)$ ) einander gleich. (Wegen der vorkommenden Vorzeichenbestimmung der Schnitte und Ränder vgl. man etwa: B. L. van der Waerden, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Annalen 102 (1929), S. 337–362, besonders § 3.) Siehe auch Brouwer, wie unter <sup>2)</sup>.

5. Damit ist die Unabhängigkeit der Größe  $\gamma$  von  $\xi$  allgemein gezeigt; zugleich hat sich die Deutung von  $\gamma$  als Verschlingungszahl von  $\varphi(\xi)$  und  $\varphi(\eta)$  unter der Voraussetzung ergeben, daß  $\xi$  und  $\eta$  verschiedenen Dreiecken angehören. Es ist leicht zu sehen, daß diese Voraussetzung unwesentlich ist. Liegen nämlich  $\xi$  und  $\eta$  in demselben Dreieck  $\tau^2$ , so wähle man in  $\tau^2$  einen Punkt  $\delta$  so, daß bei der Unterteilung von  $\tau^2$  in drei Dreiecke, die durch Verbindung von  $\delta$  mit den Ecken von  $\tau^2$  entsteht,  $\xi$  und  $\eta$  im Inneren verschiedener Dreiecke liegen. Diese Unterteilung übertrage man auf jedes Dreieck  $T^2$  der Triangulation von  $S^3$ , das durch  $f$  eindeutig-affin auf  $\tau^2$  abgebildet wird; man wähle ferner in jedem Tetraeder  $T^3$ , dessen Bild  $\tau^2$  bedeckt, auf dem also zwei  $T^2$  der eben genannten Art liegen, auf der zu  $\varphi(\delta)$  gehörigen Strecke einen Punkt und verbinde ihn mit den Ecken und Kanten des untergeteilten Randes von  $T^3$ ; es entsteht eine Verfeinerung der ursprünglichen Triangulation von  $S^3$ ; die alte Abbildung  $f$  ist auch bezüglich der neuen Triangulationen von  $S^3$  und  $S^2$  simplizial;  $\xi$  und  $\eta$  liegen jetzt aber in verschiedenen Dreiecken, es folgt also ebenso wie früher, daß  $\gamma = \gamma_\xi$  die Verschlingungszahl von  $\varphi(\xi)$  und  $\varphi(\eta)$  ist.

6. Das Ergebnis ist: *Zu jeder simplizialen Abbildung  $f$  der  $S^3$  auf die  $S^2$  gehört eine ganze Zahl  $\gamma = \gamma(f)$ , die sich auf folgende beiden Weisen erklären läßt: sie ist der Grad, mit dem ein beliebiger, von dem Originalzyklus eines beliebigen Punktes berandeter zweidimensionaler Komplex abgebildet wird; sie ist zugleich die Verschlingungszahl der Originalzyklen zweier beliebiger Punkte.* Dabei ist die einzige Einschränkung, der die „beliebigen“ Punkte unterworfen sind, die schon für die Definition der Originalzyklen notwendige Bedingung, daß sie im Inneren von Dreiecken der Triangulation von  $S^3$  liegen.

### § 3.

#### Die Konstanz von $\gamma$ in der Abbildungsklasse.

1. Wir haben zunächst einige allgemeine Bemerkungen über „simpliziale Approximationen“ zu machen<sup>\*)</sup>.

Unter dem „Stern“  $s(e)$  eines Eckpunktes  $e$  in einem Komplex  $C$  verstehen wir die Menge derjenigen Punkte  $x$ , die die Eigenschaft haben, daß jedes  $x$  enthaltende Simplex (beliebiger Dimension) von  $C$  den Eckpunkt  $e$  hat.  $s(e)$  besteht also, wie man leicht sieht, aus allen  $e$  enthaltenden  $i$ -dimensionalen Simplexen ( $i = 1, 2, \dots$ ), wenn man aus jedem von ihnen das  $e$  gegenüberliegende  $(i - 1)$ -dimensionale Randsimplex wegläßt.

<sup>\*)</sup> Siehe Nr. 5 und 6 der unter \*) zitierten Arbeit von Alexander.

$C$  und  $\Gamma$  seien zwei Komplexe; Simplexe, Ecken, Sterne in  $C$  bzw.  $\Gamma$  bezeichnen wir mit  $T, e, s$  bzw.  $\tau, \varepsilon, \sigma$ .  $f$  sei eine Abbildung von  $C$  auf  $\Gamma$ ; eine simpliziale Abbildung  $g$  von  $C$  auf  $\Gamma$  heißt eine „simpliziale Approximation“, genauer: eine „simpliziale Approximation bezüglich der  $T$ - und  $\tau$ -Triangulationen“ oder kurz: eine „simpliziale  $T$ - $\tau$ -Approximation“ von  $f$ , wenn ihr die  $T$ - und  $\tau$ -Triangulationen zugrunde liegen und wenn für jeden Eckpunkt  $e$  von  $C$

$$(1) \quad f(s(e)) < \sigma(g(e))$$

ist.

$x$  sei ein Punkt von  $C$ ,  $T_0$  das Simplex niedrigster Dimension, dem er angehört,  $e$  eine Ecke von  $T_0$ ; dann ist  $x < s(e)$ , also nach (1)  $f(x) < \sigma(g(e))$ . Demnach ist  $g(e)$  Ecke jedes Simplexes  $\tau$  von  $\Gamma$ , dem  $f(x)$  angehört, und da  $g$  simplizial ist, ist  $g(T_0) < \tau$ . Mithin gehören  $f(x)$  und  $g(x)$  einem Simplex  $\tau$  an, wodurch die Bezeichnung „Approximation“ gerechtfertigt ist, und woraus die Zugehörigkeit von  $f$  und  $g$  zu einer Klasse folgt: die Punkte  $f(x)$  können geradlinig auf  $\Gamma$  in die Punkte  $g(x)$  wandern.

Der Wert dieser Begriffsbildungen besteht in der Gültigkeit des folgenden Approximationsatzes: „Ist  $f$  eine Abbildung von  $C$  auf  $\Gamma$ , und sind diese Komplexe in  $T$ - bzw.  $\tau$ -Triangulationen gegeben, so gibt es eine simpliziale  $\bar{T}$ - $\bar{\tau}$ -Approximation von  $f$ , wobei die  $\bar{T}$ -Triangulation eine hinreichend feine Unterteilung der  $T$ -Triangulation ist.“ Da man von vornherein die  $\tau$ -Triangulation von  $\Gamma$  beliebig fein wählen kann, so ist hierin mit Rücksicht auf den vorigen Absatz die Tatsache enthalten, daß sich  $f$  beliebig gut simplizial approximieren läßt. Ferner ist das Vorhandensein simplizialer  $\bar{T}$ - $\bar{\tau}$ -Abbildungen in jeder Klasse festgestellt.

2. Es sei jetzt  $f$  selbst simplizial in bezug auf die  $T$ - und  $\tau$ -Triangulation.  $\bar{f}$  sei eine simpliziale  $\bar{T}$ - $\bar{\tau}$ -Approximation von  $f$ , wobei die  $\bar{T}$  bzw.  $\bar{\tau}$  Unterteilungen der  $T$  bzw.  $\tau$  sind. Wir behaupten, daß für jedes Simplex  $T^i$  der  $T$ -Triangulation

$$(2) \quad \bar{f}(T^i) = f(T^i)$$

ist; und zwar gilt (2) nicht nur im mengentheoretischen Sinne, insofern das Zusammenfallen der durch  $\bar{f}$  und  $f$  gelieferten Bildpunktmenge von  $T^i$  behauptet wird, sondern auch in folgendem algebraischen Sinne: wenn  $f(T^i)$  nicht entartet, sondern ein  $i$ -dimensionales Simplex  $\tau^i$  ist, so gilt  $\bar{f}(T^i) = f(T^i) = \pm \tau^i$  im Sinne der algebraischen Topologie, wobei  $T^i$  und  $\tau^i$  als aus Simplexen  $\bar{T}$  und  $\bar{\tau}$  zusammengesetzte Komplexe aufzufassen sind.

Beweis. Simplexe, Ecken, Sterne der  $\bar{T}$ - bzw.  $\bar{\tau}$ -Triangulation werden mit  $\bar{T}, \bar{e}, \bar{s}$  bzw.  $\bar{\tau}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}$  bezeichnet. (1) lautet dann

$$(1') \quad f(\bar{s}(\bar{e})) < \bar{\sigma}(\bar{f}(\bar{e})).$$

Ist  $\bar{e} \subset T^i$ , so ist auch  $f(\bar{e}) \subset f(T^i) = \tau^j$  ( $j \leq i$ ) und

$$(3) \quad f(\bar{e}) \subset \bar{\tau},$$

wobei  $\bar{\tau}$  ein gewisses Teilsimplex von  $\tau^j$  ist. Andererseits ist  $\bar{e} \subset \bar{s}(\bar{e})$ , also auch  $f(\bar{e}) \subset f(\bar{s}(\bar{e}))$ , mithin nach (1')

$$(4) \quad f(\bar{e}) \subset \bar{\sigma}(\bar{f}(\bar{e})).$$

Auf Grund der Definition des „Sternes“ ist nach (3) und (4) der Punkt  $\bar{f}(\bar{e})$  Ecke von  $\bar{\tau}$ , also in  $\tau^j = f(T^i)$  enthalten. Da dies für jeden in  $T^i$  enthaltenen  $\bar{e}$  gilt, ist

$$(5) \quad \bar{f}(T^i) \subset f(T^i).$$

Für den Beweis von (2) können wir uns jetzt auf den Fall beschränken, daß  $f(T^i)$  nicht entartet, daß also, in der eben benutzten Bezeichnung,  $j = i$  ist; denn im Fall  $j < i$  besitzt  $T^i$  ein  $j$ -dimensionales Randsimplex  $T^j$ , daß ohne Entartung auf  $\tau^j = f(T^i)$  abgebildet wird; hierin und in (5) ist dann (2) enthalten. Wir werden also (2) für  $j = i$  beweisen, und zwar gleich in dem oben ausgesprochenen algebraischen Sinne.

Für  $i = 0$  ist die Behauptung bereits durch (5) bewiesen; sie sei für die Dimensionszahl  $i - 1$  bewiesen. Dann gilt sie für jedes  $(i - 1)$ -dimensionale Randsimplex von  $T^i$ , also auch für den ganzen Rand  $\hat{T}^i$ ; d. h. es ist  $\bar{f}(\hat{T}^i) = f(\hat{T}^i)$ . Da bei jeder simplizialen Abbildung das Bild des Randes mit dem Rand des Bildes identisch ist (im algebraischen Sinne<sup>7)</sup>, ist daher auch

$$(6) \quad (\bar{f}(T^i))' = (f(T^i))'.$$

Nach (5) liegt der Komplex  $\bar{f}(T^i)$  in dem Simplex  $\tau^i$ , welches gleich  $\pm f(T^i)$  ist; nach (6) ist daher  $\bar{f}(T^i) - f(T^i)$  ein in  $\tau^i$  liegender  $i$ -dimensionaler Zyklus; dieser muß, da  $\tau^i$  ein  $i$ -dimensionales Simplex ( $i > 0$ ) ist, identisch 0 sein; d. h. es ist  $\bar{f}(T^i) = f(T^i)$ , w. z. b. w.

3. Wir betrachten jetzt wieder simpliziale Abbildungen der  $S^3$  auf die  $S^3$ ; es gelten die Bezeichnungen des Abschnitts 2, insbesondere sei also  $\bar{f}$  eine simpliziale Approximation der simplizialen Abbildung  $f$ . Wir behaupten:

$$\gamma(\bar{f}) = \gamma(f).$$

Beweis.  $\xi$  sei innerer Punkt eines  $\bar{\tau}^3$ ; dann ist er auch innerer Punkt eines  $\tau^3$ , seine Originalzyklen  $\varphi(\xi)$  und  $\bar{\varphi}(\xi)$  bezüglich der Abbildungen  $f$  bzw.  $\bar{f}$  sind also definiert;  $\eta$  sei innerer Punkt eines  $\bar{\tau}_1^3$ , und das  $\tau_1^3$ , von dem  $\bar{\tau}_1^3$  ein Teil ist, sei von  $\tau^3$  verschieden; auch  $\varphi(\eta)$  und  $\bar{\varphi}(\eta)$  sind definiert. Die Behauptung ist, daß  $\bar{\varphi}(\xi)$  und  $\bar{\varphi}(\eta)$  dieselbe Verschlingungszahl haben wie  $\varphi(\xi)$  und  $\varphi(\eta)$ . Wir werden sie dadurch beweisen, daß wir die Existenz zweier Komplexe  $X^3$  und  $Y^3$  nachweisen, so daß  $X^3$

zu  $\varphi(\eta)$  und  $\bar{\varphi}(\eta)$ ,  $Y^2$  zu  $\varphi(\xi)$  und  $\bar{\varphi}(\xi)$  fremd und daß

$$(7x) \quad \dot{X}^2 = \varphi(\xi) - \bar{\varphi}(\xi),$$

$$(7y) \quad \dot{Y}^2 = \varphi(\eta) - \bar{\varphi}(\eta)$$

ist; dann folgt nämlich aus (7x) und der Fremdheit von  $X^2$  mit  $\varphi(\eta)$ , daß, wenn wir die Verschlingungszahlen immer mit  $V$  bezeichnen,  $V(\varphi(\xi), \varphi(\eta)) = V(\bar{\varphi}(\xi), \varphi(\eta))$  ist<sup>10)</sup>; aus (7y) und der Fremdheit von  $Y^2$  mit  $\bar{\varphi}(\xi)$  folgt ebenso  $V(\bar{\varphi}(\xi), \varphi(\eta)) = V(\bar{\varphi}(\xi), \bar{\varphi}(\eta))$ , also die Behauptung  $V(\varphi(\xi), \varphi(\eta)) = V(\bar{\varphi}(\xi), \bar{\varphi}(\eta))$ . Da  $\xi$  und  $\eta$  ganz symmetrisch auftreten, genügt der Nachweis der Existenz von  $X^2$ .

Nach Abschnitt 2 werden durch  $\bar{f}$  dieselben  $T^3$  auf  $\tau^2$  abgebildet wie durch  $f$ ; sie bilden einen Komplex  $X^3$ ; in ihm liegt sowohl  $\varphi(\xi)$  wie  $\bar{\varphi}(\xi)$ .  $X^3$  hat mit dem Komplex  $Y^3$  der durch  $f$  und  $\bar{f}$  auf  $\tau_1^2$  abgebildeten Tetraeder kein  $T^3$  gemeinsam, und da  $\varphi(\eta)$  und  $\bar{\varphi}(\eta)$  in  $Y^3$  liegen, ist unsere Aufgabe gelöst, wenn wir gezeigt haben, daß  $\varphi(\xi)$  und  $\bar{\varphi}(\xi)$  zusammen in  $X^3$  einen  $X^2$  beranden, d. h. daß  $\varphi(\xi) \sim \bar{\varphi}(\xi)$  in  $X^3$  ist.

Ein durch  $f$  eindeutig auf  $\tau^2$  abgebildetes  $T^3$  wird durch  $\bar{f}$  zwar nicht eindeutig, aber nach 2. mit demselben Grade  $+1$  oder  $-1$  auf  $\tau^2$  abgebildet wie durch  $f$ . Nach § 1, 4. haben daher  $\varphi(\xi)$  und  $\bar{\varphi}(\xi)$  dieselbe Schnitzzahl mit  $T^2$ ; anders ausgedrückt: der Zyklus  $Z^1 = \varphi(\xi) - \bar{\varphi}(\xi)$  hat mit jedem zu  $X^3$  gehörigen  $T^2$  die Schnitzzahl 0; wir werden zeigen — und damit wird unsere Behauptung bewiesen sein —, daß jeder in  $X^3$  liegende Zyklus  $Z^1$ , der mit jedem zu  $X^3$  gehörigen  $T^2$  die Schnitzzahl 0 hat, homolog 0 in  $X^3$  ist.

Ein derartiger  $Z^1$  habe mit einem  $T^2$  einen Schnittpunkt  $a$ , der bei einer fest gewählten Orientierung von  $T^2$  positiv zu zählen sei; dann hat  $Z^1$ , da seine gesamte Schnitzzahl mit  $T^2$  0 ist, noch einen zweiten Schnittpunkt  $b$  mit  $T^2$ , und dieser ist negativ zu zählen. Sind  $T_1^2, T_2^2$  die beiden Tetraeder, auf denen  $T^2$  liegt, und  $a_1, a_2, b_1, b_2$  Punkte, die nahe bei  $a$  bzw.  $b$  in  $T_1^2$  bzw.  $T_2^2$  auf  $Z^1$  liegen, und ist  $a_1 a a_2$  die positive Richtung von  $Z^1$  beim Durchschreiten von  $a$ , so ist  $b_2 b b_1$  seine positive Richtung beim Durchschreiten von  $b$ . Wir verbinden nun  $a_1$  in  $T_1^2$  geradlinig mit  $b_1$  und  $a_2$  in  $T_2^2$  geradlinig mit  $b_2$  und bezeichnen das geschlossene, gerichtete Polygon  $a_1 a a_2 b b_1 a_1$  mit  $P^1$ ; es ist homolog 0 in  $T_1^2 + T_2^2$ , also in  $X^3$ ; daher ist  $Z_1^1 = Z^1 - P^1 \sim Z^1$  in  $X^3$ ; dieser Zyklus  $Z_1^1$  enthält  $a$  und  $b$  nicht, er hat also zwei Schnittpunkte mit den  $T^2$  weniger als  $Z^1$ , und seine Schnitzzahl mit jedem einzelnen  $T^2$  ist 0, ebenso wie sie es

<sup>10)</sup> Denn ist  $K^2 = \varphi(\xi)$ , so ist  $(K^2 - X^2) \cdot = \bar{\varphi}(\xi)$ , und  $K^2$  hat dieselben Schnittpunkte mit  $\varphi(\eta)$  wie  $K^2 - X^2$ .

für  $Z^1$  ist. Ebenso wie wir von  $Z^1$  zu  $Z_1^1$  übergegangen sind, können wir weiter zu einem  $Z_2^1$  übergehen, der  $\sim Z_1^1 \sim Z^1$  in  $X^3$  ist, wieder zwei Schnittpunkte weniger und mit jedem einzelnen  $T^3$  die Schnittzahl 0 hat. So gelangen wir schließlich zu einem  $Z_n^1$ , der  $\sim Z^1$  in  $X^3$  und fremd zu allen  $T^3$  ist; er besteht also aus einer Anzahl zueinander fremder Zyklen, von denen jeder im Inneren eines  $T^3$  liegt, also  $\sim 0$  in  $T^3$  und a fortiori in  $X^3$  ist; mithin ist auch  $Z^1 \sim Z_n^1 \sim 0$  in  $X^3$ .

4. Wenn im folgenden zwei verschiedene Triangulationen der  $S^3$  vorkommen, so wird immer vorausgesetzt, daß es eine dritte Triangulation gibt, die eine gemeinsame Unterteilung der beiden ist; das gleiche gilt für die  $S^2$ . Wir nehmen also an, daß zunächst je eine Triangulation der  $S^3$  und der  $S^2$  gegeben ist und daß alle die und nur die Triangulationen der  $S^3$  bzw.  $S^2$  zugelassen sind, die mit den ursprünglichen eine Unterteilung gemeinsam haben. Wenn mehrere simpliziale Abbildungen der  $S^3$  auf die  $S^2$  betrachtet werden, so sollen die ihnen zugrunde gelegten Triangulationen in dieser Weise miteinander zusammenhängen.

Satz. Für zwei zu einer Abbildungsklasse gehörige simpliziale Abbildungen  $f_1, f_2$  der  $S^3$  auf die  $S^2$  ist  $\gamma(f_1) = \gamma(f_2)$ .

Beweis. Da  $f_1$  und  $f_2$  zu einer Klasse gehören, gibt es eine sie enthaltende, von dem Parameter  $r$  für  $1 \leq r \leq 2$  stetig abhängende Schar von Abbildungen  $f_r$  der  $S^3$  auf die  $S^2$ .  $C^4$  sei das topologische Produkt der  $S^3$  mit einer Strecke, deren Koordinate  $r$  von 1 bis 2 läuft; wir können uns  $C^4$  im vierdimensionalen Raum durch das von zwei konzentrischen Kugeln  $S_1^3$  und  $S_2^3$  begrenzte Raumstück realisieren, wobei  $S_1^3$  und  $S_2^3$  die Radien 1 und 2 haben. Ist  $x$  ein Punkt von  $S^3$  und  $1 \leq r \leq 2$ , so gibt es einen Punkt von  $C^4$ , der mit  $(x, r)$  zu bezeichnen ist; durch  $F((x, r)) = f_r(x)$  wird eine Abbildung  $F$  von  $C^4$  auf  $S^2$  erklärt, die auf  $S_1^3$  bzw.  $S_2^3$  mit  $f_1$  bzw.  $f_2$  übereinstimmt.

$F'$  sei eine simpliziale Approximation von  $F$ ; die ihr zugrunde gelegte Triangulation von  $C^4$  sei folgendermaßen hergestellt: Eine Triangulation der  $S^3$ , die eine gemeinsame Unterteilung der  $f_1$  und  $f_2$  zugrunde gelegten Triangulationen ist, sei auf  $S_1^3$  und  $S_2^3$  eingetragen; durch Produktbildung der Simplexe dieser Triangulation mit der  $r$ -Strecke entsteht eine Einteilung von  $C^4$  in „Prismen“, die sich zu einer simplizialen Triangulation verfeinern läßt; diese oder eine Unterteilung von ihr sei  $F'$  zugrunde gelegt. Dadurch ist man auf  $S_1^3$  und  $S_2^3$  zu Unterteilungen der ursprünglichen Triangulationen übergegangen, und  $F'$  stellt auf  $S_1^3$  bzw.  $S_2^3$  simpliziale Approximationen  $f_1'$  bzw.  $f_2'$  von  $f_1$  bzw.  $f_2$  dar. Nach 3. ist  $\gamma(f_1') = \gamma(f_1)$  und  $\gamma(f_2') = \gamma(f_2)$ ; wir haben daher zu zeigen, daß  $\gamma(f_1') = \gamma(f_2')$  ist.



Die Originalkomplexe eines Punktes  $\xi$  der  $S^3$  bei den Abbildungen  $F'$ ,  $f'_1$  bzw.  $f'_2$  haben wir nach den Vorschriften des § 1 mit  $\varphi_{C'}(\xi)$ ,  $\varphi_{S_1'}(\xi)$  bzw.  $\varphi_{S_2'}(\xi)$  zu bezeichnen. Da  $C^4 = S_2^3 - S_1^3$  ist, ist nach § 1, Gl. (6) und (3)  $\varphi_{C'}(\xi) = \varphi_{S_2'}(\xi) - \varphi_{S_1'}(\xi)$ . Daher ist, wenn  $K_1^3$ ,  $K_2^3$  Komplexe in  $S_1^3$  bzw.  $S_2^3$  mit  $\tilde{K}_1^3 = \varphi_{S_1'}(\xi)$ ,  $\tilde{K}_2^3 = \varphi_{S_2'}(\xi)$  sind,  $K_2^3 - \varphi_{C'}(\xi) - K_1^3 = Z^3$  ein Zyklus.  $Z^3$  ist, wie jeder Zyklus in  $C^4$ , einem Zyklus in  $S_1^3$  homolog, nämlich der „Projektion“  $Z_1^3$  von  $Z^3$  auf  $S_1^3$ , die entsteht, indem man jeden Punkt  $(x, r)$  von  $Z^3$  durch den Punkt  $(x, 1)$  ersetzt. Aus  $Z^3 \sim Z_1^3$  folgt  $F'(Z^3) \sim F'(Z_1^3)$ , d. h.  $F'(Z^3) = F'(Z_1^3)$  in  $S^3$ . Da  $Z_1^3 \sim 0$  in  $S_1^3$  ist, ist  $F'(Z_1^3) = f'_1(Z_1^3) \sim 0$ , d. h.  $= 0$  in  $S^3$ ; mithin ist auch  $F'(Z^3) = 0$ , also  $F'(K_2^3) - F'(\varphi_{C'}(\xi)) - F'(K_1^3) = f'_2(K_2^3) - f'_1(K_1^3) - F'(\varphi_{C'}(\xi)) = 0$ . Nun wird aber  $\varphi_{C'}(\xi)$  durch  $F'$  auf den Punkt  $\xi$  abgebildet, es ist also  $F'(\varphi_{C'}(\xi)) = 0$ , mithin  $f'_1(K_1^3) = f'_2(K_2^3)$ , d. h.  $\gamma(f'_1) = \gamma(f'_2)$ .

5. Jede Klasse von Abbildungen der  $S^3$  auf die  $S^3$  enthält nach 1. simpliziale Abbildungen, denen Triangulationen der im Sinne des ersten Absatzes von 4. ausgezeichneten Triangulationssysteme zugrunde liegen. Da nach 4. zu allen simplizialen Abbildungen  $\hat{f}$  der Klasse dieselbe Zahl  $\gamma(\hat{f})$  gehört, ist  $\gamma$  eine Konstante der Klasse. Damit ist die in der Einleitung ausgesprochene Behauptung IIa bewiesen.

Die Zahl  $\gamma$  muß vorläufig als abhängig von den zugrunde gelegten Triangulationssystemen gelten; dieser Umstand stört aber den Beweis des Satzes II, der ja unser Ziel ist, nicht, und überdies wird sich im nächsten Paragraphen die topologische Invarianz von  $\gamma$ , d. h. die Unabhängigkeit von den Triangulationssystemen, herausstellen.

#### § 4.

##### Eigenschaften von $\gamma$ .

1. Beweis des Produktsatzes IIb (s. Einleitung). Es gelten die in der Einleitung benutzten Bezeichnungen. Wir dürfen  $f$  und  $g$  als simplizial annehmen, da  $c$  und  $\gamma$  Konstanten der Abbildungsklassen sind und jede Klasse simpliziale Abbildungen enthält.  $\varphi(\xi)$  sei der Originalzyklus eines Punktes  $\xi$  bei der Abbildung  $f$ ,  $\psi(\xi)$  sein Originalzyklus bei der Abbildung  $fg$ . Werden auf ein  $T^3$  von  $S^3$ , welches eine Strecke von  $\varphi(\xi)$  enthält,  $p$  Tetraeder von  $S_1^3$  im positiven,  $n$  Tetraeder im negativen Sinne abgebildet, so ist  $p - n = c$ ; auf die in  $T^3$  liegende Strecke von  $\varphi(\xi)$  werden dann  $p$  bzw.  $n$  Strecken von  $\psi(\xi)$  im positiven bzw. negativen Sinne abgebildet; umgekehrt ist das Bild jeder Strecke von  $\psi(\xi)$  eine — eventuell in einen Punkt entartende — Strecke von  $\varphi(\xi)$ . Mithin ist

$g(\psi(\xi)) = c \cdot \varphi(\xi)$ . Ist  $\dot{L}^3 = \psi(\xi)$ ,  $\dot{K}^3 = \varphi(\xi)$ , so ist demnach  $(g(L^3))' = g(\dot{L}^3) = c \dot{K}^3$ , mithin ist  $g(L^3) - cK^3$  ein Zyklus in  $S^3$ ; da das durch  $f$  gelieferte Bild eines solchen, wie wir schon mehrere Male sahen, 0 ist, ist  $fg(L^3) = c \cdot f(K^3)$ , d. h. es ist  $\gamma(fg) = c \cdot \gamma(f)$ .

2. Beweis des Produktsatzes IIb'. Wir benutzen wieder dieselben Bezeichnungen wie in der Einleitung, und wir nehmen wieder  $f$  und  $h$  als simplizial an. Die Originalzyklen bei  $f$  bzw.  $hf$  werden mit  $\varphi$  bzw.  $\psi$  bezeichnet. Die Originalpunkte des Punktes  $\zeta$  von  $S_1^2$  bei  $h$  seien die Punkte  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  von  $S^2$ , und zwar mögen die Dreiecke, welche die  $\xi_i$  enthalten, im positiven, die Dreiecke, welche die  $\eta_j$  enthalten, im negativen Sinne auf das  $\zeta$  enthaltende Dreieck abgebildet werden. Dann ist  $\psi(\zeta) = \sum_i \varphi(\xi_i) - \sum_j \varphi(\eta_j)$ ; ist  $\dot{K}_i^2 = \varphi(\xi_i)$ ,  $\dot{L}_j^2 = \varphi(\eta_j)$ , so ist demnach  $(\sum_i K_i^2 - \sum_j L_j^2)' = \psi(\zeta)$  und daher  $hf(\sum_i K_i^2 - \sum_j L_j^2) = \gamma(hf) \cdot S_1^2$ .

Nun ist aber

$$f(K_i^2) = f(L_j^2) = \gamma(f) \cdot S^2,$$

also

$$f(\sum_i K_i^2 - \sum_j L_j^2) = (p - n) \cdot \gamma(f) \cdot S^2 = c \cdot \gamma(f) \cdot S^2,$$

und ferner  $h(S^2) = c \cdot S_1^2$ , also  $hf(\sum_i K_i^2 - \sum_j L_j^2) = c^2 \cdot \gamma(f) \cdot S_1^2$ ; folglich ist  $\gamma(hf) = c^2 \cdot \gamma(f)$ .

3. Betrachten wir auf der  $S^3$  neben dem bisher zugrunde gelegten System von Triangulationen ein davon ganz unabhängiges Triangulationssystem, so können wir uns  $S^3$  als in zwei Exemplaren  $S_1^3$  und  $S_2^3$  vorliegend denken, von denen  $S_1^3$  mit dem ersten,  $S_2^3$  mit dem zweiten Triangulationssystem versehen ist; die Koinzidenz auf  $S^3$  vermittelt eine Abbildung  $g$  von  $S_1^3$  auf  $S_2^3$ , die, da sie eineindeutig ist, unter Zugrundelegung der auf  $S_1^3$  und  $S_2^3$  ausgezeichneten Triangulationen den Grad  $+1$  oder  $-1$  hat. Ist  $f$  eine Abbildung von  $S_2^3$  auf  $S^3$ , so ist  $fg$  dieselbe Abbildung von  $S^3$ ; nur ist, wenn sie mit  $f$  bezeichnet wird, das erste, wenn sie mit  $fg$  bezeichnet wird, das zweite Triangulationssystem ausgezeichnet, so daß  $\gamma(f)$  und  $\gamma(fg)$  die Werte von  $\gamma$  sind, die sich für die betrachtete Abbildung der  $S^3$  auf die  $S^3$  unter Zugrundelegung der verschiedenen Triangulationen von  $S^3$  ergeben. Nach IIb ist, da  $g$  den Grad  $\pm 1$  hat,  $\gamma(fg) = \pm \gamma(f)$ ; das bedeutet, daß  $\gamma(f)$ , vom Vorzeichen abgesehen, unabhängig von der zugrunde gelegten Triangulation von  $S^3$  ist; das Vorzeichen hängt von der Orientierung von  $S^3$  ab<sup>11)</sup>.

<sup>11)</sup> Dieser Beweis ist dem Beweis der topologischen Invarianz des Abbildungsgrades analog: L. E. J. Brouwer, Über Jordansche Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71 (1911), S. 320–327.



Analog verhält es sich auf Grund von IIb' bezüglich der Triangulationen von  $S^2$ ; nur ist hier sogar das Vorzeichen von  $\gamma$  unabhängig von Triangulationen und Orientierung, da  $c$  in der Aussage des Satzes IIb' im Quadrat auftritt.

Somit sehen wir: der Betrag von  $\gamma(f)$  ist topologisch invariant, d. h. unabhängig von den zugrunde gelegten Triangulationen der  $S^3$  und  $S^2$ ; das Vorzeichen von  $\gamma$  ändert sich bei Umkehrung der Orientierung der  $S^3$ , ist aber unabhängig von der Orientierung der  $S^2$ .

4. Schließlich sei noch hervorgehoben, daß für eine topologisch unwesentliche Abbildung stets  $\gamma = 0$  ist; denn gehört ein Punkt  $\xi$  der  $S^2$  bei einer Abbildung nicht zur Bildmenge, so ist sein Originalzyklus  $\varphi(\xi)$  leer, und jeder andere Zyklus hat mit ihm die Verschlingungszahl 0.

### § 5.

#### Eine Abbildung der $S^3$ auf die $S^2$ mit $\gamma = 1$ .

Der euklidische  $R^4$  mit den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sei auf den euklidischen  $R^3$  mit den Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  folgendermaßen abgebildet:

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= 2(x_1x_2 + x_3x_4), & \xi_2 &= 2(x_2x_3 - x_1x_4), \\ \xi_3 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 4(x_1^2 + x_2^2) \cdot (x_3^2 + x_4^2),$$

also

$$(2) \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2;$$

die dreidimensionale Kugel mit dem Radius  $r$  um den Nullpunkt  $R^4$  als Mittelpunkt wird somit auf die zweidimensionale Kugel mit dem Radius  $r^2$  um den Nullpunkt des  $R^3$  als Mittelpunkt abgebildet; insbesondere ist die Einheitskugel  $S^2$  des  $R^3$  das Bild der Einheitskugel  $S^3$  des  $R^4$ . Diese Abbildung  $f$  der  $S^3$  auf die  $S^2$  wollen wir betrachten<sup>12)</sup>.

$f$  läßt sich auch folgendermaßen beschreiben: Führt man auf  $S^2$  in der üblichen Weise eine komplexe Variable  $z$  ein, indem man die komplexen Zahlen  $\xi_1 + i\xi_2$  der Ebene  $\xi_3 = 0$  stereographisch von dem Nordpol  $\xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = 1$  der Kugel aus auf diese projiziert, so wird dem Punkt mit den Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  die Zahl

$$(3) \quad z = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3}$$

<sup>12)</sup> Diese Betrachtung, und somit der Beweis von IIc, ist die einzige Stelle in dieser Arbeit, an der benutzt wird, daß  $S^2$  die Kugel und nicht eine beliebige orientierbare Fläche ist.

zugeordnet, wobei für den Nordpol selbst, für den der Ausdruck (3) unbestimmt wird,  $z = \infty$  zu setzen ist. Ersetzt man in (3)  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  aus (1) und berücksichtigt, daß  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$  ist, so ergibt sich

$$(4) \quad z = \frac{x_1 + i x_2}{x_3 + i x_4},$$

und hier spielt der Wert  $z = \infty$  keine Ausnahmerolle, da für die Punkte mit  $x_3 = x_4 = 0$  auf der  $S^3$  nicht auch  $x_1 = x_2 = 0$  sein kann und da diesen Punkten nach (1) der Nordpol  $0, 0, 1$  der  $S^2$  entspricht. Mithin ist  $f$  durch (4) gegeben, wenn man die  $S^3$  als Riemannsche Zahlkugel auffaßt.

Die Originalmenge des Punktes  $0, 0, 1$  besteht, wie wir soeben sahen, aus denjenigen Punkten der  $S^3$ , für die  $x_3 = x_4 = 0$  ist; für jeden anderen Punkt  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  der  $S^2$  erhält man die Originalmenge durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (3) und (4); es ergeben sich die Bedingungen

$$(5) \quad \begin{aligned} (1 - \xi_3) \cdot x_1 - \xi_1 \cdot x_3 + \xi_2 \cdot x_4 &= 0, \\ (1 - \xi_3) \cdot x_2 - \xi_2 \cdot x_3 - \xi_1 \cdot x_4 &= 0. \end{aligned}$$

In jedem Falle ist die Originalmenge eines Punktes der  $S^2$  der Schnitt der  $S^3$  mit dem Schnitt zweier nicht zusammenfallender dreidimensionaler Ebenen durch den Mittelpunkt, also der Schnitt der  $S^3$  mit einer zweidimensionalen Ebene durch den Mittelpunkt, d. h. ein Großkreis<sup>13)</sup>.

Wir werden nun zeigen, daß für eine Abbildung  $f$  der  $S^3$  auf die  $S^2$ , bei welcher die Originalmenge  $\Phi(\xi)$  jedes Punktes  $\xi$  der  $S^2$  ein Großkreis der  $S^3$  ist, stets  $\gamma(f) = \pm 1$  ist; das Vorzeichen hängt natürlich von der Orientierung der  $S^3$  ab.

Eine dreidimensionale und eine zweidimensionale Ebene durch den Mittelpunkt der  $S^3$  schneiden sich, wenn die letztere nicht ganz in der ersteren liegt, in einer Geraden durch den Mittelpunkt; dies bedeutet, wenn man zu den Schnitten mit der  $S^3$  übergeht: eine zweidimensionale Großkugel und ein Großkreis schneiden sich, wenn der Kreis nicht auf der Kugel verläuft, in zwei zueinander diametralen Punkten; folglich wird die Hälfte  $H$  einer Großkugel von jedem Großkreis, der fremd zu dem Rand von  $H$  ist und daher nicht auf der Großkugel verläuft, stets in genau einem Punkte geschnitten; da es zu jedem Großkreis (unendlich viele) von ihm berandete Hälften von Großkugeln gibt, folgt hieraus: je zwei zueinander fremde Großkreise der  $S^3$  sind miteinander verschlungen, und zwar ist ihre Verschlingungszahl  $\pm 1$ .

<sup>13)</sup> Das System dieser Großkreise, die die Originalmengen der Punkte von  $S^2$  bilden, ist eine Cliffordsche Parallelenkongruenz; hierzu vgl. man F. Klein, Vorlesungen über Nicht-euklidische Geometrie (Berlin 1928), S. 234; daß dort anstatt der  $S^3$  der elliptische Raum betrachtet wird, macht keinen wesentlichen Unterschied.

Hiernach liegt bereits die Annahme nahe, daß für eine Abbildung  $f$  der  $S^3$  auf die  $S^3$ , bei der die Originalmenge  $\Phi(\xi)$  jedes Punktes von  $S^3$  ein Großkreis ist,  $\gamma(f) = \pm 1$  ist. Um die Richtigkeit dieser Annahme zu bestätigen, haben wir aber infolge unserer Definition von  $\gamma$  auf simpliziale Approximationen  $f'$  von  $f$  zurückzugehen und zu zeigen, daß auch die Originalzyklen  $\varphi(\xi)$  und  $\varphi(\eta)$  bei einer solchen Abbildung  $f'$  die Verschlingungszahl  $\pm 1$  haben. Nun ist klar, daß mit zunehmender Güte der Approximation die Zyklen  $\varphi(\xi)$  und  $\varphi(\eta)$  gegen  $\Phi(\xi)$  bzw.  $\Phi(\eta)$  in dem Sinne konvergieren, daß sie schließlich in beliebig vorgegebenen Umgebungen  $U_\xi, U_\eta$  der Kreise  $\Phi(\xi)$  bzw.  $\Phi(\eta)$  liegen. Wenn wir noch gezeigt haben, daß bei hinreichender Güte der Approximation  $\varphi(\xi) \sim \Phi(\xi)$  in  $U_\xi$ ,  $\varphi(\eta) \sim \Phi(\eta)$  in  $U_\eta$  ist, so sind wir fertig; denn dann hat, wenn nur  $U_\xi$  und  $U_\eta$  fremd zueinander sind,  $\varphi(\xi)$  mit  $\varphi(\eta)$  dieselbe Verschlingungszahl wie  $\Phi(\xi)$  mit  $\Phi(\eta)$  (vgl. den ersten Absatz des Beweises in § 3, 3). Da  $\xi$  und  $\eta$  ganz symmetrisch auftreten, genügt es, einen der beiden Punkte zu betrachten; unsere Behauptung ist also: Ist  $f'$  eine hinreichend gute simpliziale Approximation von  $f$ , so ist  $\varphi(\xi) \sim \Phi(\xi)$  in  $U_\xi$ , wobei  $U_\xi$  eine willkürlich vorgeschriebene Umgebung von  $\Phi(\xi)$  ist.

$\xi$  sei ein fester Punkt von  $S^3$ ; alle im folgenden vorkommenden simplizialen Abbildungen seien so gewählt, daß er innerer Punkt eines Dreiecks der  $S^3$ , daß  $\varphi(\xi)$  also für jede dieser Approximationen erklärt ist.  $\zeta$  sei ein von  $\xi$  verschiedener Punkt der  $S^3$ ,  $H$  eine von  $\Phi(\zeta)$  berandete halbe Großkugel; die Triangulationen der  $S^3$ , die den Approximationen zugrunde gelegt werden, sollen alle so beschaffen sein, daß  $H$  aus Dreiecken der Triangulation besteht.  $H$  wird, wie wir oben sahen, von jedem  $\Phi(\eta)$  mit  $\eta \neq \zeta$  in genau einem Punkte geschnitten; folglich ist die Abbildung  $f(H)$  in allen von  $\zeta$  verschiedenen Punkten der  $S^3$ , insbesondere also in der Umgebung von  $\xi$ , eineindeutig und hat daher dort den Grad  $\pm 1$ . Die Approximation  $f'$  von  $f$  sei so gut, daß auch die Abbildung  $f'(H)$  im Punkte  $\xi$  den Grad  $\pm 1$  hat; dann hat nach § 1, 4.  $H$  mit  $\varphi(\xi)$  die Schnitzzahl  $\pm 1$ . Wir konstruieren nun eine schlauchförmige Umgebung  $U'_\xi$  des Kreises  $\Phi(\xi)$ , die ganz in der gegebenen Umgebung  $U_\xi$  verläuft und mit  $H$  eine von einem Kreis berandete Kugelkappe  $K$ , im übrigen aber keinen Punkt gemeinsam hat; diese Konstruktion ist möglich, da  $\Phi(\xi)$  und  $H$  einen einzigen Punkt  $x$  gemeinsam haben. Wir verbessern die Güte der Approximation, falls das nötig ist, weiter so, daß  $\varphi(\xi)$  ganz im Inneren von  $U'_\xi$  liegt; dann liegen alle Schnittpunkte von  $\varphi(\xi)$  und  $H$  auf  $K$ , die Schnitzzahl von  $\varphi(\xi)$  und  $K$  ist also  $\pm 1$ . Ebenso haben  $\Phi(\xi)$  und  $K$  die Schnitzzahl  $\pm 1$ , da diese beiden Gebilde nur den einen, einfach zu zählenden Schnitt  $x$  haben. Bei geeigneter Orientierung von  $\Phi(\xi)$  hat daher der im Inneren des Schlauches verlaufende Zyklus  $Z^1 = \Phi(\xi) - \varphi(\xi)$

mit  $K$  die Schnittzahl 0. Daraus folgt, daß  $Z^1 \sim 0$  in dem Schlauch  $U'_\xi$  ist; denn analog dem in § 3, 3. angewandten Verfahren kann man einen Zyklus  $Z_n^1$  konstruieren, der  $\sim Z^1$  in  $U'_\xi$  ist und mit  $K$  keinen Punkt gemeinsam hat; ein solcher  $Z_n^1$  läßt sich im Inneren des Schlauches auf einen Punkt zusammenziehen, ist dort also  $\sim 0$ . Dann ist auch  $Z^1 \sim 0$  in  $U'_\xi$ , also erst recht in  $U_\xi$ ; mithin ist  $\varphi(\xi) \sim \Phi(\xi)$  in  $U_\xi$ , w. z. b. w.

Für die Abbildung  $f$  der  $S^3$  auf die  $S^3$ , die durch (1) oder durch (4) gegeben ist, ist also in der Tat  $\gamma(f) = 1$ ; hieraus und aus § 4, 4. folgt, daß  $f$  topologisch wesentlich ist, womit der Satz Ia bewiesen ist. Insbesondere aber haben wir jetzt unser eigentliches Ziel, nämlich den Beweis des Satzes II, aus dem ja auch der Satz I folgt, erreicht: denn das Bestehen der Eigenschaft IIa wurde im § 3, das der Eigenschaft IIb in § 4, 1. und das von IIc in diesem Paragraphen gezeigt.

### § 6.

#### Eine Kennzeichnung der algebraisch unwesentlichen Abbildungen einer $M^3$ .

In der im § 1 vorgenommenen Untersuchung der Umkehrung einer simplizialen Abbildung eines  $C^3$  wurde niemals vorausgesetzt, daß  $C^3$  eine Sphäre ist; vielmehr durfte er in Abschnitt 2 ganz beliebig, in Abschnitt 4 durfte er eine beliebige orientierbare geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $M^3$  sein. Insbesondere sind also für eine simpliziale Abbildung  $f$  einer  $M^3$  auf die  $S^3$  die Originalzyklen  $\varphi(\xi)$ ,  $\varphi(\eta)$ , ... von beliebigen, im Inneren von Dreiecken von  $S^3$  liegenden Punkten  $\xi$ ,  $\eta$ , ... wohldefiniert. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis der folgenden beiden Sätze:

A. Es ist  $\varphi(\xi) \sim \varphi(\eta)$  bei beliebigen  $\xi$  und  $\eta$ ; es ist also durch  $f$  eine eindimensionale Homologiekasse  $\varphi$  in  $M^3$  ausgezeichnet.

B. Es ist dann und nur dann  $\varphi \sim 0$ , wenn  $f$  algebraisch unwesentlich ist.

Beide Sätze beruhen im wesentlichen auf dem

Hilfssatz I. Ein  $\nu$ -dimensionaler Zyklus  $Z^\nu$  in einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M^n$  ist dann und nur dann  $\sim 0$ , wenn für jedes  $m > 1$  und jeden  $(n - \nu)$ -dimensionalen Zyklus  $Z_m^{n-\nu}$  modulo  $m$  die Schnittzahl  $(Z^\nu \cdot Z_m^{n-\nu}) \equiv 0 \pmod{m}$  ist.

Beim Beweis dieses Hilfssatzes werden wir die folgende algebraische Tatsache benutzen:

Hilfssatz II. Gegeben ist eine Matrix  $u_{ij}$  und eine Zahlenreihe  $v_j$ ; die  $v_j$  sind dann und nur dann eine lineare Verbindung der  $u_{ij}$ , d. h. das Gleichungssystem

$$(1) \quad v_j = \sum_i x_i u_{ij}$$

besitzt dann und nur dann Lösungen  $x_i$ , wenn folgende Beziehung zwischen den  $u_{ij}$  und  $v_j$  besteht: ist  $m$  irgendeine Zahl  $> 1$  und sind die  $y_j$  irgendwelche Lösungen des Kongruenzsystems

$$(2) \quad \sum_i u_{ij} y_j \equiv 0 \pmod{m},$$

so ist auch stets

$$(3) \quad \sum_j v_j y_j \equiv 0 \pmod{m}.$$

(Dabei sind natürlich alle vorkommenden Größen  $u, v, x, y$  ganze Zahlen.)

Einen Beweis des Hilfssatzes II findet man in der unter <sup>5)</sup> zitierten Arbeit, wo er in ähnlichem Zusammenhang auftritt wie hier.

Beweis des Hilfssatzes I. Mit  $T$  bzw.  $\bar{T}$  werden die Zellen zweier dualer Zelleinteilungen der  $M^n$  bezeichnet. Lauten die Berandungsrelationen für die  $T^{r+1}$

$$(4) \quad \dot{T}_i^{r+1} = \sum_j u_{ij} T_j^r,$$

so lauten sie für die  $\bar{T}^{n-r}$

$$(5) \quad \dot{\bar{T}}_j^{n-r} = \sum_i u_{ij} \bar{T}_i^{n-r-1}.$$

Den Zyklus  $Z^r$  dürfen wir als aus Zellen  $T_j^r$  bestehend annehmen:

$$(6) \quad Z^r = \sum_j v_j T_j^r.$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß  $Z^r \sim 0$  ist, ist die Existenz eines  $C^{r+1} = \sum_i x_i T_i^{r+1}$  mit  $\dot{C}^{r+1} = \sum_j x_i \dot{T}_i^{r+1} = \sum_{i,j} x_i u_{ij} T_j^r = Z^r = \sum_j v_j T_j^r$ , also die Lösbarkeit des Systems (1), und somit nach Hilfssatz II die Tatsache, daß aus jedem Kongruenzsystem (2) die Kongruenz (3) folgt.

Nun hat ein Komplex  $\sum_j y_j \bar{T}_j^{n-r}$  auf Grund von (5) den Rand  $\sum_{i,j} u_{ij} y_j \bar{T}_i^{n-r-1}$ ; (2) bedeutet also, daß er ein Zyklus modulo  $m$  ist. Folglich ist die Tatsache, daß der durch (6) gegebene  $Z^r$  homolog 0 ist, gleichbedeutend damit, daß seine Koeffizienten  $v_j$  und die Koeffizienten  $y_j$  eines beliebigen, aus Zellen  $\bar{T}_j^{n-r}$  gebildeten Zyklus modulo  $m$

$$(7) \quad \bar{Z}_m^{n-r} = \sum_j y_j \bar{T}_j^{n-r}$$

die Kongruenz (3) erfüllen. Die linke Seite von (3) ist aber die Schnittzahl von  $Z^r$  und  $\bar{Z}^{n-r}$ ; denn da die Schnittzahl  $T_j^r \cdot \bar{T}_k^{n-r}$  den Wert 0 oder 1 hat, je nachdem  $j \neq k$  oder  $j = k$  ist, ist

$$Z^r \cdot \bar{Z}^{n-r} = \sum_j v_j T_j^r \cdot \sum_j y_j \bar{T}_j^{n-r} = \sum_{j,k} v_j y_k T_j^r \cdot \bar{T}_k^{n-r} = \sum_j v_j y_j.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Beweis des Satzes A. Ist  $Z_m^2$  ein Zyklus mod  $m$  in  $M^3$ , so ist der Grad mod  $m$  der Abbildung  $f(Z_m^2)$  auf  $S^2$  konstant, er hat also in zwei beliebigen Punkten  $\xi, \eta$  gleichen Wert. Nach § 1, 4. hat daher  $Z_m^2$  mit  $\varphi(\xi)$  dieselbe Schnittzahl mod  $m$  wie mit  $\varphi(\eta)$ . Der eindimensionale Zyklus  $\varphi(\xi) - \varphi(\eta)$  hat also mit jedem  $Z_m^2$  die Schnittzahl 0 mod  $m$  bei beliebigem  $m$ , er ist somit nach Hilfssatz I  $\sim 0$ .

Beweis des Satzes B. Daß  $f$  algebraisch unwesentlich ist, heißt, daß für jeden  $Z_m^2$  der Grad mod  $m$  der Abbildung  $f(Z_m^2)$  gleich 0 ist. Nach § 1, 4. bedeutet dies, daß, wenn  $\xi$  irgendein Punkt von  $S^2$  ist, die Schnittzahl von  $\varphi(\xi)$  und  $Z_m^2$  mod  $m$  verschwindet. Nach Hilfssatz I ist das dann und nur dann der Fall, wenn  $\varphi(\xi) \sim 0$  ist.

## § 7.

Die Abbildungen einer  $M^3$  auf die  $S^2$ .

Die Gültigkeit des soeben bewiesenen Satzes B ermöglicht die Übertragung der in den §§ 2 bis 4 für die Abbildungen der  $S^2$  auf die  $S^2$  entwickelten Theorie der Größe  $\gamma$  auf die algebraisch unwesentlichen Abbildungen einer beliebigen Mannigfaltigkeit  $M^3$  auf die  $S^2$ . In der Tat überzeugt man sich, wenn man die §§ 2 bis 4 durchsieht, davon, daß außer Eigenschaften, welche jeder Abbildung einer  $M^3$  auf die  $S^2$  zukommen, nur die beiden folgenden Eigenschaften B' und B'' benutzt werden, die dort darauf beruhen, daß es sich um Abbildungen der Sphäre handelt, die aber gerade den algebraisch unwesentlichen Abbildungen beliebiger Mannigfaltigkeiten eigentümlich sind:

$$(B') \quad \varphi(\xi) \sim 0; \quad (B'') \quad f(Z^2) = 0,$$

d. h. die Abbildung  $f$  jedes zweidimensionalen Zyklus aus  $M^3$  hat den Grad 0.

Es gehört also zu jeder Klasse algebraisch unwesentlicher Abbildungen einer  $M^3$  auf die  $S^2$  eine Zahl  $\gamma$ , für die unter anderem auch der Produktsatz IIb in folgender Form gilt: „Ist  $g$  eine Abbildung einer  $M_1^3$  auf eine  $M^3$  mit dem Grade  $c$ ,  $f$  eine algebraisch unwesentliche Abbildung der  $M^3$  auf die  $S^2$ , so ist auch  $fg$  algebraisch unwesentlich, und es ist  $\gamma(fg) = \gamma(f)$ .“ Dabei ist unmittelbar klar, daß aus der algebraischen Unwesentlichkeit von  $f$  die von  $fg$  folgt; denn ist  $Z_m^2$  ein Zyklus mod  $m$  in  $M_1^3$ , so ist  $\bar{Z}_m^2 = g(Z_m^2)$  ein Zyklus mod  $m$  in  $M^3$ , folglich ist

$$f(\bar{Z}_m^2) = fg(Z_m^2) = 0 \text{ mod } m$$

in  $S^2$ , d. h.  $fg$  ist algebraisch unwesentlich.

Aus diesem Produktsatz, aus der Existenz einer Abbildung  $f$  der  $S^2$  auf die  $S^2$  mit  $\gamma(f) = 1$ , die als Abbildung der  $S^2$  a fortiori algebraisch unwesentlich ist, und aus der Tatsache, daß man jede  $M^3$  mit beliebigem Grade  $c$  auf die  $S^2$  abbilden kann, ergibt sich Satz III.

Zum Schluß sei nur noch bezüglich der Abbildungen der *nicht-orientierbaren* Mannigfaltigkeiten auf die  $S^2$  bemerkt, daß alles Vorstehende unverändert seine Gültigkeit behält, wenn man sich darauf beschränkt, die Größe  $\gamma \bmod 2$  zu erklären. Infolgedessen gilt

**Satz III'.** *Die algebraisch unwesentlichen Abbildungen einer beliebigen nicht-orientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeit auf die  $S^2$  bilden wenigstens zwei Klassen; es gibt unter diesen Abbildungen also immer topologisch wesentliche.*

#### Anhang.

#### Über die topologische und die algebraische Wesentlichkeit von Abbildungen.

Wir knüpfen unmittelbar an den Wortlaut der Einleitung an.

1. Beweis des Satzes V. Es ist trivial, daß die Abbildung  $f$  topologisch wesentlich ist, wenn sie algebraisch wesentlich ist. Sie sei algebraisch unwesentlich. Die Winkelkoordinate  $w$  auf  $S^1$  ist nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmt; für einen festen Punkt  $x_0$  von  $A$  zeichnen wir einen der zu  $f(x_0)$  gehörigen Werte willkürlich aus und nennen ihn  $w = F(x_0)$ . Diese Funktion  $F$  setzen wir auf den von  $x_0$  ausgehenden Wegen stetig so fort, daß immer  $F(x)$  einer der Werte von  $w$  im Punkte  $f(x)$  ist. Dabei gelangt man auf verschiedenen Wegen  $W_1, W_2$ , die denselben Endpunkt  $y$  haben, immer zu demselben Wert  $F(y)$ ; denn käme man zu verschiedenen Werten  $F_1(y), F_2(y)$ , so wäre

$$F_1(y) - F_2(y) = k \cdot 2\pi, \quad k \neq 0;$$

bei Durchlaufung des von  $y$  nach  $y$  zurückführenden geschlossenen Weges  $Z^1 = W_2^{-1}W_1$  würde sich die Winkelkoordinate des Bildpunktes um  $k \cdot 2\pi$  ändern, d. h. der Zyklus  $Z^1$  würde mit dem Grade  $k \neq 0$  auf  $S^1$  abgebildet,  $f$  wäre algebraisch wesentlich, entgegen der Voraussetzung. Mithin läßt sich  $F$  in der Tat eindeutig und stetig auf  $A$  erklären. Ist nun  $t$  ein von 1 bis 0 laufender Parameter, so wird durch  $w = tF(x)$  eine Schar von Abbildungen  $f_t$  von  $A$  auf  $S^1$  erklärt, durch welche  $f = f_1$  stetig in die Abbildung  $f_0$  auf einen einzigen Punkt von  $S^1$  übergeht. Folglich ist  $f$  topologisch unwesentlich.

2. Beweis des Satzes IVa. Es ist trivial, daß sich  $A^a$  nicht (algebraisch) wesentlich abbilden läßt, wenn in  $A^a$  kein  $a$ -dimensionaler Zyklus modulo einer Zahl  $m > 1$  vorhanden ist. Es sei  $Z_m^a$  ein solcher Zyklus  $\bmod m$  in  $A^a$ ,  $T^a$  ein  $a$ -dimensionales Simplex von  $Z_m^a$ , das in  $Z_m^a$  mit einem Koeffizienten  $c$  vorkommt, der  $\not\equiv 0 \bmod m$  ist. Man bilde den Rand von  $T^a$  und alle nicht zu  $T^a$  gehörigen Punkte von  $A^a$  auf einen



festen Punkt  $\xi$  von  $S^a$ , das Innere von  $T^a$  eindeutig auf  $S^a - \xi$  ab. Diese Abbildung  $f(A^a)$  bewirkt eine Abbildung  $f(Z_m^a)$ , deren Grad mod  $m$   $c \not\equiv 0$  ist;  $f$  ist daher (algebraisch) wesentlich.

3. Dem Beweis des Satzes VI schicken wir einige Bemerkungen über die im Satz VI ausgesprochene Bedingung voraus. Wir wollen sagen, daß  $A^a$  die „Eigenschaft  $E^b$ “ hat, wenn entweder  $p^b > 0$  oder  $(b-1)$ -te Torsion vorhanden (oder wenn beides der Fall) ist.  $Z^b \approx 0$  soll, wie üblich, bedeuten, daß der Zyklus  $Z^b$  ein „Randteiler“ ist, d. h. daß es eine Zahl  $c > 0$  gibt, so daß  $cZ^b$  ein Rand, also  $cZ^b \sim 0$  ist; analog soll „ $Z_m^b \approx 0$  mod  $m$ “ bedeuten, daß der Zyklus mod  $m$   $Z_m^b$  einem Randteiler kongruent mod  $m$  ist, d. h. daß es einen Komplex  $K^b$  gibt, so daß  $Z_m^b + mK^b \approx 0$  ist.

Wir behaupten nun:  $A^a$  hat dann und nur dann die Eigenschaft  $E^b$ , wenn es ein  $m > 1$  und in  $A^a$  einen Zyklus mod  $m$   $Z_m^b$  gibt, der  $\not\approx 0$  mod  $m$  ist.

Beweis. I. Es gebe in  $A^a$  einen  $Z_m^b$ , der  $\not\approx 0$  mod  $m$  ist; es ist  $Z_m^b = mK^{b-1}$ ;  $mK^{b-1}$  ist als Rand ein Zyklus, also ist auch  $K^{b-1} = Z^{b-1}$  Zyklus, und es ist  $mZ^{b-1} \sim 0$ . Ist  $Z^{b-1} \not\sim 0$ , so ist  $Z^{b-1}$  Randteiler, ohne Rand zu sein, es ist also  $(b-1)$ -dimensionale Torsion vorhanden; ist  $Z^{b-1} \sim 0$ , so gibt es einen Komplex  $C^b$  mit  $C^b = Z^{b-1}$ ; dann ist  $(Z_m^b - mC^b) = 0$ , also  $Z_m^b - mC^b = Z^b$  ein Zyklus; da  $Z_m^b \not\approx 0$  mod  $m$  ist, ist  $Z^b \not\approx 0$ , folglich ist  $p^b > 0$ .

II. Wenn  $p^b > 0$  ist, so nehmen wir einen Zyklus  $Z^b$ , der in einer Homologiebasis enthalten ist, der also die Eigenschaft hat, daß sich jeder Zyklus  $Z^b$  auf eine und nur eine Weise in der Form  $Z^b \approx cZ^b + \sum_i c_i Z_i^b$  darstellen läßt, wobei die  $Z_i^b$  die übrigen Basiselemente sind.  $Z^b$  ist zugleich für jedes  $m$  ein Zyklus mod  $m$ ; wir behaupten, daß er  $\not\approx 0$  mod  $m$  für jedes  $m$  ist. Andernfalls wäre nämlich  $Z^b = \bar{Z}^b + mK^b$ , wobei  $\bar{Z}^b$  Zyklus und  $\approx 0$  wäre; es wäre also auch  $mK^b$  und mithin  $K^b = Z^b$  Zyklus und  $Z^b \approx m\bar{Z}^b$ ; da  $Z^b \approx cZ^b + \dots$  ist, wäre  $mc = 1$ , was wegen  $m > 1$  unmöglich ist; folglich ist  $Z^b \not\approx 0$  mod  $m$  bei beliebigem  $m$ . — Wenn  $(b-1)$ -te Torsion vorhanden ist, so gibt es einen  $(b-1)$ -dimensionalen Zyklus, der Randteiler, aber nicht Rand ist:  $Z^{b-1} \not\sim 0$ ,  $mZ^{b-1} = \bar{C}^b$ ,  $m > 1$ ; dann ist  $C^b = Z_m^b$  ein Zyklus mod  $m$ ; wir behaupten, daß er  $\not\approx 0$  mod  $m$  ist. Andernfalls wäre nämlich

$$Z_m^b = Z^b + mK^b, \quad (Z^b \approx 0), \quad Z_m^b = mZ^{b-1} = mK^b, \quad Z^{b-1} = K^b,$$

also  $Z^{b-1} \sim 0$ .

Damit ist gezeigt, daß die Eigenschaft  $E^b$  mit der Existenz eines  $Z_m^b$ , der  $\not\approx 0$  mod  $m$  ist, zusammenfällt. Ist  $b = a$ , so ist  $Z_m^b \approx 0$  mod  $m$  gleichbedeutend mit  $Z_m^b = 0$ ; folglich ist die Eigenschaft  $E^a$  mit der Existenz



eines  $Z_m^a$ , also mit  $p_m^a > 0$  für irgendein  $m$  identisch. Ist  $b = 1$ , so ist  $E^1$ , da es 0-dimensionale Torsion nicht gibt, identisch mit der Bedingung  $p^1 > 0$ .

4. Beweis des Satzes VI. Ist  $f$  eine algebraisch wesentliche Abbildung von  $A^a$  auf  $S^b$ , so gibt es ein  $m$  und einen  $Z_m^b$  in  $A^a$ , dessen Bild  $f(Z_m^b) \not\equiv 0 \pmod{m}$  ist. Dieser  $Z_m^b$  kann nicht  $\approx 0 \pmod{m}$  sein, weil sonst auch sein Bild  $\approx 0 \pmod{m}$  in  $S^b$ , also  $\equiv 0 \pmod{m}$  wäre.  $A^a$  hat daher nach 3. die Eigenschaft  $E^b$ .

5. Beweis des Satzes VII. Der in dem Wortlaut des Satzes erwähnte Fall  $b = a$  ist auf Grund der Schlußbemerkung von 3. in dem Satz IVa enthalten, also bereits erledigt; ebenso ist der ebenfalls erwähnte Fall  $b = 1$  auf Grund der Schlußbemerkung von 3. in Va enthalten und wird mit diesem erledigt werden. Jetzt beschäftigt uns also nur der Fall  $b = a - 1$ ; wir setzen daher voraus, daß  $A^a$  die Eigenschaft  $E^{a-1}$  besitzt.

$\mathfrak{L}$  sei die Gruppe aller Linearformen in den  $(a-1)$ -dimensionalen Simplex  $T_j^{a-1}$  von  $A^a$ , also die Gruppe aller  $(a-1)$ -dimensionalen Teilkomplexe von  $A^a$  in der fest gegebenen Triangulation;  $\mathfrak{R}$  sei diejenige Untergruppe von  $\mathfrak{L}$ , die von allen  $(a-1)$ -dimensionalen Rändern und Randteilern gebildet wird; da  $\mathfrak{R}$  die Eigenschaft hat, daß, sobald ein Vielfaches eines Elements von  $\mathfrak{L}$  zu  $\mathfrak{R}$  gehört, stets auch das Element selbst zu  $\mathfrak{R}$  gehört, besitzt die Faktorgruppe  $\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}$  nur Elemente unendlicher Ordnung, und da sie eine von endlich vielen ihrer Elemente erzeugte Abelsche Gruppe ist (weil  $\mathfrak{L}$  diese Eigenschaft hat), besitzt sie eine Basis  $F_1, F_2, \dots, F_p$  der Art, daß sich jedes Element von  $\mathfrak{F}$  auf eine und nur eine Weise als lineare Verbindung der  $F_i$  darstellen läßt.

Infolge der Eigenschaft  $E^{a-1}$  gibt es ein  $m > 1$  und einen Zyklus mod  $m$   $Z_m^{a-1}$ , der  $\not\approx 0 \pmod{m}$  ist; die Restklasse modulo  $\mathfrak{R}$ , der er angehört, werde durch das Element  $\sum c_i F_i$  von  $\mathfrak{F}$  repräsentiert; diese Restklasse enthält nicht das  $m$ -fache eines Elements von  $\mathfrak{L}$ , weil sonst  $Z_m^{a-1} \approx 0 \pmod{m}$  wäre; folglich ist das Element  $\sum c_i F_i$  nicht das  $m$ -fache eines anderen Elements von  $\mathfrak{F}$ , und daher ist infolge der Einzigkeit der Darstellung  $\sum c_i F_i$  wenigstens einer der Koeffizienten  $c_i$  nicht durch  $m$  teilbar ist; das sei etwa  $c_1$ .

Durch die Restklassenzerlegung modulo  $\mathfrak{R}$  ist die Gruppe  $\mathfrak{L}$  homomorph auf die Gruppe  $\mathfrak{F}$  abgebildet; wir bilden weiter  $\mathfrak{F}$  homomorph auf die additive Gruppe der ganzen Zahlen ab, indem wir jedem Element  $\sum y_i F_i$  von  $\mathfrak{F}$  die Zahl  $y_1$  zuordnen; beide Homomorphismen zusammen ergeben eine homomorphe Abbildung  $H$  von  $\mathfrak{L}$  auf die ganzen Zahlen; dabei ist insbesondere

$$(1) \quad H(Z_m^{a-1}) = c_1, \quad c_1 \not\equiv 0 \pmod{m},$$

$$(2) \quad H(R^{a-1}) = 0 \quad \text{für jeden Rand oder Randteiler } R^{a-1}.$$

Ferner sei für die Simplexe  $T_j^{a-1}$

$$(3) \quad H(T_j^{a-1}) = x_j.$$

Die Berandungsrelationen für die  $a$ -dimensionalen Simplexe  $T_i^a$  seien

$$(4) \quad \dot{T}_i^a = \sum u_{ij} T_j^{a-1};$$

dann ist nach (3), da  $H$  ein Homomorphismus ist,  $H(\dot{T}_i^a) = \sum u_{ij} x_j$ , und nach (2), da  $\dot{T}_i^a$  ein Rand  $R^{a-1}$  ist,

$$(5) \quad \sum u_{ij} x_j = 0.$$

$Z_m^{a-1}$  sei durch

$$(6) \quad Z_m^{a-1} = \sum v_j T_j^{a-1}$$

gegeben; dann folgt aus (3) und (1)

$$(7) \quad \sum v_j x_j = c_1 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Wir definieren nun zunächst folgende Abbildung  $f$  des aus allen  $T_j^{a-1}$  bestehenden  $(a-1)$ -dimensionalen Teilkomplexes  $A^{a-1}$  von  $A^a$  auf die  $S^{a-1}$ : Alle  $(a-2)$ -dimensionalen Randsimplexe der  $T_j^{a-1}$  werden auf einen festen Punkt  $\xi$  von  $S^{a-1}$  abgebildet; das Innere jedes  $T_j^{a-1}$  wird so auf  $S^{a-1}$  abgebildet, daß die Abbildung  $f(T_j^{a-1})$  den Grad  $x_j$  hat; das kann man z. B. dadurch erreichen, daß man in  $T_j^{a-1}$   $|x_j|$  zueinander fremde Simplexe  $t_1^{a-1}, t_2^{a-1}, \dots, t_{|x_j|}^{a-1}$  wählt, jedes von ihnen so auf  $S^{a-1}$  abbildet, daß der Rand in  $\xi$  übergeht und die Abbildung in  $t_r^{a-1}$  im übrigen eineindeutig vom Grade  $+1$  oder  $-1$  ist, je nachdem  $x_j$  positiv oder negativ ist, und schließlich auch  $T_j^{a-1} - \sum t_r^{a-1}$  auf den Punkt  $\xi$  abbildet. Diese Abbildung  $f(A^{a-1})$  läßt sich zu einer Abbildung des ganzen Komplexes  $A^a$  erweitern. Denn infolge von (4) und (5) wird die Randsphäre  $S_i^{a-1} = \dot{T}_i^a$  jedes Simplexes  $T_i^a$  mit dem Grade 0 abgebildet, und eine solche Abbildung von  $S_i^{a-1}$  auf  $S^{a-1}$  läßt sich immer folgendermaßen zu einer Abbildung des  $T_i^a$  erweitern: da der Grad 0 ist, gibt es eine Abbildungsschar  $f_r(S_i^{a-1})$  der  $S_i^{a-1}$  auf  $S^{a-1}$  mit  $f_1 = f$  und  $f_0(S_i^{a-1}) = \xi$ , wobei wieder  $\xi$  ein fester Punkt von  $S^{a-1}$  ist ( $1 \leq r \leq 1$ )<sup>14)</sup>;  $x_0$  sei ein fester innerer Punkt von  $T_i^a$ ; ist  $x = x_i$  irgendein Punkt auf  $S_i^{a-1}$ ,  $x_r$  der Punkt der Strecke  $x_0 x_i$ , der diese im Verhältnis  $r:1-r$  teilt, so wird  $f(T_i^a)$  durch  $f(x_r) = f_r(x)$  bestimmt.

Bei der so definierten Abbildung  $f(A^a)$  ist der modulo  $m$  bestimmte Grad, mit dem  $Z_m^{a-1}$  abgebildet wird, infolge von (6) und (7)  $c_1 \equiv 0 \pmod{m}$ ; das bedeutet, daß  $f(A^a)$  algebraisch wesentlich ist.

Aus dem Beweis ergibt sich, daß man zu dem Satz VII noch folgenden Zusatz machen kann: Hat  $A^a$  die Eigenschaft  $E^{a-1}$ , und ist  $Z^{a-1}$  ein

<sup>14)</sup> Einen Beweis dieser Tatsache (die übrigens ein Spezialfall von Satz IV ist), findet man in meiner unter <sup>1)</sup> zitierten Arbeit.

gewöhnlicher Zyklus bzw.  $Z_m^{a-1}$  irgendein Zyklus mod  $m$ , der  $\not\approx 0$  bzw.  $\not\approx 0 \bmod m$  ist, so kann man  $A^a$  auf die  $S^{a-1}$  so abbilden, daß gerade dieser  $Z^{a-1}$  bzw.  $Z_m^{a-1}$  algebraisch wesentlich abgebildet wird. (Die analogen Zusätze lassen sich, wie sich aus den Beweisen ergibt, übrigens auch zu den Sätzen IVa und Va machen.)

6. Beweis des Satzes Va. Die Bedingung  $p^1 > 0$  ist nach der Schlußbemerkung von 3. mit der Bedingung  $E^1$  identisch. Daß sie notwendig für die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit von  $A^a$  auf den Kreis  $S^1$  ist, ist daher in Satz VI enthalten; wir haben zu zeigen, daß sie hinreicht. Für  $a = 1$  ist das der Fall, da sie dann, wie aus dem Schluß von 3. hervorgeht, mit der Bedingung des Satzes IVa zusammenfällt. Ebenso ist für  $a = 2$  die Behauptung schon im Satz VII enthalten. Es sei also  $a \geq 3$ ; wir dürfen annehmen, daß die Behauptung für die Dimensionszahl  $a - 1$  schon bewiesen sei, und zwar in der dem Zusatz zu Satz VII entsprechenden schärferen Fassung, daß ein vorgegebener  $Z^1$ , der  $\not\approx 0$  ist, wesentlich abgebildet wird. Nun sei  $Z^1$  ein Zyklus in  $A^a$ , der  $\not\approx 0$  ist;  $A^{a-1}$  sei der Komplex der  $(a - 1)$ -dimensionalen Simplexe  $T_j^{a-1}$  von  $A^a$ ; dann liegt  $Z^1$  in  $A^{a-1}$  und ist dort erst recht  $\not\approx 0$ . Also kann man  $A^{a-1}$  so auf den Kreis  $S^1$  abbilden, daß  $Z^1$  wesentlich abgebildet wird. Die Aufgabe ist nun, analog wie in dem Beweis des vorigen Satzes, für jedes einzelne Simplex  $T_i^a$  die auf seinem Rande  $S_i^{a-1} = \bar{T}_i^a$  schon definierte Abbildung  $f$  auf ganz  $T_i^a$  auszudehnen; genau wie vorhin ist diese Aufgabe gelöst, falls man die Abbildung  $f(S_i^{a-1})$  auf  $S^1$  stetig in eine Abbildung auf einen einzigen Punkt überführen kann. Diese Überführung ist möglich, da  $S_i^{a-1}$  eine wenigstens zweidimensionale Sphäre und jede ihrer Abbildungen auf einen Kreis daher topologisch unwesentlich ist, wie schon in der Einleitung (im Anschluß an die Formulierung des Satzes Ia) gezeigt wurde, und wie es überdies in den Sätzen V und VI enthalten ist. Mithin läßt sich  $f(A^a)$  in der gewünschten Weise konstruieren.

7. Beweis des Satzes VIII.  $A^4$  sei die Mannigfaltigkeit der komplexen Punkte der projektiven Ebene<sup>15)</sup>. Ihre zweite Bettische Zahl ist  $p^2 = 1$ ; bezeichnen wir mit  $z_1, z_2, z_3$  die Koordinaten in  $A^4$ , so definiert die Gleichung  $z_3 = 0$  eine zweidimensionale Kugel  $A^2$ , die eine Basis der zweidimensionalen Homologien ist; d. h. jeder Zyklus  $Z^2$  aus  $A^4$  genügt einer Homologie  $Z^2 \sim a \cdot A^2$ . Ist  $f$  eine Abbildung von  $A^4$  auf sich, so ist  $f(A^2)$  selbst ein  $Z^2$  in  $A^4$ , also gehört zu  $f$  eine Zahl  $u$ , die durch  $f(A^2) \sim u \cdot A^2$  definiert ist; es gilt der Satz, daß dann  $f$  den Grad  $u^2$  hat<sup>16)</sup>.

<sup>15)</sup> Eine Darstellung der einfachsten topologischen Eigenschaften von  $A^4$  findet man im „Anhang II“ der unter \*) zitierten Arbeit von van der Waerden.

<sup>16)</sup> § 5 der unter \*) zitierten Arbeit.

Liegt nun eine Abbildung von  $A^4$  auf eine  $S^2$  vor, so können wir diese  $S^2$  durch die eben beschriebene  $A^2$  realisieren; die Abbildung ist dann eine Abbildung von  $A^4$  auf sich, die den Grad 0 hat, da nur ein echter Teil von  $A^4$  durch die Bildmenge bedeckt wird. Folglich ist nach dem eben genannten Satz auch  $u = 0$ , also  $f(A^2) \sim 0$  in  $A^4$ , d. h.  $f(A^2) = 0$  auf  $S^2$ . Ist  $Z^2$  irgendein Zyklus von  $A^4$ , so ist  $Z^2 \sim a \cdot A^2$ , mithin  $f(Z^2) = a \cdot f(A^2) = 0$  auf  $S^2$ , d. h.  $f$  ist algebraisch unwesentlich.

8. Schließlich sei für den Satz Ia noch ein Beweis angegeben, der auf den Sätzen VII und VIII beruht und von dem in den §§ 1 bis 5 enthaltenen Beweis völlig verschieden ist:  $A^4$  und  $A^2$  haben dieselben Bedeutungen wie in 7.,  $A^2$  bezeichne den Komplex der dreidimensionalen Simplexe  $T_j^2$  einer bestimmten Zerlegung von  $A^4$ ; dann kann man  $A^2$  als in  $A^3$  liegend annehmen, und dort ist  $A^2$  erst recht  $\neq 0$ . Daher kann man nach dem Zusatz zu Satz VII  $A^2$  so auf die  $S^2$  abbilden, daß dabei  $A^2$  algebraisch wesentlich abgebildet wird. Diese Abbildung  $f$  läßt sich auf Grund von Satz VIII aber nicht zu einer Abbildung  $f(A^4)$  erweitern. Folglich gibt es unter den vierdimensionalen Simplexen  $T_i^4$  von  $A^4$  wenigstens eines, etwa  $T_1^4$ , so daß sich die auf dem Rand  $T_1^4 = S_1^3$  erklärte Abbildung  $f$  nicht auf ganz  $T_1^4$  ausdehnen läßt; daraus folgt, daß die Abbildung  $f(S_1^3)$  auf die  $S^2$  topologisch wesentlich ist, da andernfalls die Ausdehnung von  $f$  auf  $T_1^4$  nach dem im Beweise von Satz VII angewandten Verfahren vorgenommen werden könnte. Damit ist ein indirekter Beweis des Satzes Ia geliefert.

Hain im Riesengebirge, September 1930.

(Eingegangen am 30. 9. 1930.)

## Über die Axiome des metrischen Raumes.

Von

V. Niemytzki in Moskau.

Die vorliegende Arbeit ist der Untersuchung der Beziehungen zwischen den drei bekannten Axiomen des metrischen Raumes<sup>1)</sup> gewidmet. Um diese Untersuchung führen zu können, müssen wir Räume betrachten, in die sich Entfernungen einführen lassen, die nur einem Teil der Axiome des metrischen Raumes genügen. Dies geschieht mit Hilfe folgender Definitionen:

Definition I. Es sei  $R$  ein topologischer Raum<sup>2)</sup>, in dem sich eine Funktion  $\varrho(x, y) \geq 0$  („eine Entfernungsfunktion“) so definieren läßt, daß ein Punkt  $x$  dann und nur dann der abgeschlossenen Hülle  $\bar{M}$  einer beliebigen Punktmenge  $M \subset R$  angehört, wenn die Entfernung  $\varrho(x, M)$ <sup>3)</sup> zwischen  $x$  und  $M$  Null ist. Unter dieser Bedingung nennt man den topologischen Raum  $R$  im weiteren Sinne metrisierbar.

Es sei dabei bemerkt, daß jede solche Entfernungsfunktion  $\varrho(x, y)$  (jede *Metrik des gegebenen topologischen Raumes*) von selbst dem *Identitätsaxiom* genügt, d. h. es ist  $\varrho(x, y)$  dann und nur dann Null, wenn die Punkte  $x$  und  $y$  zusammenfallen.

Definition II. Ein im weiteren Sinne metrisierbarer topologischer Raum heißt *symmetrisch*, wenn man ihn so metrisieren kann, daß

$$(1) \quad \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$$

ist.

Definition III. Ein im weiteren Sinne metrisierbarer topologischer Raum heißt ein  $\Delta$ -Raum, wenn man ihn so metrisieren kann, daß bei

<sup>1)</sup> Hausdorff, Mengenlehre (Berlin 1927), S. 94.

<sup>2)</sup> Wir verstehen unter einem topologischen Raum stets einen solchen im Sinne Hausdorffs (Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 213).

<sup>3)</sup>  $\varrho(x, M)$  ist definitionsgemäß die untere Grenze von  $\varrho(x, y)$ , wenn  $y$  die ganze Menge  $M$  durchläuft.

jeder Wahl der Punkte  $x, y, z$

$$(2) \quad \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$$

ist.

**Definition IV.** Ein im weiteren Sinne metrisierbarer topologischer Raum heißt *im engeren Sinne metrisierbar*, wenn man ihn so metrisieren kann, daß die Entfernungsfunktion  $\varrho(x, y)$  der Gesamtheit der beiden Bedingungen (1) und (2) genügt.

**Bemerkung.** Ein topologischer Raum, welcher gleichzeitig ein symmetrischer Raum und ein  $\triangle$ -Raum ist, braucht noch nicht im engeren Sinne metrisierbar zu sein (die der Bedingung (1) genügende Entfernungsfunktion braucht ja nicht mit derjenigen identisch zu sein, die der Bedingung (2) genügt).

**Satz I.** Ein topologischer Raum ist dann und nur dann im weiteren Sinne metrisierbar, wenn er dem I. Abzählbarkeitsaxiom genügt.

**Beweis.** Wenn in  $R$  eine Metrik definiert ist, so wähle man für jeden Punkt  $a$  von  $R$  als  $m$ -te Umgebung die offene Menge

$$U_m(a) = R - \overline{R - S\left(a, \frac{1}{m}\right)}. \quad ^4)$$

Wenn umgekehrt in  $R$  das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist und für jeden Punkt  $a$  ein vollständiges abzählbares Umgebungssystem

$$U_1(a) > U_2(a) > \dots > U_n(a) > \dots$$

gewählt ist, so setze man  $\varrho(x, y) = 2$ , wenn  $y$  zu  $U_1(x)$  fremd ist, und  $\varrho(x, y) = \frac{1}{m}$ , wenn  $m$  die größte Zahl von der Beschaffenheit ist, daß  $y$  in  $U_m(x)$  liegt.

Bereits unter den kompakten topologischen Räumen gibt es solche, welche im weiteren Sinne metrisierbar sind, obgleich sie weder symmetrische noch  $\triangle$ -Räume sind. Als Beispiel hiervon kann der Raum  $T_Q$  dienen, der aus allen Ordnungszahlen  $\alpha < Q$  aufgebaut ist, mit folgender Umgebungserklärung: Wenn  $\beta$  irgendeine Ordnungszahl  $< \alpha$  ist, so soll die Umgebung  $U_\beta(\alpha)$  aus allen Ordnungszahlen bestehen, die größer als  $\beta$  und höchstens so groß wie  $\alpha$  sind<sup>5)</sup>.

<sup>4)</sup> Wobei wie immer  $S(a, r)$  die Gesamtheit aller Punkte  $x$  bezeichnet, für welche  $\varrho(a, x) < r$  ist.

<sup>5)</sup> Daß  $T_Q$  im weiteren Sinne metrisierbar ist, folgt vermöge des Satzes I aus dem I. Abzählbarkeitsaxiom (welches für diesen Raum gilt). Da  $T_Q$  überdies kompakt ist, jedoch nicht dem II. Abzählbarkeitsaxiom genügt, kann er nicht im engeren Sinne metrisierbar sein, woraus auf Grund der Sätze II und III folgt, daß  $T_Q$  weder ein symmetrischer noch ein  $\triangle$ -Raum ist.

Um so interessanter dürfte die Tatsache sein, daß jeder kompakte symmetrische ebenso wie jeder kompakte  $\triangle$ -Raum metrisierbar im engeren Sinne ist.

Satz II. Ein symmetrischer kompakter Raum ist im engeren Sinne metrisierbar.

Hilfssatz. Jeder symmetrische kompakte Raum ist bikompakt<sup>6)</sup>.

Beweis. Es sei im Gegenteil

$$F_1 > F_2 > \dots > F_n > \dots > F_\infty > \dots > F_\alpha > \dots, \quad \text{II } F_\alpha = 0, \quad F_\alpha + F_{\alpha+1},$$

eine nicht abzählbare Folge abgeschlossener Mengen. Man bezeichne durch  $L_\alpha$  die nicht leeren Menge  $F_\alpha - F_{\alpha+1}$  und durch  $r_\alpha$  die obere Grenze von  $\varrho(x, F_{\alpha+1})$ , wobei  $x$  die Menge  $L_\alpha$  durchläuft. Die Gesamtheit aller  $L_\alpha$  zerfällt in abzählbar viele Klassen, wobei die  $n$ -te Klasse aus allen  $L_\alpha$  besteht, für welche  $\frac{1}{2^{n-1}} > r_\alpha \geq \frac{1}{2^n}$  ist. Da es unabzählbar viele  $L_\alpha$  gibt, gibt es mindestens eine Klasse, etwa die  $n$ -te, die unabzählbar viele  $L_\alpha$  enthält. Man wähle eine beliebige abzählbare Folge

$$L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}, \dots, L_{\alpha_k}, \dots \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \dots)$$

unter den Mengen dieser Klasse und betrachte die  $F_{\alpha_k}$  mit entsprechenden Indizes, d. h. die Mengen

$$F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_k}, \dots$$

$F_{\alpha_k}$  enthält mindestens einen Punkt  $x_k$ , so daß

$$(3) \quad \varrho(x_k, F_{\alpha_{k+1}}) \geq \frac{1}{2^n}$$

ist. Da unser Raum kompakt ist, gibt es einen Häufungspunkt  $x$  der Folge  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ . Dieser Häufungspunkt gehört notwendig zu dem Durchschnitt aller  $F_{\alpha_k}$ ; aus der Ungleichung (3) folgt ferner vermöge der Symmetrieeigenschaft von  $\varrho(x, y)$ , daß für jedes  $k$

$$\varrho(x, x_k) \geq \frac{1}{2^n}$$

ist, was unmöglich ist, denn  $x$  ist ja ein Häufungspunkt der Folge der  $x_k$ .

Beweis des Satzes II. Es sei ein symmetrischer kompakter Raum  $R$  gegeben. Da nach dem Hilfssatz I  $R$  bikompakt, also regulär<sup>7)</sup> ist, gibt es zu jedem Punkt  $x$  und jedem  $n$  eine offene Umgebung  $V_n(x)$  derart, daß

$$\bar{V}_n(x) \subset S\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

ist.

<sup>6)</sup> Siehe über bikompakte Räume Alexandroff und Urysohn, Math. Annalen 92 (1924), S. 258 u. f.

<sup>7)</sup> A. a. O. <sup>6)</sup>, S. 263.



Aus der Gesamtheit der (für sämtliche Punkte  $x$  von  $R$  konstruierten)  $V_n(x)$  kann man vermöge des Borel-Lebesgueschen Satzes eine endliche Überdeckung  $\Pi_n$  auswählen. Wenn man dies für jedes  $n$  tut, erhält man die Überdeckungsfolge

$$\Pi_1: V_1(x_1^1), V_1(x_1^2), \dots, V_1(x_1^{k_1});$$

$$\Pi_2: V_2(x_2^1), V_2(x_2^2), \dots, V_2(x_2^{k_2});$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Pi_n: V_n(x_n^1), V_n(x_n^2), \dots, V_n(x_n^{k_n}).$$

$$\dots \dots \dots$$

Das System aller offenen Mengen  $V_n(x_n^i)$  ergänze man durch sämtliche Durchschnittsmengen von je endlich vielen unter diesen offenen Mengen. Das so gewonnene Mengensystem bezeichnen wir mit  $\mathfrak{S}$ . Da das Mengensystem  $\mathfrak{S}$  abzählbar, und jeder kompakte topologische Raum mit abzählbarer Basis metrisierbar im engeren Sinne ist<sup>\*)</sup>, genügt es zu zeigen, daß  $\mathfrak{S}$  eine Basis des Raumes  $R$  ist.

Nehmen wir das Gegenteil an! Dann gibt es eine feste offene Menge  $G$  und in ihr einen Punkt  $x$  derart, daß für jede den Punkt  $x$  enthaltende Menge  $\Gamma$  aus  $\mathfrak{S}$ , die Menge  $\Gamma - G$ , also erst recht die abgeschlossene Menge  $\Phi = \bar{\Gamma} - G$  nicht leer ist. Da, wie leicht ersichtlich, der Durchschnitt von je endlich vielen Mengen  $\Phi$  wieder eine Menge  $\Phi$ , also von Null verschieden ist, ist der Durchschnitt *aller* Mengen  $\Phi$  nicht leer. Daraus folgt aber, daß es einen von  $x$  verschiedenen Punkt  $y$  gibt, welcher zu der abgeschlossenen Hülle einer beliebigen den Punkt  $x$  enthaltenden Menge  $V_n(x_n^i)$  gehört. Diese letzte Behauptung soll nun zu einem Widerspruch geführt werden. Man wähle zu diesem Zweck für jedes  $n$  ein  $V_n(x_n^{i_n})$ , zu welchem  $x$  gehört. Da

$$\bar{V}_n(x_n^{i_n}) \subset S\left(x_n^{i_n}, \frac{1}{n}\right),$$

also  $\varrho(x_n^{i_n}, x) = \varrho(x, x_n^{i_n}) < \frac{1}{n}$  ist, konvergieren die  $x_n^{i_n}$  gegen  $x$ ; infolgedessen gibt es ein so großes  $N$ , daß für alle hinreichend großen  $n$

$$\varrho(y, x_n^{i_n}) > \frac{1}{N}$$

ist; wenn also  $n$  so groß und überdies größer als  $N$  ist, ist  $\varrho(y, x_n^{i_n}) > \frac{1}{n}$ , so daß  $x$  nicht in  $S\left(x_n^{i_n}, \frac{1}{n}\right)$ , also erst recht nicht in  $\bar{V}_n(x_n^{i_n})$  liegen kann, w. z. b. w.

Im Falle der nicht kompakten Räume trifft die Behauptung des Satzes II nicht zu, da es symmetrische nicht im engeren Sinne metrisier-

<sup>\*)</sup> Siehe Urysohn, Math. Annalen 92, S. 275 und (viel einfacher bewiesen) Math. Annalen 94 (1925), S. 309.

bare Räume gibt. Wir wollen sogar ein Beispiel eines regulären symmetrischen nicht im engeren Sinne metrisierbaren Raumes geben.

Der Raum  $R$  besteht aus allen Punkten der Halbebene  $y \geq 0$ . Wenn  $z = (x, y)$ ,  $y > 0$  ist, so ist  $U(z)$  eine beliebige offene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in  $z$ ; wenn  $z = (x, y)$ ,  $y = 0$  ist, so besteht  $U(z)$  aus  $z$  und allen inneren Punkten einer beliebigen Kreisscheibe, die die  $x$ -Achse in  $z$  von oben berührt. Der Raum  $R$  ist nicht metrisierbar (man überzeugt sich leicht, daß er nicht einmal normal ist). Eine symmetrische Entfernung  $\varrho(z_1, z_2)$  kann man dagegen wie folgt einführen:

1. Wenn keiner der beiden Punkte zur  $x$ -Achse gehört, sei  $\varrho(z_1, z_2)$  mit der gewöhnlichen Entfernung dieser beiden Punkte identisch;

2. wenn die beiden Punkte  $z_1$  und  $z_2$  auf der  $x$ -Achse liegen, sei  $\varrho(z_1, z_2) = 1$ ;

3. wenn  $z_1$ , aber nicht  $z_2$  zur  $x$ -Achse gehört, setzen wir  $\varrho(z_1, z_2) = r$ , wo  $r$  der Radius des durch  $z_2$  gehenden, die  $x$ -Achse in  $z_1$  berührenden Kreises ist.

**Satz III.** *Jeder kompakte  $\triangle$ -Raum ist im engeren Sinne metrisierbar.*

**Hilfssatz.** Genügt eine Punktfolge  $\{x_n\}$  eines  $\triangle$ -Raumes der Bedingung  $\lim \varrho(x_n, x) = 0$ , so hat sie keinen von  $x$  verschiedenen Häufungspunkt.

**Beweis des Hilfssatzes.** Nehmen wir im Gegenteil an,  $\{x_n\}$  habe einen von  $x$  verschiedenen Häufungspunkt  $y$ . Sei  $\varrho(y, x) = r$ . Wir wählen aus  $\{x_n\}$  eine gegen  $y$  konvergierende Teilfolge  $\{x_{n_i}\}$ . Wir haben dann

$$\lim (y, x_{n_i}) = 0, \quad \lim (x_{n_i}, x) = 0.$$

Es sei  $k$  so groß, daß für  $i \geq k$  gleichzeitig die beiden folgenden Ungleichungen erfüllt seien:

$$\varrho(y, x_{n_i}) < \frac{r}{2}, \quad \varrho(x_{n_i}, x) < \frac{r}{2};$$

infolge des Dreiecksaxioms hat man dann

$$\varrho(y, x) \leq \varrho(y, x_{n_i}) + \varrho(x_{n_i}, x) < r,$$

was der Definition der Zahl  $r$  widerspricht.

**Beweis des Satzes III.** Es sei  $R$  ein  $\triangle$ -Raum mit der Entfernungsfunktion  $\varrho(x, y)$ . Man definiere

$$\varrho^*(x, y) = \min \{ \varrho(x, y), \varrho(y, x) \}.$$

Diese Funktion ist symmetrisch; es ist ferner klar, daß  $\varrho^*(x, y) \leq \varrho(x, y)$  ist; wenn also  $x = \lim x_i$  (in  $R$ ) ist, so ist  $\lim \varrho^*(x, x_i) = 0$ . Auch die Umkehrung dieser Behauptung trifft zu. - Nehmen wir im Gegenteil an, daß

$$\lim \varrho^*(x, x_i) = 0, \quad \varrho(x, x_i) \geq r > 0$$

für  $i = 1, 2, 3, \dots$  ist. Aus der Definition von  $\varrho^*$  folgt, daß  $\lim \varrho(x_i, x) = 0$  ist. Auf Grund des soeben bewiesenen Hilfssatzes hat die Punktfolge  $\{x_i\}$  keinen von  $x$  verschiedenen Häufungspunkt, woraus vermöge der Kompaktheit von  $R$  folgt, daß sie gegen  $x$  konvergiert. Folglich kann man  $\varrho^*$  als eine (symmetrische) Entfernungsfunktion in  $R$  betrachten, woraus vermöge des Satzes II folgt, daß  $R$  im engeren Sinne metrisierbar ist.

Wir geben zum Schluß ein Beispiel eines nicht symmetrischen (also erst recht nicht im engeren Sinne metrisierbaren)  $\Delta$ -Raumes, welcher selbstverständlich nicht kompakt ist, wohl aber eine abzählbare Basis besitzt.

Der Raum  $R$  besteht aus den Punkten  $x$  der Strecke  $(0; 1)$  der gewöhnlichen Zahlengeraden. Die Umgebungen  $U(x)$  werden wie folgt definiert:

$$U(x) = J_a^b + x,$$

wobei  $J_a^b$  die Gesamtheit aller irrationalen Punkte des Intervalles  $(a; b)$  ist und  $a$  und  $b$  zwei beliebige, der Bedingung  $a < x < b$  genügende rationale Zahlen sind.

Daß der Raum  $R$  kein symmetrischer ist, folgt daraus, daß in einem symmetrischen Raum jede abgeschlossene Menge eine  $G_\delta$ -Menge<sup>9)</sup> ist, während die Menge der rationalen Punkte der Strecke  $(0; 1)$  offenbar eine abgeschlossene Menge des Raumes  $R$  darstellt, die, wie leicht beweisbar, keine  $G_\delta$ -Menge ist.

Eine dem Dreiecksaxiom genügende Entfernungsfunktion läßt sich in unseren Raum wie folgt einführen. Wir bezeichnen im allgemeinen mit  $x$  bzw.  $y$  rationale bzw. irrationale Zahlen des Intervalls  $(0; 1)$ . Wir definieren sodann

$$\varrho(x, x') = 1, \quad \varrho(x, y) = |x - y|,$$

$$\varrho(y, y') = |y - y'|, \quad \varrho(y, x) = 1.$$

Eine elementare Fallunterscheidung zeigt, daß  $\varrho$  das Dreiecksaxiom erfüllt.

<sup>9)</sup> Beweis wörtlich wie bei Hausdorff a. a. O.<sup>9)</sup>, S. 305–306.

## Neue Beispiele von ebenen Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind.

Von

Friedrich Schilling in Danzig-Langfuhr.

In seiner Arbeit: „Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind“ hat Herr Hamel<sup>1)</sup> die Frage nach den allgemeinen Geometrien dieser Art beantwortet. Doch ist es gewiß wünschenswert und an sich interessant, eine Reihe von neuen Beispielen solcher Geometrien kennenzulernen, zumal hierdurch mannigfache Nebenfragen, besonders auch die Eigenart von singulären Punkten, geklärt werden. Bisher sind außer der gewöhnlichen parabolischen, hyperbolischen und elliptischen Geometrie nur zwei einfache Beispiele bekannt, die Minkowskische und die Hilbertsche Geometrie<sup>2)</sup>, welch letztere von Herrn Hamel und Herrn Funk<sup>3)</sup> noch eine Verallgemeinerung erfahren hat.

### § 1.

#### Die Pseudogeometrien auf der projektiven Geraden.

Vorerst wollen wir einen Blick auf die allgemeinen Geometrien werfen, die auf einer gegebenen projektiven Geraden herrschen können. Wir können sogleich diese neuen Geometrien, die Pseudogeometrien, in der auf der

<sup>1)</sup> Math. Annalen 57 (1903), S. 231–264. Diese Arbeit gibt in schärferer Form die Untersuchungen wieder, die Herr Hamel bereits 1901 in seiner Göttinger Dissertation mit demselben Titel behandelt.

<sup>2)</sup> Vgl. deswegen außer den Ausführungen bei Herrn Hamel die ursprüngliche Arbeit: H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1910, Kap. I, sowie D. Hilbert, Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte, Math. Annalen 46 (1895), S. 91, abgedruckt in dem Buch: Grundlagen der Geometrie, 7. Auflage, Leipzig (1930), Anhang I, S. 126. Vgl. auch den Vortrag von Herrn Hilbert, Mathematische Probleme, Internat. Math.-Kongreß, Paris 1900, S. 15.

<sup>3)</sup> P. Funk, Über die Geometrien, bei denen die Geraden die Kürzesten sind, Math. Annalen 101 (1929), S. 226–237.

Geraden geltenden euklidischen Geometrie eingebettet denken, ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu beschränken. Es sei also auf der Geraden zugleich ein euklidisches  $(x)$ -Abszissensystem mit dem Anfangspunkt  $O$  gegeben. Für die Pseudogeometrien soll das Additionstheorem gelten, d. h. es soll

$$(1) \quad (AB) = (AC) + (CB)$$

sein, wenn  $A, C, B$  drei aufeinander folgende Punkte der Geraden sind,  $(AB)$ ,  $(AC)$ ,  $(CB)$  ihre Pseudoentfernungen bedeuten und kein singulärer Punkt in dem Gebiet der Strecke  $AB$  liegt. Es ist also auch  $(AA) = 0$ , da ja  $(AB) = (AA) + (AB)$  ist. Es genügt nun ersichtlich, um die Pseudoentfernung je zweier Punkte zu überblicken, wenn wir die Pseudoentfernung aller Punkte vom Anfangspunkt  $O$  und umgekehrt auch die Entfernung des Anfangspunktes  $O$  von den anderen Punkten kennen. Wir treffen weiter noch folgende, an sich willkürliche Festsetzungen:

*Diese zunächst in positiver Richtung der  $x$ -Achse sich ergebenden Pseudoentfernungen von  $O$  aus oder nach  $O$  hin sollen stets positiv sein und stets stetig zunehmen.*

Wir wollen diese Pseudoentfernung  $(OP)$  vom Punkte  $O$  bis zum beliebigen Punkte  $P$ , bzw. die Pseudoentfernung  $(QO)$  vom Punkte  $Q$  bis zum Punkte  $O$  jedesmal als die euklidische Senkrechte auf der  $x$ -Achse im Punkte  $P$  oder  $Q$  aufgetragen denken, und zwar genauer gesprochen folgendermaßen:

Die zunächst also in positiver Richtung der  $x$ -Achse gemessene Pseudoentfernung vom Punkte  $O$  bis zu einem Punkte  $P$  mit positiver Abszisse bzw. von einem Punkte  $Q$  mit negativer Abszisse bis zum Punkte  $O$  hin soll im Punkte  $P$  bzw.  $Q$  in positiver bzw. negativer  $h$ -Ordinatenrichtung aufgetragen sein; die Endpunkte seien durch eine Kurve mit der Gleichung  $h = f(x)$  verbunden gedacht (Fig. 1).

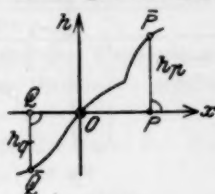


Fig. 1.

Es ist jetzt allgemein die Pseudoentfernung  $(AB)$  der von einem Punkte  $A$  bis zu einem Punkte  $B$  durchlaufenen Strecke  $AB$  durch die Gleichung gegeben

$$(AB) = h_b - h_a = f(x_b) - f(x_a),$$

wo  $x_a, x_b$  ( $x_a < x_b$ ) die Abszissen der Punkte  $A, B$  und  $h_a, h_b$  ( $h_a < h_b$ ) die  $h$ -Ordinaten der Kurve zu den Punkten  $A, B$  sind.

Es können nun weiter folgende Möglichkeiten eintreten: Die Kurve  $h = f(x)$  braucht keineswegs differenzierbar zu sein. Sie braucht auch nur innerhalb eines endlichen Bereiches  $x_1 \leq x \leq x_2$  definiert zu sein. Die genannten (von  $O$  ausgehenden oder nach  $O$  hingehenden) Pseudoentfernungen

können einen Grenzpunkt  $U$  bzw.  $V$  haben, so daß  $\lim (OP) = \infty$  für  $\lim x_p = x_u > 0$  bzw.  $\lim (QO) = \infty$  für  $\lim x_q = x_v < 0$  wird.

Ein Beispiel hierfür gibt die gewöhnliche *hyperbolische Geometrie*, für die

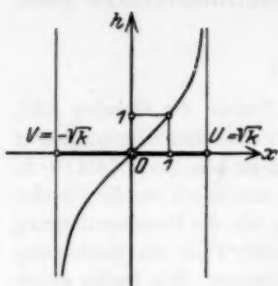


Fig. 2.

$$h = \frac{\mu}{2} \cdot \log \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} - x} \quad (x > 1)$$

gilt und etwa

$$\frac{\mu}{2} = \frac{1}{\log(\sqrt{x} + 1) - \log(\sqrt{x} - 1)}$$

oder

$$\operatorname{tg} h \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

sei, so daß dann für  $x=1$  auch  $h=1$  ist (Fig. 2 für  $x=4$ ). Ein anderes Beispiel gibt:

$$h = \operatorname{tg} x \text{ für } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\frac{\pi}{2}.$$

Es sollen ferner aber auch solche Grenzpunkte  $U, V$  für die Pseudoentfernungen  $(OP)$  bzw.  $(QO)$  möglich sein, nachdem der Punkt  $P$  bzw.  $Q$  den Punkt  $x = \infty$  bzw.  $x = -\infty$  einmal oder mehrmal überstrichen hat.

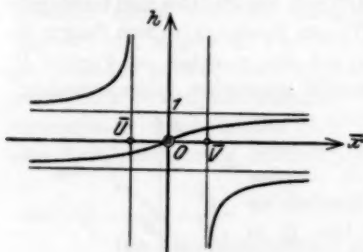


Fig. 3.

Führen wir etwa in dem Beispiel der Fig. 2 auf der  $x$ -Achse die Transformation aus

$$\bar{x} = \frac{2x}{1-x^2}$$

und ordnen dann jedem Punkte  $\bar{x}$  dieselbe Ordinate  $h$  zu wie dem entsprechenden Punkte  $x$ , so erhalten wir auf der  $\bar{x}$ -Achse die durch die Fig. 3 veranschaulichte Pseudogeometrie.

Die Grenzpunkte  $U, V$  können natürlich auch zusammenfallen, wie bei der euklidischen Geometrie.

Die Pseudoentfernungen  $(OP)$  bzw.  $(QO)$  können aber auch bei beliebig oft wiederholtem Überstreichen des Punktes  $x = \infty$  bzw.  $x = -\infty$  durch den Punkt  $P$  bzw.  $Q$  noch immer endlich bleiben. Ein Beispiel gibt die gewöhnliche *elliptische Geometrie*, für die

$$h = \mu \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

gilt und etwa

$$\mu = \frac{1}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

sei (Fig. 4 für  $\frac{1}{\sqrt{x}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ ). Natürlich kann aber für die Pseudoentfernung ( $OP$ ), wenn der Punkt  $P$  von  $O$  aus sich beständig in positiver Richtung fortbewegt, sich auch nach beliebig oft stattfindendem Überstreichen der Stelle  $x = \infty$  kein Grenzpunkt  $U$  ergeben, wohl aber andererseits für die Pseudoentfernung ( $QO$ ), wenn der Punkt  $Q$  von  $O$  aus sich beständig in negativer Richtung fortbewegt, ein Grenzpunkt  $V$ , oder umgekehrt.

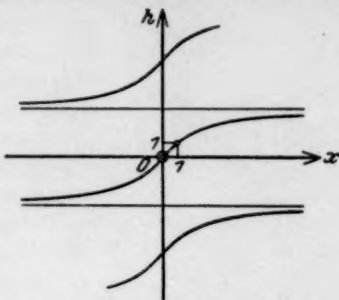


Fig. 4.

Wenn wir von unseren obigen Festsetzungen absehen, so ist die Möglichkeit denkbar, daß die Kurve  $h = f(x)$  teils stetig zunimmt, teils stetig abnimmt, ja, daß sie für einzelne Punkte  $x$ , die dann als *singulär* gelten, senkrecht ansteigt oder abfällt. Hierdurch würden dann also auch *negative* Pseudoentfernungen zugelassen sein, auch würde für einen solchen singulären Punkt  $A$  die Pseudoentfernung ( $AA$ ) unbestimmt sein.

Wir wenden uns nun zu den Pseudoentfernungen, die von  $O$  aus in *negativer* Richtung der  $x$ -Achse ausgehen bzw. die nach  $O$  in *negativer* Richtung hinführen, wenn auch solche zugelassen sind. Auch für diese Pseudoentfernungen können wir die Festsetzungen treffen, daß sie *stets positiv sind und stets stetig zunehmen*.

Wir wollen auch diese Pseudoentfernungen in analoger Weise wie oben durch eine Kurve  $h = f_1(x)$  veranschaulichen. Ersichtlich ergeben sich dann sogleich folgende zwei Möglichkeiten:

*Entweder ist die Kurve  $h = f_1(x)$  das Spiegelbild der Kurve  $h = f(x)$  bezüglich der  $x$ -Achse oder nicht.*

Wir werden sagen: *Demgemäß ist die „starke Monodromie“<sup>4)</sup> erfüllt oder nicht.* Im ersten Fall ist also jede (singularitätenfreie) Strecke  $(AB) = (BA)$ , im zweiten Falle nicht. Mit anderen Worten: Im ersten Falle durchläuft ein Punkt  $A$ , wenn er zunächst in positiver Richtung sich bewegt und dann umkehrt, nach der Umkehrung wieder dieselben Pseudoentfernungen für dieselben euklidischen Strecken, im zweiten Falle nicht.

Nun sei schließlich noch auf folgende Möglichkeiten hingewiesen: Es sei z. B. die durch die Fig. 5 veranschaulichte Kurve  $h = f(x)$  gegeben. Dann kann der Punkt  $P$  von  $O$  aus zunächst in positiver  $x$ -Richtung bis

<sup>4)</sup> Vgl. deswegen z. B. Hamel, loc. cit. S. 244. Minkowski nennt die Pseudogeometrie mit bzw. ohne starke Monodromie „*einseitig*“ bzw. „*wechselseitig*“, vgl. loc. cit. S. 2.



zum singulären Punkt  $S$  sich bewegen, muß dann aber der Kurve entsprechend umkehren. Wir können etwa denken, daß die  $x$ -Achse in dem überstrichenen Gebiet doppelt überdeckt ist und diese beiden Teile im Punkte  $S$  zusammenhängen. Außerdem kann aber etwa der Punkt  $P$  an jeder Stelle, die er erreicht hat, umkehren, entweder mit oder ohne starke Monodromie. Wir wollen sonstige Möglichkeiten nicht weiter ausführen. Die Betrachtungen dieses Paragraphen sollten den Zweck erfüllen, sogleich eine tiefere Einsicht in die mannigfachen Möglichkeiten neuer Geometrien zu

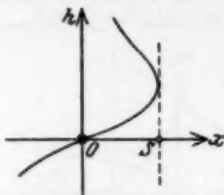


Fig. 5.

gewähren und damit auch die Pseudogeometrien in der projektiven Ebene vorzubereiten.

## § 2.

## Allgemeines über die Pseudogeometrien in der projektiven Ebene.

Ungleich komplizierter liegen eben die Verhältnisse, wenn wir uns die verschiedenen möglichen Pseudogeometrien in der projektiven Ebene irgendwie vorzustellen versuchen wollen. Wir können die Pseudogeometrie wieder in die euklidische Geometrie der Ebene eingebettet denken, in der ein rechtwinkliges  $(x, y)$ -Koordinatensystem gegeben sei. Bei der *Beschränkung auf ein hinreichend kleines Gebiet der Ebene, das wir als ein schlichtes, einfach zusammenhängendes voraussetzen*, können wir uns die zunächst stets als positiv vorausgesetzte Pseudoentfernung zweier Punkte  $A, B$  durch die Formel bestimmt denken

$$(AB) = F(x_1, y_1; x_2, y_2),$$

wo  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  die Koordinaten der Punkte  $A, B$  sind. Diese Funktion soll überdies eine *stetige* Funktion ihrer vier Variablen sein. Das gegebene Gebiet können wir auch über die unendlich ferne Gerade sich erstreckend annehmen. Denn wir wollen gleich vorweg allgemein bemerken: Wenn in einem Gebiet eine Pseudogeometrie gegeben ist, so können wir auf dieses Gebiet ja eine projektive Transformation (Kollineation) ausüben mit der Bedingung, daß in dem transformierten Gebiet zwei Punkte stets dieselbe Pseudoentfernung haben sollen wie die zwei Punkte, aus denen sie hervorgegangen sind. Solche zwei projektiv ineinander überzuführenden Pseudogeometrien wollen wir stets als gleichwertig, als nicht voneinander verschieden ansehen.

Doch soll jetzt sogleich die wichtige Forderung hinzutreten:

*In dem betrachteten Gebiet sollen die projektiven Geraden die kürzesten Linien sein<sup>5)</sup>.*

<sup>5)</sup> Herr Hamel nennt diese Bedingung kurz die „Archimedische Forderung“, vgl. loc. cit. S. 233.

Wir wollen solche Pseudogeometrien fernerhin einfach als „*kürzeste Pseudogeometrien*“ bezeichnen.

Natürlich brauchen die Geraden dann auch nicht in beliebiger Ausdehnung die kürzesten Linien zu sein. In der gewöhnlichen elliptischen Geometrie ist ja z. B. eine Strecke  $AB$ , welche eine volle Gerade um ein Stück übertrifft, nicht mehr die kürzeste Verbindungslinie der Endpunkte  $A, B$  für alle Verbindungslinien, die in der Nähe der Strecke  $AB$  verlaufen. Dies zeigt uns schon in der (ein wenig verzerrt gezeichneten) Fig. 6 die ausgezogene Strecke  $(AB)$  und die strichpunktiierte kürzere Linie  $(AC) + (CB)$  \*).



Fig. 6.

Die obige Forderung ist ja bekanntlich gleichwertig mit der Forderung:

In einem Dreieck  $ABC$  des betrachteten Gebietes soll die Summe zweier Pseudoseitenlängen stets größer als die dritte Pseudoseitenlänge sein. (Unter einem Dreieck soll hier allgemein eines der vier Gebiete verstanden sein, in welche die projektive Ebene durch drei Geraden zerlegt wird. Das schraffierte Dreieck der Fig. 6 ist also kein solches Dreieck.)

Diese Forderung werden wir späterhin kurz als die *Gültigkeit des Dreieckssummensatzes* bezeichnen.

Dementsprechend soll auch auf jeder Geraden des Gebietes das Additionstheorem der Gleichung (1) mit der Folgerung  $(AA) = 0$  gelten.

Einen jeden Punkt eines solchen Gebietes wollen wir als einen *regulären* Punkt bezeichnen. Ein solcher Punkt  $P$  ist also insbesondere dadurch gekennzeichnet: Alle von ihm ausgehenden Linienelemente haben positive (nicht verschwindende) unendlich kleine Pseudolängen und, wenn  $A, B$  zwei beliebige Punkte in der Umgebung von  $P$  sind, so hat die Pseudolänge  $(AB)$  stets denselben Grenzwert, in welcher Weise auch der Punkt  $A$  in den Punkt  $P$  hineinrückt. Wenn wir von einem gegebenen „regulären Gebiet“, d. h. einem Gebiet mit nur regulären Punkten, ausgehen und dieses erweitern, so kann es natürlich geschehen, daß wir zu *singulären* (d. h. nicht mehr regulären) Punkten gelangen. Zu diesen können wir z. B. bei der gewöhnlichen hyperbolischen Geometrie die Punkte des absoluten Kegelschnittes rechnen, wenn wir diese als „uneigentliche“ Punkte nicht überhaupt ausschließen wollen.

Wir können nun vor allem sagen:

\*) Es sei in dieser Hinsicht des näheren auch hingewiesen auf mein Buch: Projektive und nichteuklidische Geometrie, Leipzig (1931), Bd. II, S. 163 ff.

Es muß stets die schwache Monodromie gelten, d. h. wenn man eine Strecke  $AB$  mit der Pseudolänge  $(AB)$  um ihren einen Endpunkt  $A$  einmal herumdreht, so daß also auf allen Strahlen durch  $A$  dieselbe Pseudolänge  $(AB)$  abgetragen ist, so muß man wieder zu derselben Strecke  $AB$

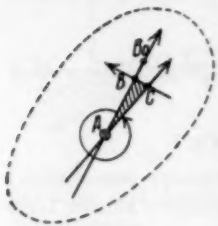


Fig. 7.

zurückgelangen. Denn würde man zu einer anderen Strecke  $AB_0$  gelangen (Fig. 7), so daß also dann  $(AB_0) = (AB)$  wäre, so hätte ja, wenn z. B. die euklidische Strecke  $AB_0 > AB$  wäre, nach der Umdrehung die ursprüngliche Strecke  $AB$  die angebar kleiner gewordene Pseudolänge  $(AB)^*$ . Dann aber könnte man ein Dreieck  $ABC$  mit beliebig kleiner Pseudolänge  $(CB)$  und etwa mit der Pseudolänge  $(AC) = (AB)^*$  angeben, in dem  $(AC) + (CB) < (AB)$  wäre, was ausgeschlossen sein soll. Statt des

Linienzuges  $\vec{AC}$  und  $\vec{CB}$  mit den angegebenen Pseudolängen  $(AC) + (CB)$  können wir auch den Linienzug betrachten, der von  $A$  aus zuerst in der Richtung  $\vec{AB}$  verläuft bis zu dem beliebig klein zu denkenden Kreise in der Fig. 7, dann dem Kreise folgt in der angegebenen Richtung bis zur Strecke  $\vec{AC}$  und endlich den Rest der Strecke  $\vec{AC}$  und die Strecke  $\vec{CB}$  durchläuft. Dieser Linienzug ist auch leicht durch eine stetig ihre Richtung ändernde Kurve zu ersetzen. Wieder ist es einfach, diesen neuen Linienzug oder die Kurve so zu ziehen, daß ihre Pseudolänge kleiner als  $(AB)$  ist.

Hervorheben wollen wir aber sogleich hier:

*Es ist denkbar, daß die starke Monodromie für die einzelne Gerade erfüllt ist oder nicht.*

Nun wollen wir sechs Arten besonders einfacher kürzester Pseudogeometrien besonders hervorheben: Es sei schon hier gesagt, daß wir für alle diese Pseudogeometrien in dem nächsten Paragraphen mannigfache einfache Beispiele kennenlernen werden. Wir wollen hierbei ausgehen von den einfachsten drei Möglichkeiten für die „Pseudogeometrie des Strahlenbüschels“ durch den Anfangspunkt  $O$  des Koordinatensystems.

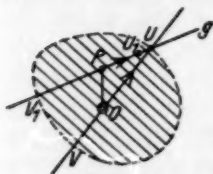


Fig. 8.

I. Es soll zunächst für jeden Strahl die starke Monodromie erfüllt sein. Auf jedem Strahl durch  $O$  mögen jetzt zwei Grenzpunkte  $U, V$  mit endlichen Koordinaten  $(x_u, y_u)$  und  $(x_v, y_v)$  vorhanden sein (Fig. 8). (Daß die Koordinaten endlich sind, bedeutet ersichtlich keine Beschränkung der Allgemeinheit unserer Betrachtung.) Der geometrische Ort der Punkte  $U, V$  möge eine stetige Kurve sein, die ja in sich zurückläuft; wir wollen sie die „ab-

*solite Kurve*“ nennen. Ihre Punkte sind als „uneigentliche“ Punkte anzusehen (im Sinne der Bezeichnung der nichteuklidischen Geometrie). Wenn wir wollen, können wir annehmen, daß diese Kurve aus Bogen *analytischer* Kurven besteht. Das „Innere“ dieser Kurve soll das Gebiet der regulären Punkte der kürzesten Pseudogeometrie sein. Diese Punkte wollen wir sogleich als „eigentliche“ Punkte bezeichnen, da sie ja jedenfalls vom Punkte  $O$  aus erreichbar sind. Dann ist für jede beliebige Gerade  $g$  dieses Gebietes, deren gegebene positive Richtung die Kurve im Punkte  $U$  schneidet, dieser Punkt  $U$  ebenfalls ein Grenzpunkt. Denn ist  $P$  ein beliebiger eigentlicher Punkt der Geraden  $g$ , so wäre ja, wenn  $U$  kein Grenzpunkt wäre, sondern  $(PU)$  endlich wäre, für einen Punkt  $U_1$  zwischen den Punkten  $P, U$   $(OP) + (PU_1) < (OU_1)$ , was unmöglich ist, wenn nur  $U_1$  euklidisch hinlänglich nahe an  $U$  liegt und, wie wir ja hier annehmen, für jedes Dreieck im Innern des Bereiches der Dreieckssummensatz gelten soll.

Wir wollen an einem einfachen Beispiel zeigen, daß bei einer nicht kürzesten Pseudogeometrie keineswegs der Punkt  $U$  auch ein Grenzpunkt der Geraden  $g$  zu sein braucht. Wir denken zwei konzentrische Kreise  $k_1$  und  $k_2$  um den Anfangspunkt  $O$  gezeichnet und außerdem alle dem entstandenen Kreisring einbeschriebenen Kreise (Fig. 9). Als Bereich soll das Innere des kleinen Kreises  $k_1$  in Betracht kommen. Bei einer beliebigen Geraden  $g$  mit den Schnittpunkten  $S, T$  auf dem Kreise  $k_2$  sollen die Grenzpunkte  $U^*, V^*$  ihre zweiten Schnittpunkte mit denjenigen einbeschriebenen Kreisen sein, die den Kreis  $k_1$  in den Punkten  $S, T$  berühren. Es soll dann die Pseudoentfernung zweier Punkte  $A, B$  durch die Formel gegeben sein

$$(AB) = \log(U^* V^* AB),$$

wo  $(U^* V^* AB)$  das Doppelverhältnis der vier Punkte bedeutet. (Es ist aber stets ein solches Doppelverhältnis

$$(U^* V^* AB) = \frac{AU^*}{V^*A} : \frac{BU^*}{V^*B} > 1,$$

da ja

$$AU^* > BU^*$$

und

$$V^*B > V^*A$$

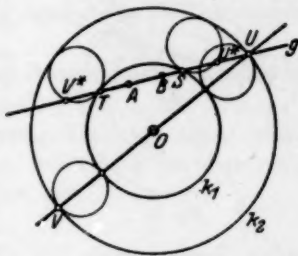


Fig. 9.

ist.) Ersichtlich sind dann die Grenzpunkte  $U$  und  $U^*$  der Fig. 9 voneinander verschieden. Daß es sich hier um eine *nicht kürzeste* Geometrie

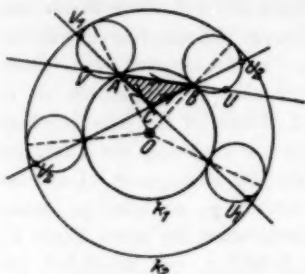


Fig. 10.

handelt, zeigt auch ein Blick auf die Fig. 10, wenn man mit dem Hilbertschen Beweis seiner Geometrie vertraut ist. Bei dieser Pseudogeometrie sind allein für die von  $O$  ausgehenden Strahlen alle Punkte im Innern von  $k_2$  nicht singulär und für *alle* Strahlen die Punkte im Innern von  $k_1$ .

Wir wollen noch einen kurzen Blick auf folgende andere ebenfalls nicht kürzeste Pseudogeometrie werfen: Um den Anfangspunkt  $O$  sei ein Kreis  $k$  gezeichnet und um alle Punkte seiner Peripherie wieder Kreise

mit demselben kleineren Radius (Fig. 11). Als Bereich soll das Innere des von den kleinen Kreisen eingehüllten Kreises  $k'$  in Betracht kommen.

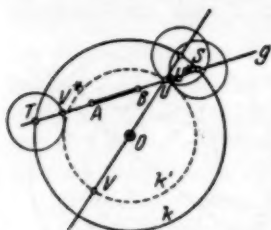


Fig. 11.

Auf jeder Geraden  $g$  mit den Schnittpunkten  $S, T$  auf dem Kreise  $k$  sollen die Grenzpunkte  $U^*, V^*$  ihre im Innern von  $k$  gelegenen Schnittpunkte mit den kleinen Kreisen um  $S, T$  sein. Es gelte für die Pseudoentfernungen wieder die letzte Formel für  $(AB)$ . Jetzt sind alle Punkte im Innern eines Kreises  $k'$  für alle Strahlen nicht singulär und für die von  $O$  ausgehenden Strahlen auch nur diese Punkte. Diese Pseudogeometrie kann

schon deswegen nicht eine kürzeste sein, weil sonst auch ein beliebiger Strahl seinen Grenzpunkt auf dem Kreise  $k'$  haben müßte.

Wir zeigen nun auch leicht:

*Die absolute Kurve muß eine nirgends konkave Kurve sein<sup>7)</sup>.*



Fig. 12.

Denn sonst würde es eine „Tangente“ (Stützl原因) der Kurve geben, die in der Umgebung des „Berührungspunktes“  $U$  im Innern der Kurve verlaufen würde (Fig. 12). Wären dann  $P, Q$  zwei Punkte dieser Geraden auf verschiedenen Seiten von  $U$  in hinreichender Nähe von  $U$  und wäre  $Q_1$  ein Punkt auf der Geraden  $OQ$  hinreichend nahe an  $Q$ , so wäre im Dreieck  $PQ_1O$  offenbar

$$(PO) + (OQ_1) < (PQ_1).$$

<sup>7)</sup> Wegen der Definition der Begriffe: „nirgends konkave Kurve“ und „überall konvexe Kurve“ vgl. z. B. Minkowski, loc. cit. S. 35–39.

Jede durch alle diese Eigenschaften charakterisierte Pseudogeometrie wollen wir eine *hyperbolische Pseudogeometrie mit starker Monodromie* nennen.

Wir stellen dieser Pseudogeometrie sogleich die *hyperbolischen Pseudogeometrien ohne starke Monodromie* zur Seite. Bei diesen Pseudogeometrien kann dieselbe absolute Kurve für die Grenzpunkte  $U$ , aller von einem Punkte  $P$  des Bereiches *ausgehenden* Pseudoentfernungen wie für die Grenzpunkte  $V$ , aller nach dem Punkte  $P$  *hinführenden* Pseudoentfernungen bestehen oder auch nicht.

II. Es soll wieder zunächst für jede Gerade die *starke Monodromie* erfüllt sein. *Auf jedem Strahl durch  $O$  mögen jetzt zwei zusammenfallende Grenzpunkte  $U=V$  vorhanden sein.* Die absolute Kurve zerlegt jetzt die projektive Ebene nicht in zwei Teile; vielmehr kommt jetzt die ganze Ebene mit Ausnahme der absoluten Kurve als Gebiet der eigentlichen Punkte in Betracht. Wir können analog wie soeben zeigen:

*Die absolute Kurve muß stets eine Gerade sein.* Denn die Kurve kann keine „Tangente“ (Stützlínie) haben, so daß die Kurve in der Umgebung des Berührungspunktes auf der einen Seite der Tangente liegt. Eine solche kürzeste Pseudogeometrie soll eine *parabolische Pseudogeometrie mit starker Monodromie* heißen.

Analog tritt hier wieder die *parabolische Pseudogeometrie ohne starke Monodromie* zur Seite.

III. Wieder sei die *starke Monodromie* erfüllt. *Auf jedem Strahl durch  $O$  möge sich kein Grenzpunkt ergeben*, weder nach der einen noch nach der anderen Richtung hin. Alle Punkte der Ebene sollen vielmehr *reguläre Punkte* sein.

*Alle von  $O$  ausgehenden Geraden haben dann dieselbe Pseudolänge*, wobei wir annehmen, daß für jedes Dreieck, dessen Seiten die volle Gerade nicht überschreiten, der Dreieckssummensatz gelten soll. Denn sind  $A, B$  zwei Punkte der von  $O$  ausgehenden Strahlen  $g, h$  in der euklidischen Nähe von  $O$ , so muß ja in dem Dreieck  $OAB$ , in dem die Seiten  $OA$  und  $OB$  fast die ganzen Strahlen ausmachen  $(OA) + (AB) > (OB)$  und  $(OB) + (BA) > (OA)$  sein (Fig. 13). Da nun die Pseudolänge  $(AB) = (BA)$  beliebig klein gemacht werden kann, so muß  $(OA) = (OB)$  sein.



Fig. 13.

Jeder von einem *beliebigen* Punkt  $P$  ausgehende Strahl hat ja auch keinen Grenzpunkt  $U$ . Es ergibt sich dann weiter:

*Alle durch einen beliebigen Punkt  $P$  gehenden vollen Strahlen haben ebenfalls dieselbe Pseudolänge wie die von  $O$  ausgehenden Strahlen.* Denn zu dem Strahlenbüschel durch  $P$  gehört ja auch ein Strahl durch  $O$ .



Eine solche kürzeste Pseudogeometrie soll eine *elliptische Pseudogeometrie mit starker Monodromie* heißen.

Man könnte nun denken, daß ein Punkt  $P$ , der von  $O$  ausgeht, nachdem er eine volle Gerade durchlaufen hat, also zu  $O$  zurückgekehrt ist, nun bei Fortsetzung seines Weges in derselben Richtung nicht wieder dieselbe Pseudolänge für dieselben euklidischen Strecken durchläuft. Eine solche Pseudogeometrie würden wir z. B. gewinnen, wenn wir die gewöhnliche elliptische Geometrie mit der gewöhnlichen hyperbolischen Geometrie so vereinigt denken, wie es die Fig. 14 zeigt, indem also die beiden in Betracht kommenden Bereiche im Punkte  $O$  zusammenhängen. Doch hat diese Vereinigung keinen

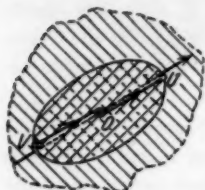


Fig. 14.

rechten Zweck, zumal der Punkt  $O$  dann singulär wird. Immerhin stellen diese Pseudogeometrien und ihre Verallgemeinerungen auch Möglichkeiten dar.

Wohl aber werden wir jetzt auch wieder die *elliptische Pseudogeometrie ohne starke Monodromie* zu erwähnen haben. Hier soll also für gewisse Geraden oder auch für alle eine verschiedene Pseudolänge von Strecken  $AB$ , die eventuell euklidisch beliebig groß sein können, sich ergeben, je nachdem diese in der einen oder anderen Richtung durchlaufen werden. Die volle Gerade hat indessen stets dieselbe Pseudolänge, in welcher Richtung sie auch durchlaufen wird. Diese Möglichkeit einer kürzesten Pseudogeometrie mag ja auf den ersten Blick merkwürdig genug erscheinen; doch werden wir für sie Beispiele erbringen.

Vor allem aber wird es auch interessant sein, noch andere kürzeste Pseudogeometrien kennenzulernen, die *nicht* zu diesen drei soeben beschriebenen Paaren gehören.

### § 3.

#### Die Minkowskische und die Hilbertsche Geometrie.

Die gewöhnliche hyperbolische, parabolische und elliptische Geometrie sind ja schon Beispiele für die drei hervorgehobenen Arten der kürzesten Pseudogeometrien mit starker Monodromie. Ein weiteres Beispiel der *parabolischen* Pseudogeometrie mit oder ohne starke Monodromie gibt uns die *Minkowskische Geometrie*.

Wir denken etwa von dem Anfangspunkte  $O$  nach allen Richtungen die Pseudoeinheitsstrecke abgetragen. Die Endpunkte bilden dann eine bestimmte Kurve (Fig. 15). Nun setzen wir weiter fest: Von jedem anderen im euklidisch Endlichen gelegenen Punkte  $P$  aus soll die analoge Konstruktion die parallel verschobene gleiche Kurve ergeben. Außerdem soll



nun auf jedem Strahl durch  $O$  oder  $P$  die Pseudolänge bis zu einem beliebigen Punkte  $Q$  sich zu der (von  $O$  oder  $P$  ausgehenden) Pseudoeinheit dieser Richtung verhalten wie die entsprechenden euklidischen Strecken. Die genannte Kurve wird dementsprechend die *Eichkurve* genannt. Ersichtlich ist die euklidisch unendlich ferne Gerade auch die absolute Kurve, der Ort der Grenzpunkte, der Pseudogeometrie. Ferner ist die Eichkurve der Pseudokreis mit dem Pseudoradius 1 und alle Pseudokreise sind zu diesem Kreise euklidisch ähnlich. Nun ist auch gleich der Satz zu beweisen:



Fig. 15.

*Stets dann und nur dann gilt der Dreieckssummensatz, wenn die Eichkurve eine überall konvexe Kurve ist.*

Wir betrachten zum Beweise zunächst den speziellen Fall, daß die Eichkurve aus zwei Parallelen besteht. Es sei dann irgendein Dreieck  $ABC$  gegeben. Wir denken die Eichkurve des Punktes  $A$  hinzu und können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Seite  $AB$  die Pseudolänge 1 hat. Dann ist leicht elementargeometrisch zu erkennen, daß stets

$$(AC) + (CB) \geq (AB)$$

ist (Fig. 16a, b). Es sei zunächst allgemein bemerkt:

Diesen Satz: „In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten gleich oder größer als die dritte Seite“ wollen wir den *erweiterten Dreieckssummensatz* nennen. Demgemäß seien solche Pseudogeometrien, für welche stets der erweiterte Dreieckssummensatz gilt, fernerhin als „erweitert kürzeste Pseudogeometrien“ bezeichnet. In der vorliegenden Pseudogeometrie ist natürlich jede Strecke, deren Gerade zu den Parallelen der Eichkurve parallel ist, gleich 0.



Fig. 16a.

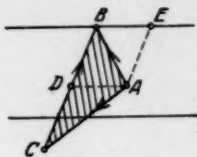


Fig. 16b.

Ist nun zu dem Dreieck  $ABC$  mit der Pseudolänge  $(AB) = 1$  eine beliebige überall konvexe Eichkurve des Punktes  $A$  gegeben, so ziehen wir durch  $B$  eine Stützlinie  $g$  der Kurve (im allgemeinen also die Tangente der Kurve) und dazu die parallele Stützlinie  $h$  (Fig. 17). Dann sehen wir sofort: Von den Pseudolängen  $(AC)$  und  $(CB)$  ist  $(AC)$  nicht kleiner und  $(CB)$  stets größer als die Pseudolänge einer jeden dieser Strecken sein würde, wenn die Eichkurve durch die Geraden  $g, h$  gegeben würde. Also ist auch stets  $(AC) + (CB) > (AB)$ . Ebenso einfach zeigt man, daß die Eichkurve bei Gültigkeit des Dreieckssummensatzes nicht an irgendeiner Stelle geradlinig oder konkav sein kann.

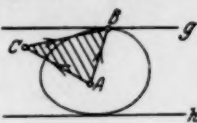


Fig. 17.

Weiter ergibt sich sogleich noch:

*Je nachdem die überall konvexe Eichkurve des Punktes  $O$  in bezug auf diesen Punkt symmetrisch ist oder nicht, gilt für die Minkowskische Geometrie die starke Monodromie oder nicht.* —

Die Hilbertsche Geometrie gewinnen wir einfach so: *Es sei eine nirgends konkave Kurve mit höchstens einem geradlinigen Stück gegeben (Fig. 18). Als Bereich der Pseudogeometrie kommt nur das Innere der Kurve in Betracht. Zwei Punkte  $A, B$  im Innern sollen dann die Pseudoentfernung*

$$(AB) = c \cdot \log (UVAB)$$

*besitzen, wo  $U, V$  die Schnittpunkte der Geraden  $AB$  mit der Kurve sind,  $(UVAB)$  wieder das Doppelverhältnis der vier Punkte ist und  $c$  eine positive Konstante bedeutet.*

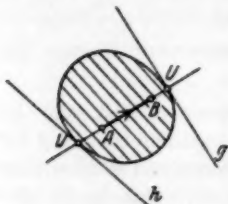


Fig. 18.

Den elementaren Beweis von Herrn Hilbert brauchen wir nicht im einzelnen zu wiederholen.

Er kommt darauf hinaus, daß man zuerst als Bereich den einen von zwei Geraden  $g, h$  gebildeten Winkelraum (oder auch einen Parallelstreifen) wählt (Fig. 19). Dann gilt hier stets bei analoger Bestimmung der Pseudoentfernung, wie soeben, der erweiterte Dreieckssummensatz, d. h. es ist

$$(AC) + (CB) \geq (AB),$$

auch wenn die Gerade  $AB$  durch den Schnittpunkt  $S$  von  $g, h$  hindurchgeht. Diese Geometrie des Winkelraumes ist also auch eine erweitert kürzeste Pseudogeometrie; jedoch ist jede Strecke, deren Gerade durch den Scheitelpunkt  $S$  geht, wieder gleich 0.

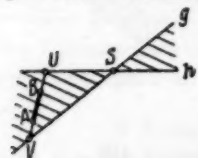


Fig. 19.

In der Hilbertschen Geometrie hat aber jede Dreiecksseite  $AC$  und  $CB$  eine größere Pseudolänge ( $AC$ ) und ( $CB$ ) als in der Pseudogeometrie des Winkelraumes, der von den Stützlinsen  $g, h$  in den Punkten  $U, V$  gebildet wird (Fig. 18), auf Grund des projektiv leicht

zu beweisenden Hilfssatzes: Sind auf einer Geraden folgende Punkte  $V_1, V_2, P, Q, U_2, U_1$  in dieser Reihenfolge gegeben, wobei auch entweder  $V_1 = V_2$  oder  $U_2 = U_1$  sein kann, so gilt die Ungleichung:

$$^*(U_2 V_2 PQ) > (U_1 V_1 PQ) > 1.$$

*Die gegebene Kurve der Hilbertschen Geometrie ist die absolute Kurve der hyperbolischen Pseudogeometrie mit starker Monodromie.*

Die von Herrn Hamel angegebene Verallgemeinerung beruht nun im folgenden: Wir denken uns mehrere solche Kurven so gegeben, daß sie

gemeinsam einen im Innern aller Kurven liegenden Bereich besitzen. Für diesen Bereich soll dann die Pseudolänge definiert sein durch die Gleichung

$$(AB) = \sum c_i \cdot \log(U_i V_i AB),$$

wo  $U_i, V_i$  die Schnittpunkte der Geraden  $AB$  mit der einzelnen Kurve und  $c_i$  positive Konstante sind. Es können übrigens auch alle Kurven bis auf eine *allgemein nirgends konkav* sein, also in beliebiger Zahl geradlinige Stücke enthalten. Bei allen diesen Pseudogeometrien ist die *starke Monodromie erfüllt*.

Von Herrn Funk ist weiter auf den Fall kurz hingewiesen, daß zwei konvexe Kurven gegeben sind (die er als Mantellinien bezeichnet), am einfachsten etwa zwei Kreise, die wieder einen im Innern beider Kurven

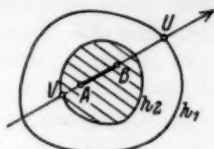


Fig. 20 a.

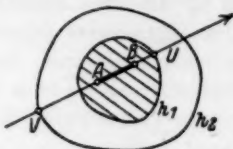


Fig. 20 b.

liegenden Bereich haben, um den es sich handeln soll. (Es kann auch eine der beiden Kurven eine nirgends konkave sein.) Die Pseudoentfernung sei definiert durch die Gleichung

$$(AB) = c \cdot \log(UVAB),$$

wo jetzt jedoch die Schnittpunkte  $U, V$  sich auf die beiden Kurven verteilen. Wir beschränken uns auf den Fall, daß die eine Kurve ganz im Innern der anderen liegt (Fig. 20 a, b). Daß auch hier stets der Dreieckssummensatz erfüllt ist, läßt sich analog elementar beweisen, wie in der einfachen Hilbertschen Geometrie. Wir erkennen aber:

*In dieser neuen (hyperbolischen) Pseudogeometrie gilt die starke Monodromie nicht.* Daß ein Punkt  $P$  im Innern der inneren Kurve, wenn man den Bereich erweitern will, aus diesem Innern heraustreten kann, dann aber nicht in jeder Richtung sich weiter bewegen kann, sei nur nebenbei erwähnt.

Endlich hat Herr Funk auch den speziellen Fall behandelt, daß die äußere Kurve  $h_1$  bzw.  $h_2$  der Figuren 20 a, b in eine Gerade übergeht, die auch in der unendlich fernen Geraden der euklidischen Geometrie gelegen sein kann.

Im ersten Falle z. B. (wo also die Kurve  $h_1$  der Figur 20 a durch die euklidisch unendlich ferne Gerade ersetzt ist) gilt dann für die Pseudolängen auf einer beliebigen Geraden  $g$  folgendes: Wir denken auf der Geraden  $g$  ein euklidisches  $\xi$ -Abszissensystem mit dem Anfangspunkt  $V$

eingeführt. Haben nun die Punkte  $A, B$  die Abszissen  $\xi_1, \xi_2$  ( $\xi_2 > \xi_1 > 0$ ), so ist die Pseudolänge

$$(AB) = c \cdot \log \frac{\xi_2}{\xi_1}.$$

Bei diesen hyperbolischen Pseudogeometrien ohne starke Monodromie fallen jedoch die beiden absoluten Kurven niemals zusammen.

#### § 4.

##### Die Addition gegebener kürzester Pseudogeometrien.

Eine Fülle neuer kürzester Pseudogeometrien gibt uns mit einem Schlage der einfache Satz:

*Sind für denselben Bereich der projektiven Ebene zwei oder mehrere kürzeste Pseudogeometrien gegeben, so kann man eine neue kürzeste Pseudogeometrie dadurch gewinnen, daß man für jede Strecke des Bereiches ihre Pseudolänge  $(AB)$  als die Summe der mit beliebigen positiven Konstanten  $c_i$  multiplizierten Pseudolängen der einzelnen Pseudogeometrien definiert.*

Wir wollen dementsprechend einfach von der „Addition gegebener kürzester Pseudogeometrien“ sprechen und die neue Pseudogeometrie als die „Summe“ der gegebenen (mit den Koeffizienten  $c_1, c_2$ ) bezeichnen.

Wir können sogleich diesen Satz noch insofern erweitern, als von den gegebenen Pseudogeometrien alle bis auf eine auch solche sein können, für welche statt des Dreieckssummensatzes der erweiterte Dreieckssummensatz gilt. Es kann also z. B. eine der gegebenen Pseudogeometrien auch die Hilbertsche Geometrie für den einen von zwei Geraden gebildeten Scheitelswinkelraum sein, trotz der Eigenart, die für die Geraden durch den Schnittpunkt besteht.

Als weitere Beispiele wähle ich etwa aus:

1. *Die Summe von zwei oder mehreren elliptischen Geometrien.* Hier ergibt sich eine neue elliptische Pseudogeometrie mit starker Monodromie.
2. *Die Summe mehrerer parabolischer Geometrien* mit euklidisch im Endlichen gelegenen absoluten Geraden. Hierdurch können wir neue hyperbolische Pseudogeometrien mit starker Monodromie gewinnen, bei denen bzw. ein Dreieck, Viereck usw. die absolute Kurve ist.
3. *Die Summe von mehreren elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Pseudogeometrien.* Wir erkennen z. B.: Für jede konvexe Kurve gibt es beliebig viele verschiedene hyperbolische Pseudogeometrien mit starker Monodromie.
4. *Die Summe mehrerer Minkowskischer Geometrien, die alle etwa die euklidisch unendlich ferne Gerade als ihre absolute Kurve besitzen.*

Die einfachste solche Minkowskische Geometrie ist ja die besondere parabolische Geometrie, bei welcher die Eichkurve eine Ellipse ist. Die Fig. 21 (mit den Konstanten  $c_1 = 0,4$  und  $c_2 = 0,2$ ) gibt beispielsweise für die Summe zweier solcher parabolischer Geometrien mit den beiden Ellipsen als Eichkurven die kombinierte Eichkurve an. Sind für die Abweichung  $\varphi$  die euklidisch gemessenen Radienvektoren der beiden gegebenen Eichkurven  $r_1$  und  $r_2$ , so ist der Radiusvektor der neuen Eichkurve  $r = \frac{r_1 \cdot r_2}{c_2 r_1 + c_1 r_2}$ . Die Gleichung der neuen Eichkurve ist also, da

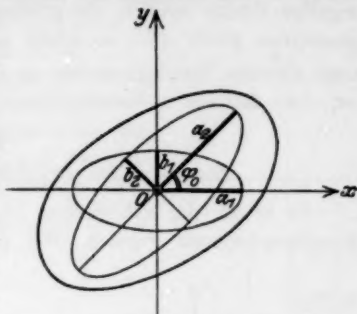


Fig. 21.

$$r_1 = f_1(\varphi) = \frac{a_1 \cdot b_1}{\sqrt{a_1^2 \sin^2 \varphi + b_1^2 \cos^2 \varphi}},$$

$$r_2 = f_2(\varphi) = \frac{a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_2^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0) + b_2^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)}}$$

die Gleichungen der gegebenen Eichkurven sind, wo  $a_1, b_1$  bzw.  $a_2, b_2$  die Halbachsen der Ellipsen bedeuten:

$$r = \frac{f_1 \cdot f_2}{c_2 f_1 + c_1 f_2} = f(\varphi).$$

5. Die Summe einer Minkowskischen Geometrie ohne starke Monodromie und der hyperbolischen Geometrie oder der Hilbertschen Geometrie. Bei der neuen hyperbolischen Pseudogeometrie ohne starke Monodromie fallen beide absoluten Kurven zusammen (vgl. den Schluß des § 3).

6. Es sei eine Pseudogeometrie ohne starke Monodromie gegeben. Wir wollen jetzt aber jeder Strecke  $AB$  des in Betracht kommenden Bereiches die neue Pseudolänge  $(AB)^*$  zuordnen, die gleich der Summe der Pseudolängen  $(AB)$  und  $(BA)$  der gegebenen Pseudogeometrie ist. Die neue Pseudogeometrie besitzt dann die starke Monodromie. Als Beispiel wähle man einfach eine Minkowskische Geometrie ohne starke Monodromie als die gegebene Pseudogeometrie. Die neue Pseudogeometrie ist auch die Summe der Minkowskischen Geometrie mit der gegebenen Eichkurve und der Minkowskischen Geometrie mit der um  $180^\circ$  gedrehten Eichkurve für  $c_1 = c_2 = 1$ .

7. Endlich wollen wir auch noch darauf hinweisen, daß wir natürlich auch unendlich viele kürzeste Pseudogeometrien durch Addition zu einer neuen kürzesten Pseudogeometrie vereinigen können, wenn wir nur über

die Koeffizienten  $c_i$  noch entsprechende Festsetzungen treffen. Sind z. B. in einem gegebenen Bereich, der für alle einzelnen Pseudogeometrien nur reguläre Punkte enthält, die größten Entfernungen der einzelnen Pseudogeometrien gleich  $\sigma_i^{\max}$ , so erhält man durch die genannte Addition eine neue kürzeste Pseudogeometrie für diesen Bereich, wenn  $\sum_1^{\infty} c_i \sigma_i^{\max}$  endlich ist, ohne daß alle  $c_i$  verschwinden.

### § 5.

#### Die speziellen geodätischen Pseudogeometrien.

Es sei in der euklidischen Ebene wieder ein rechtwinkliges  $(x, y)$ -Koordinatensystem gegeben. Wir denken eine *geodätische Karte* in der

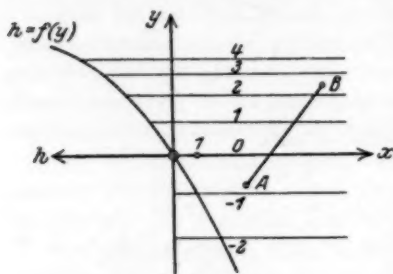


Fig. 22.

Ebene mit ihren Höhenkurven (Isohypsen), die indes zunächst alle parallel zur  $x$ -Achse sein sollen. Die  $x$ -Achse selbst können wir als die Höhenkurve mit der Höhe, Kote, 0 ansehen. Über der Karte können wir uns leicht das zugehörige Gelände selbst vorstellen, das einen zur  $(y, h)$ -Ebene senkrechten Zylinder darstellt, wo die zur  $(x, y)$ -Ebene senkrechte Koordinatenachse als  $h$ -Achse bezeichnet sei. Ein Beispiel gibt die Fig. 22, in der noch der Querschnitt des Geländes in der seitlich umgelegten  $(y, h)$ -Ebene dargestellt ist, die Kurve mit der Gleichung

$$h = f(y).$$

Für diese Funktion wird insbesondere wieder nicht vorausgesetzt, daß sie differenzierbar sei.

Wir setzen weiter zunächst fest: *Das Gelände soll in der Richtung der positiven  $y$ -Achse stets stetig ansteigen (oder doch nicht abnehmen).*

Wir definieren nun:

*Die Pseudolänge einer von dem Punkte A bis zum Punkte B durchlaufenen Strecke AB innerhalb der Karte soll jetzt durch die Formel gegeben sein:*

$$(AB) = |h_2 - h_1|,$$

wo  $h_1, h_2$  die Höhen der Punkte A, B bedeuten und auf der rechten Seite der absolute Betrag steht.

Die Pseudoentfernung der Punkte A, B ist also stets auch gleich der Pseudoentfernung der Fußpunkte der von A, B auf die  $y$ -Achse gefällten Lote. Es ist hier auch die starke Monodromie erfüllt.

Ersichtlich gilt in dieser Geometrie stets für ein (insbesondere den unendlich fernen Punkt  $S$  der  $x$ -Achse nicht enthaltendes) Dreieck  $ABC$  des in Betracht kommenden Bereiches

$$(AC) + (CB) \geq (AB),$$

also der erweiterte Dreieckssummensatz.

Die Kurve  $h=f(y)$  kann beispielsweise die Gestalt der Figuren 23a–f haben, also z. B. die Gleichung:  $h = \operatorname{tg} y$ ,  $h = \log(1+y)$ ,  $h = \operatorname{arctg} y$  bzw. für die Figurentypen 23a–c,  $h = \alpha \cdot \frac{y}{\beta - y}$ ,  $\frac{\alpha}{\beta} > 0$  (gleichseitige Hyperbel) oder auch  $h = y^3$  für den Figurentypus 23d, ferner

$$h = \operatorname{tg} y \quad \text{für} \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2},$$

$$h = \operatorname{arctg} y \quad \text{für} \quad -\infty \leq y \leq 0$$

und überhaupt für das wiederholte Durchlaufen der  $y$ -Achse in negativer Richtung vom Punkte  $O$  aus für den Figurentypus 23e und  $h = +1 - \sqrt{1 - y^2}$  für  $0 \leq y \leq 1$  und  $h = -1 + \sqrt{1 - y^2}$  für  $-1 \leq y \leq 0$  für den Figurentypus 23f. Von diesen Pseudogeometrien können wir insbesondere die Pseudogeometrien der Typen der Figuren 23a, b hyperbolisch, die des Typus der Fig. 23c elliptisch, die des Typus der Fig. 23d parabolisch, die des Typus der Fig. 23e hyperbolisch-elliptisch nennen, während wir die Pseudogeometrie des Typus 23f als eine beiderseits eingeschränkte bezeichnen können.

Es sei noch hinzugefügt, daß im Falle der Gleichung

$$h = \alpha \cdot \frac{y}{\beta - y} \quad (\text{Fig. 23d})$$

die Pseudoentfernung zweier Punkte  $A, B$  der  $y$ -Achse rein geometrisch auch durch die Gleichung

$$(AB) = \alpha \beta \cdot \frac{BA}{AU \cdot BU}$$

gegeben wird, wo  $U$  der Punkt  $y = \beta$  ist und die euklidischen Strecken auf der rechten Seite absolut zu nehmen sind. In dem speziellen Falle  $h = \alpha \cdot y$ ,  $\alpha > 0$ , ist die geodätische Pseudogeometrie die spezielle *Minkowskische Geometrie* mit den zwei Parallelen zur  $x$ -Achse im Abstände der Pseudoeinheitslänge als Eichkurve. Die Gleichung  $h = \frac{\mu}{2} \cdot \log \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}$

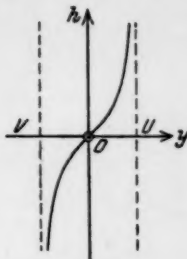


Fig. 23 a.

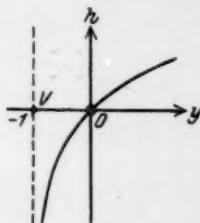


Fig. 23 b.

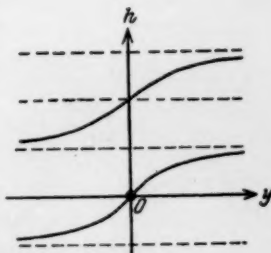


Fig. 23 c.



(vgl. Fig. 2, S. 674) gibt hier den speziellen Fall der *Hilbertschen Geometrie* für zwei Parallelgeraden als absolute Kurve.

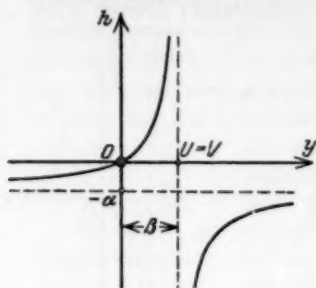


Fig. 23d.

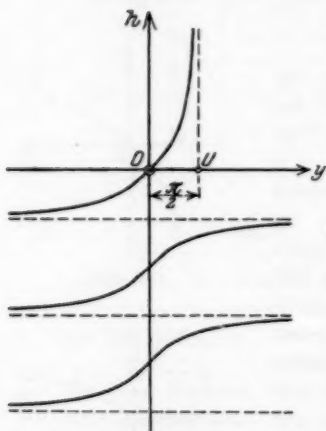


Fig. 23e.

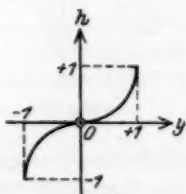


Fig. 23f.

Diese erweitert kürzesten Pseudogeometrien wollen wir als *spezielle geodätische Pseudogeometrien* bezeichnen. Eine eigenartige *singuläre Stellung* nimmt bei diesen Pseudogeometrien der euklidisch unendlich ferne Punkt  $S$  der  $x$ -Achse ein. Die Pseudoentfernung eines beliebigen Punktes  $P$  in der positiven oder negativen Richtung der  $x$ -Achse bis zum Punkte  $S$  ist gleich 0; die Pseudoentfernung eines Punktes  $P$  bis zum Punkte  $Q$  einer anderen Höhenlinie bleibt aber unverändert, wenn der Punkt  $Q$  sich in der positiven oder negativen Richtung der  $x$ -Achse ins Unendliche bewegt. Die Pseudoentfernung des singulären Punktes  $S$  von sich selbst ist eben unbestimmt.

Zu einer solchen speziellen geodätischen Pseudogeometrie wollen wir nun eine beliebige bekannte kürzeste Pseudogeometrie addiert denken. *Die Summe beider Pseudogeometrien ist dann auch eine kürzeste Pseudogeometrie*, in der allerdings der unendlich ferne Punkt  $S$  der  $x$ -Achse seine singuläre Stellung behält. Natürlich sind bei dieser Addition die absoluten Kurven der Addenden zu beachten. Man beachte z. B. die Addition der geodätischen Pseudogeometrie des Typus der Fig. 23e und der euklidischen, der elliptischen oder der hyperbolischen Geometrie. Im einzelnen sei noch folgendes bemerkt: Man kann auch von jeder geodätischen Pseudogeometrie *nur ein Gebiet zwischen zwei Höhenlinien* bei der Addition benutzen. Addieren wir z. B. die geodätische Pseudogeometrie des Parallelstreifens, dessen Geraden die Koten  $\alpha, \beta$  ( $\infty > \beta > \alpha > -\infty$ ) haben mögen, zu der elliptischen Geometrie

der ganzen Ebene, so gilt bei der kombinierten Pseudogeometrie der Dreieckssummensatz auch für alle solche Dreiecke  $ABC$ , welche den

euklidisch unendlich fernen singulären Punkt  $S$  einschließen (vgl. beispielsweise Fig. 24).

Man kann natürlich auch mehrere spezielle geodätische Pseudogeometrien mit kürzesten Pseudogeometrien addieren und insbesondere noch vor der Addition auch jede geodätische Pseudogeometrie durch eine projektive Transformation umformen. Bei der projektiven Umformung der einzelnen geodätischen Pseudogeometrie haben wir uns zu denken, daß die  $(x, y)$ -Koordinaten eine projektive Transformation erleiden, in jedem transformierten Punkt aber *dieselbe euklidische Senkrechte*  $h$  errichtet wird, wie in dem alten Punkt. Die Endpunkte der Senkrechten bilden dann das neue geodätische Gelände. Durch eine solche Transformation gelangt dann der singuläre Punkt jeder geodätischen Pseudogeometrie im allgemeinen ins euklidisch Endliche. So ist z. B. die Pseudogeometrie der Fig. 23d eine projektive Verallgemeinerung der einfachen Pseudogeometrie mit der Gleichung  $h = y$ , wobei diese Pseudogeometrie ja eine spezielle Minkowskische Geometrie ist. Ferner ergibt diese letzte Pseudogeometrie nach einer bestimmten projektiven Umformung als geodätisches Gelände ein rechtwinkliges hyperbolisches Paraboloid, dessen Gleichung  $h = c \cdot \frac{y}{x}$  ist, wobei jetzt der singuläre Punkt im Koordinatenanfangspunkt gelegen ist und die positive Konstante  $c$  die Höhe des Punktes  $x = y = 1$  ist. Aus dem Gelände der Fig. 23c mit der Gleichung  $h = c \cdot \arctg y$  ergibt sich bei bestimmter projektiver Umformung das Gelände mit der Gleichung  $h = c \cdot \arctg \frac{y}{x}$ , das eine gerade geschlossene Schraubenfläche darstellt.

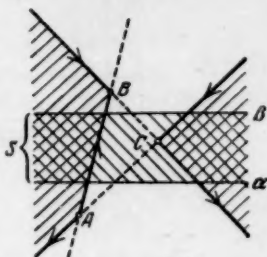


Fig. 24.

Endlich können wir auch noch solche geodätische Pseudogeometrien benutzen, deren Gelände durch eine (windschiefe) geradlinige Fläche gegeben wird, deren Erzeugenden zur  $(x, y)$ -Ebene parallel sind, ohne daß sie eine Senkrechte zur  $(x, y)$ -Ebene schneiden. Als Beispiele dieser Art seien genannt: das *allgemeine hyperbolische Paraboloid* in solcher Lage, daß die Erzeugenden zur  $(x, y)$ -Ebene parallel sind, also auch eine Erzeugende in der  $(x, y)$ -Ebene selbst gelegen ist. (Ein solches Paraboloid wird durch die Gleichung  $y = \alpha z \cdot (x - \beta z)$  gegeben, wo  $\alpha, \beta$  positive Konstante sind und  $z = h$  ist.) Ferner: die *gerade offene Schraubenfläche* mit zur  $(x, y)$ -Ebene senkrechter Achse, d. h. die Schraubenfläche, welche entsteht, wenn längs der Achse eine sie senkrecht kreuzende Gerade verschraubt wird. Endlich: die *Fläche mit den Gleichungen*

$$x = r \cdot \cos \varphi + \varrho \cdot \sin \varphi,$$

$$y = r \cdot \sin \varphi + \varrho \cdot \cos \varphi,$$

$$z = h = q \cdot \sin \varphi \quad (q > 0)$$

mit den Parametern  $\varrho$ ,  $\varphi$  und den positiven Konstanten  $r$ ,  $q$ . Diese Fläche ergibt sich anschaulich am einfachsten, wenn man von einem Kreis-

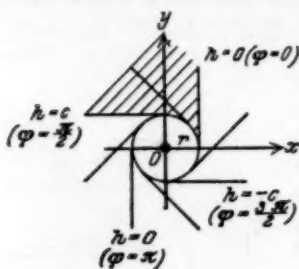


Fig. 25.

zylinder um die  $z$ -Achse ausgeht, ihn durch eine beliebige Ebene durch die  $y$ -Achse in einer Ellipse schneidet und in allen Punkten der Ellipse die zur  $(x, y)$ -Ebene parallele Tangente des Zylinders zieht. Wenn man will, kann man sich von vornherein auf die „Hälfte“ der Fläche für  $\varrho \geq 0$  beschränken oder gar auf einen Teil dieser Fläche, etwa den Teil für  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  (Fig. 25). Auf diese geodätische

Pseudogeometrien und ihre Verwendung

zum Aufbau kürzester Pseudogeometrien wollen wir aber im einzelnen hier nicht weiter eingehen.

Bei allen bisher betrachteten geodätischen Pseudogeometrien galt die starke Monodromie. Nun können wir uns aber leicht auch *solche geodätische Pseudogeometrien bilden, bei denen die starke Monodromie nicht gilt*. Hierzu führen uns zwei verschiedene Wege. Bei deren Besprechung

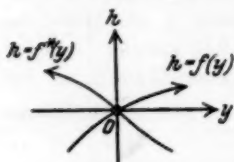


Fig. 26.

wollen wir uns aber auf solche geodätische Gelände beschränken, die durch zur  $(y, h)$ -Ebene senkrechte Zylinder dargestellt werden.

Wir können *erstens* für die Bewegung eines Punktes auf einer beliebigen Geraden des betrachteten Bereiches bei wachsenden bzw. abnehmenden  $y$ -Werten verschiedene Querschnittskurven  $h = f(y)$  bzw.  $h = f^*(y)$  für die

Zylinderflächen benutzen, wie die Fig. 26 in einem einfachen Beispiel zeigt. Die Kurven sollen natürlich wieder die Eigenschaft haben, daß ihre  $h$ -Ordinaten bei wachsenden bzw. abnehmenden Werten von  $y$  stetig zunehmen oder doch nicht abnehmen. Bei der einen oder anderen Bewegung soll dann die durchlaufene Strecke  $AB$  stets die Pseudolänge

$$(AB) = h_2 - h_1$$

haben, wo  $h_1, h_2$  die Koten der Punkte  $A, B$  bei der einen oder anderen Kurve sind. Sind beide Querschnittskurven Geraden, so haben wir wieder eine spezielle Minkowskische Geometrie vor uns.

Man erkennt leicht:

*Auch für diese geodätischen Pseudogeometrien gilt der erweiterte Dreieckssummensatz für alle (den singulären Punkt  $S$  nicht enthaltenden) Dreiecke des in Betracht kommenden Bereiches.*

Diese geodätischen Pseudogeometrien sind daher wie die früheren bei der Addition mit kürzesten Pseudogeometrien zu benutzen. Als ein Beispiel sei etwa die Pseudogeometrie genannt, die sich aus den geodätischen Pseudogeometrien mit den Kurven (vgl. Fig. 23c)

$$h = f(y) = \alpha \cdot \arctan y$$

und

$$h = f^*(y) = -\beta \cdot \arctan y \quad (\alpha > \beta > 0)$$

und aus der elliptischen Geometrie zusammensetzt.

Wir können zweitens als Querschnitt des geodätischen Zylinders eine beliebige Kurve  $h = f(y)$  wählen, die also zwar stetig sein soll, aber bei wachsenden Werten  $y$  auch bald zu-, bald abnehmen soll (Fig. 27). Die Pseudolänge einer vom Punkte  $A$  bis zum Punkte  $B$  durchlaufenen Strecke  $AB$  eines solchen gegebenen Bereiches soll jetzt aber durch die Formel gegeben sein

$$(AB) = h_2 - h_1,$$

wo  $h_1, h_2$  wieder die entsprechenden Koten der Punkte  $A, B$  bedeuten. Es ist dann im allgemeinen  $(AB) \neq (BA)$ ; auch können die Strecken *negative* Pseudolängen haben. Jetzt gilt stets für ein (den singulären Punkt  $S$  nicht enthaltendes) Dreieck  $ABC$  des in Betracht kommenden Bereiches die Gleichung

$$(AC) + (CB) = (AB).$$

Wir setzen nun der Einfachheit halber für einen Augenblick voraus, daß die Kurve  $h = f(y)$  differenzierbar sei (ohne daß der Differentialquotient  $f'(y)$  stetig zu sein braucht) und nehmen an, daß  $|f'(y)|$  in dem Bereiche stets  $\leq C$  ist, wo  $C$  eine positive endliche Konstante ist. Nun sei z. B. zu einer solchen gegebenen geodätischen Pseudogeometrie die mit einer solchen Konstanten  $c$  multiplizierte euklidische Geometrie addiert, daß nunmehr jede Strecke eine *positive* Pseudolänge in der kombinierten Pseudogeometrie erhält. Dies ist der Fall, wenn  $c > C$  ist. Dann gilt in dieser kombinierten Pseudogeometrie der Dreieckssummensatz, aber nicht die starke Monodromie.

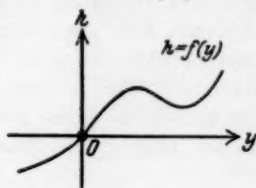


Fig. 27.

## § 6.

## Allgemeine geodätische Pseudogeometrien.

Nunmehr wollen wir annehmen, daß für einen Bereich eine beliebige geodätische Karte mit ihren Höhenkurven gegeben sei. Das zugehörige geodätische Gelände sei durch die Gleichung  $h = f(x, y)$  festgelegt, wo wir  $f(x, y)$  als eine stetige Funktion des Bereiches voraussetzen. Für diesen Bereich soll die allgemeine geodätische Pseudogeometrie folgendermaßen bestimmt sein: Jede Strecke  $AB$  des Bereiches soll die Pseudolänge haben

$$(AB) = h_b - h_a,$$

wo  $h_a$  und  $h_b$  die Koten, Höhen, der Punkte  $A, B$  sind. Die Strecke  $AB$  hat also eine positive oder negative oder verschwindende Pseudolänge, je nachdem  $h_b \geq h_a$  ist. Auch gilt nicht die starke Monodromie, vielmehr ist stets  $(AB) = -(BA)$ . (Man mag hier vielleicht an einen Radfahrer denken, für den bei einem Gelände die auf die Karte bezogenen Wege bei der Hin- oder Rückfahrt auch nicht gleichwertig sind.) Für jedes Dreieck  $ABC$  im Innern des Bereiches gilt aber jetzt stets  $(AC) + (CB) = (AB)$ , d. h. alle Wege von einem Punkte  $A$  bis zu einem anderen Punkte  $B$  in dem Bereiche sind einander pseudogleich. (Als Beispiele für solche geodätische Karten in einem Bereiche denke man etwa auch an die jetzt in der projektiven Ebene gedeuteten Kurvennetze  $u = \text{konst.}$  bzw.  $v = \text{konst.}$  in der  $(x, y)$ -Ebene bei einer komplexen Funktion  $w = u + iv = f(z)$  mit ihren mannigfaltigen Singularitäten<sup>\*)</sup>.)

Wir wollen nun zu einer solchen für einen beliebigen Bereich definierten geodätischen Pseudogeometrie z. B. die mit einer positiven Konstanten  $c$  multiplizierte euklidische Geometrie addieren. Wir setzen aber jetzt voraus, daß die größte Steigung  $\left| \frac{dh}{ds} \right|$ , wo  $dh$  der dem euklidischen Bogenelement  $ds$  entsprechende Auf- oder Abstieg ist, wieder  $\leq C$  ist, wo  $C$  eine positive endliche Konstante ist. Nun soll  $c > C$  sein. Dann erkennt man: In der kombinierten Pseudogeometrie sind jetzt alle Pseudolängen von Strecken positiv. (Insbesondere haben die Höhenkurven jetzt dieselbe Pseudolänge wie bei der überlagerten euklidischen Geometrie.) Für die kombinierte Pseudogeometrie gilt auch der Dreieckssummensatz; sie ist also eine kürzeste Pseudogeometrie, und zwar eine solche ohne starke Monodromie. Als ein allgemeineres Beispiel sei noch das folgende erwähnt: Es sei als geodätisches Gelände die Halbkugel  $h = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$  über dem

<sup>\*)</sup> Vgl. etwa die Modelle des reellen und imaginären Teiles bestimmter komplexer Funktionen, die unter der Leitung von Herrn W. Dyck im Verlage der Firma Martin Schilling in Leipzig als Serie XIV erschienen sind.

Einheitskreis gegeben und hierzu die mit der positiven Konstanten  $c$  multiplizierte hyperbolische Geometrie mit dem Einheitskreis als absolute Kurve addiert. Obwohl hier keine endliche Größe  $C$  existiert, sind doch in der kombinierten Pseudogeometrie alle Pseudolängen stets und nur *positiv*, wenn  $c \geq \frac{1}{2\mu}$  gewählt wird, wie man leicht nachrechnet (vgl. zum Beweise wieder die auf die Fig. 2 sich beziehende Betrachtung für  $\alpha = 1$  und  $\tanh \frac{1}{\mu} < 1$  oder  $\mu > 0$ ). *Die kombinierte Pseudogeometrie ist eine kürzeste hyperbolische ohne starke Monodromie mit nur einer absoluten Kurve.*

Denken wir den gegebenen Bereich jetzt von einer Höhenkurve begrenzt (Fig. 28), so gilt in der geodätischen Pseudogeometrie überhaupt für jedes Dreieck  $ABC$ , auch wenn eine oder mehrere Ecken *außerhalb* des Bereiches liegen, der Satz: *Die Summe der Pseudolängen für die auf den Seiten  $AC$  und  $CB$  im Innern des Bereiches liegenden Strecken ist stets gleich der Pseudolänge der auf der Seite  $AB$  im Innern des Bereiches liegenden Strecken.* Wir können also auch z. B. die mit einer hinreichend großen Konstanten  $c$  multiplizierte euklidische Geometrie der *ganzen* Ebene zu der geodätischen Pseudogeometrie addiert denken. Die kombinierte Pseudogeometrie ist wieder eine kürzeste ohne starke Monodromie.

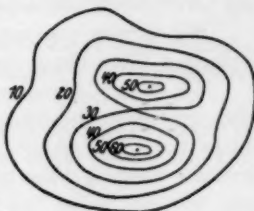


Fig. 28.

Natürlich können wir ja statt der euklidischen Geometrie entsprechend auch einmal eine hyperbolische oder elliptische Geometrie hinzuaddieren. Besonderes Interesse bietet vor allem die entsprechende Addition einer geodätischen Pseudogeometrie für einen von einer Höhenkurve begrenzten Bereich mit einer elliptischen Geometrie, was, wie man sich leicht überzeugt, stets so möglich ist, daß alle Strecken eine positive Pseudolänge bekommen: *Die kombinierte Pseudogeometrie ist dann eine kürzeste elliptische Pseudogeometrie ohne starke Monodromie* (vgl. S. 682). In ihr sind trotzdem alle vollen Geraden gleich lang. Durch die auch stets in brauchbarer Weise mögliche Addition der hyperbolischen Geometrie mit einer allgemeinen geodätischen Pseudogeometrie, deren Bereich vielleicht den absoluten Kegelschnitt enthält oder von einer Höhenkurve begrenzt wird und ganz innerhalb des absoluten Kegelschnittes liegt oder von zwei innerhalb des absoluten Kegelschnittes verlaufenden Bogen von Höhenkurven und im übrigen von dem absoluten Kegelschnitt selbst begrenzt wird, gewinnen wir wieder *eine hyperbolische Pseudogeometrie ohne starke Monodromie und mit nur einer absoluten Kurve.*

Wir können selbstverständlich auch zunächst für die *ganze* projektive Ebene eine geodätische Karte aufstellen oder auch *mehrere* geodätische Karten für einzelne von Höhenkurven begrenzte Bereiche, eventuell auch für ringförmige, von zwei Höhenkurven begrenzte Bereiche (wobei wir auch das Innere der inneren Höhenkurve als ein gleich hohes Plateau ansehen können), und dann erst eine oder mehrere geeignete kürzeste Pseudogeometrien zu der geodätischen Pseudogeometrie addieren<sup>9)</sup>. (Ein einfaches Beispiel einer geodätischen Karte der *ganzen* Ebene mag etwa dadurch gegeben sein, daß die Kreise um den Koordinatenanfangspunkt die Höhenkurven sind und die Koten  $r$  für  $0 \leq r \leq 1$  und  $\frac{1}{r}$  für  $1 \leq r \leq \infty$  besitzen, wo  $r$  der Radius der Kreise ist. Oder aber wir denken an ein über die ganze Ebene ausgebreitetes Gelände, welches radial vom Anfangspunkt aus „wellenartig“ gestaltet ist.)

Wir können uns nun aber auch noch folgende Erweiterung unserer bisherigen Betrachtung denken:

Wir wollen einmal zu einer geodätischen Pseudogeometrie innerhalb eines gegebenen Bereiches die mit einer Konstanten  $c$  multiplizierte euklidische Geometrie addiert denken, wo jetzt  $c \leq C$  ist und  $C$  eine wirklich erreichte Steigung bedeutet und diese Größe auch nicht mehr endlich zu sein braucht, wobei jedoch das Gelände dabei nicht in einer endlichen Strecke senkrecht ansteigt. Dann wird die kombinierte Pseudogeometrie zwar auch eine kürzeste sein, *doch werden jetzt auch negative und verschwindende Pseudolängen zugelassen sein.*

Ferner sei noch bemerkt: Bisher haben wir uns ja auf Bereiche beschränkt, in denen nur reguläre Punkte liegen. Natürlich können wir jetzt auch bei der Ausdehnung dieser Bereiche etwa solche singulären Punkte zulassen, wie wir solche im § 4 besprochen haben, d. h. das geodätische Gelände kann auch senkrecht ansteigende Teile haben, eventuell nur in einem einzigen Punkte. Man denke sich beispielsweise ein Gelände, das im Innern eines Kreises die Höhe 0, im Äußern die Höhe 1 besitzt, längs des Kreises also senkrecht ansteigt, und addiere zu der zugehörigen geodätischen Pseudogeometrie die euklidische Geometrie der ganzen Ebene.

## § 7.

### Gebrochene Linien der Ebene als kürzeste Linien.

Wir können weiter auch an ein überhängendes geodätisches Gelände denken, z. B. an ein zylindrisches Gelände mit dem in der Fig. 29 oder 30 gegebenen Querschnitt. Im letzteren Falle z. B. haben wir uns die geo-

<sup>9)</sup> Wer mit der Arbeit des Herrn Hamel vertraut ist, wird auch unschwer unsere Betrachtungen mit jenen in Verbindung bringen können.



dätische Karte mit einer Falte längs den den Punkten  $S_1, S_2$  entsprechenden Abszissenlinien versehen zu denken („plissierte“ Karte, allgemeiner: eine Karte mit beliebigen Falten oder Taschen). Bei unserem Beispiel wollen wir uns die Karte einfach in eine schlichte Ebene ausgezogen, auseinandergefaltet denken (Fig. 31). Dann erkennt man leicht: Auch jetzt gilt, daß für jedes Dreieck  $ABC$  der ursprünglichen Karte in einem durch zwei Abszissenlinien begrenzten Streifen  $(AC) + (CB) = (AB)$  ist, ja, daß überhaupt jeder Weg vom Punkte  $A$  nach dem Punkte  $B$  dieselbe Pseudolänge in der geodätischen Pseudogeometrie besitzt (vgl. die Fig. 31 für den mitsamt einem Dreieck  $ABC$  auseinandergefalteten Streifen).

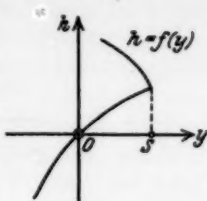


Fig. 29.

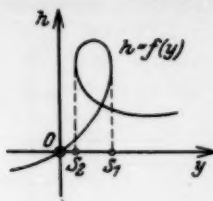


Fig. 30.

Lassen wir andererseits etwa auch einmal die euklidische Geometrie in der mit einer solchen Falte plissierten Ebene gelten, so ist die kürzeste Verbindungslinie der Punkte  $A, B$ , die zugleich oberhalb bzw. unterhalb der zu dem Punkte  $S_1$  bzw.  $S_2$  gehörenden Abszissenlinie in der gegebenen Ebene liegen, in der auseinandergefalteten Ebene der Fig. 31 die gestrichelte Strecke  $AB$  selbst, die beim Zusammenfallen eine *gebrochene Linie* ergibt. Bei der kombinierten Pseudogeometrie, die durch Addition der euklidischen Geometrie und der geodätischen Pseudogeometrie sich ergibt, ist dann dieselbe gebrochene Linie wie soeben kürzeste Linie. Die einzelnen Strecken der gebrochenen Linie fallen nur dann in dieselbe Gerade, wenn die Punkte  $A, B$  auf derselben Ordinatenlinie liegen. Die einzelnen Strecken bilden aber stets paarweise gleiche Winkel mit der Kante des Streifens, in der sie zusammenstoßen (vgl. die Anschauung, daß dieser kürzeste Weg ein Lichtstrahl von  $A$  nach  $B$  ist, der an den Kanten der Falte gespiegelt wird). Ein anderes Beispiel sei noch durch die Gleichung  $h = f(y) = \pm \sqrt{1 - y^2}$  gegeben (Fig. 32a), wenn wir wieder zu dieser geodätischen Pseudogeometrie etwa die euklidische Geometrie für den dreifach oder auch 5-, 7-,  $(n+1)$ -fach überdeckten Streifen der  $(x, y)$ -Ebene (entsprechend dem ein- oder mehrmaligen Umlaufen des Kreises der Fig. 32a) hinzunehmen. Wenn die

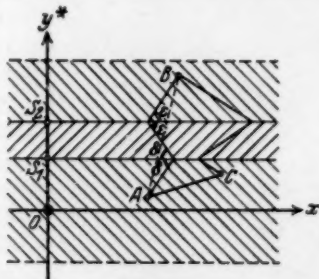


Fig. 31.

Punkte  $A, B$  nicht derselben Bedeckung des Streifens angehören (Fig. 32b), so besteht ihre kürzeste Verbindungslinie wieder aus der *Aneinanderreihung von Strecken*, aus einer an den begrenzenden Geraden *gebrochenen Linie*.

Ferner sei noch die Aufgabe genannt: Gegeben sei die Ebene mit einer Falte, die von zwei Kreisbogen  $k_1$  und  $k_2$  mit den Mittelpunkten  $M_1, M_2$



Fig. 32a.

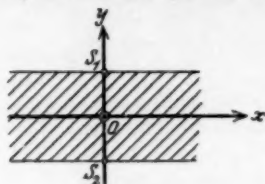


Fig. 32b.

begrenzt sei, wie die Fig. 33 zeigt. Es soll der kürzeste Weg bei Annahme der euklidischen Geometrie zwischen zwei Punkten  $A, B$  analytisch und graphisch bestimmt werden, wenn die euklidische Strecke  $AB$  die Falte durchschneidet.

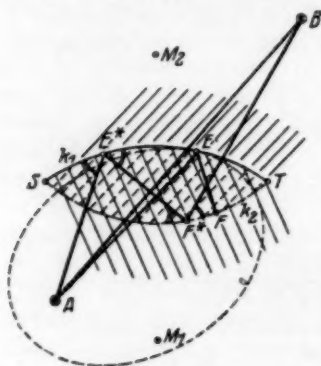


Fig. 33.

Wir wollen uns einmal auf den Fall beschränken, daß der Punkt  $A$  innerhalb des Kreises um  $M_1$  und der Punkt  $B$  innerhalb des Kreises um  $M_2$  gelegen ist, doch weder  $A$  mit  $M_1$  noch  $B$  mit  $M_2$  zusammenfällt, wie in der Fig. 33. Ist dann  $F$  ein beliebiger Punkt des Bogens  $k_2$ , so wollen wir zunächst die Frage beantworten: *Welches ist der kürzeste Weg, der von dem Punkte  $A$  über einen Punkt des Bogens  $k_1$  nach dem Punkte  $F$  führt?*

Es seien zunächst die Punkte  $A$  und  $F$  voneinander verschieden; auch mögen sie nicht symmetrisch zu der Senkrechten von  $M_1$  auf  $AF$  liegen. Unter allen

Ellipsen mit denselben Brennpunkten  $A, F$  gibt es dann stets und nur eine, welche innerhalb des Kreises um  $M_1$  liegt und ihn in einem Punkte  $E$  berührt. Liegt der Punkt  $E$  auf dem Bogen  $k_1$ , so ist  $AE + EF$  der gesuchte kürzeste Weg, dessen beide Strecken auch gleiche Winkel mit der Tangente im Punkte  $E$  bilden. Liegt der Punkt  $E$  nicht auf dem Kreisbogen  $k_1$ , so ist  $AT + TF$  oder  $AS + SF$  der kürzeste Weg. Beachten wir weiter auch die Möglichkeiten, daß die Punkte  $A$  und  $F$  zusammenfallen oder symmetrisch zu dem Lote von  $M_1$  auf  $AF$  liegen, so ergibt sich allgemein: Für jeden Punkt  $F$  des Bogens  $k_2$  gibt es einen

oder zwei solche, dann aber einander gleiche kürzeste Wege. Es gilt dann, denjenigen Punkt  $F$  zu bestimmen, daß bei Hinzufügen der Strecke  $FB$  der gesamte Weg ein kürzester Weg ist. Wir wollen uns mit diesen Ausführungen zur Lösung der gestellten obigen Aufgabe hier begnügen. In der Fig. 33 ist ein solcher kürzester Weg  $AE^*F^*B$  eingezeichnet; er bildet je gleiche Winkel mit den Tangenten der Kreisbogen in  $E^*$  und  $F^*$ .

Endlich sei noch folgendes Beispiel angeführt: Es sei ein zur  $x$ -Achse parallel orientiertes prismatisches Gelände gegeben, dessen Querschnitt längs der  $y$ -Achse durch die Fig. 34a gegeben sei. Die Fig. 34b sei der Grundriß der Fig. 34a in der  $(x, y)$ -Ebene. In dieser möge nun folgende Pseudogeometrie gelten: Außerhalb des schraffierten Streifens soll die euklidische Geometrie gelten. Eine Strecke  $PQ$  in dem schraffierten Streifen soll jedoch die Pseudolänge besitzen, die gleich der entsprechenden Strecke des ansteigenden Geländes ist. Es soll nun die kürzeste Linie z. B. zwischen zwei Punkten  $A, B$  bestimmt werden, die auf verschiedenen Seiten des Streifens liegen. Die Lösung ergibt sich sofort, wenn wir das über der  $(x, y)$ -Ebene sich erhebende prismatische Gelände mitsamt den entsprechenden auf ihm liegenden Punkten  $A, B$  in eine Ebene auseinanderziehen, die erhaltenen Punkte  $A^*, B^*$  dann geradlinig verbinden und diese Verbindungslinie als eine gebrochene Linie in die  $(x, y)$ -Ebene übertragen. Das Resultat ist in die Fig. 34b eingezeichnet, woselbst die mit  $\varphi$  bezeichneten Winkel einander gleich sind. Man übersieht so-

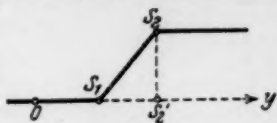


Fig. 34 a.

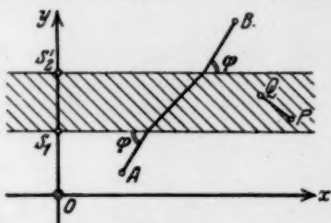


Fig. 34 b.

Aufgabe sich abändern und verallgemeinern läßt<sup>10)</sup>. Es ist gewiß auch interessant, in den letzten Beispielen das „Strahlenbüschel“ aller von einem Punkte  $A$  ausgehenden kürzesten Linien zu betrachten, z. B. in der Pseudogeometrie der Fig. 33 das Strahlenbüschel, das vom Punkte  $A = S$  der Figur ausgeht.

Wie alle unsere Betrachtungen sich auch auf den Raum übertragen lassen, wollen wir hier nicht weiter ausführen.

<sup>10)</sup> Wir haben hier den engsten Anschluß an meine Arbeit gewonnen: Konstruktion kürzester Wege in einem Gelände, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechanik 8 (1928), S. 45.

# Das Problem der Irrfahrt ohne Richtungsbeschränkung und die Randwertaufgabe der Potentialtheorie.

Von

Rudolf Lüneburg in Göttingen.

## Inhalt.

	Seite
I. Die Irrfahrt ohne Richtungsbeschränkung . . . . .	702
§ 1. Genauere Formulierung des Problems . . . . .	702
§ 2. Die Irrfahrt im unbeschränkten Gebiet . . . . .	704
§ 3. Die Irrfahrt in einem beschränkten Gebiet . . . . .	710
II. Das Randwertproblem der Gleichung $\odot u = 0$ . . . . .	716
§ 1. Integralumformungen . . . . .	716
§ 2. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	718
§ 3. Die Konvergenz der Folge $u_{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}_n d\varphi$ . . . . .	719
§ 4. Die mathematische Hoffnung im Falle der Irrfahrt bei absorbierendem Rand . . . . .	723
III. Der Grenzübergang $l \rightarrow 0$ . . . . .	727
§ 1. Die Konvergenz der Grundlösungen . . . . .	728
§ 2. Die Konvergenz der Lösung des Randwertproblems . . . . .	731
§ 3. Die Randbedingung . . . . .	735

Das für zahlreiche Anwendungen — z. B. Diffusion und Wärmeleitung — wichtige und auch an sich interessante Problem der Irrfahrt kann in seiner einfachsten Form folgendermaßen formuliert werden. Eine Substanzmenge, die wir uns mit der anfänglichen Dichte  $w(x, y)$  über der Ebene ausgebreitet denken, sei einem Austauschprozeß unterworfen, wobei die in einem Punkt konzentrierte Substanz sich — etwa in der Zeiteinheit — gleichmäßig auf einen Kreis vom Radius  $l$  (mittlere Weglänge) um diesen Punkt verteilt. Gefragt wird nach der Dichte  $w(x, y; n)$  als Funktion des Ortes

und der Anzahl  $n$  der Austauschvorgänge von jeweils der Schrittlänge  $l$ . Ist speziell die Substanz am Anfang in einem Punkt konzentriert, so handelt es sich um das eigentliche Irrfahrtenproblem: Ein Partikel unternimmt von diesem Punkt als Ausgangsort einen polygonalen Irrweg, bei dem jede Seite die Länge  $l$  besitzt und jede Richtung gleichwahrscheinlich ist. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Partikel nach  $n$  Schritten in einen bestimmten Bereich der Ebene hineingelangt?

Dieses von Pearson zuerst aufgestellte und von anderen Autoren<sup>1)</sup> auf verschiedene Weise behandelte Problem erfährt eine bemerkenswerte Modifikation, wenn dem umherirrenden Partikel bzw. der dem obigen Austauschprozeß unterworfenen Substanz Randbedingungen auferlegt werden. Auf die Bedeutung zweier Sonderfälle solcher Randbedingungen ist zuerst von R. Courant hingewiesen worden<sup>2)</sup>: Entweder soll das Partikel, wenn es an den Rand eines geschlossenen Gebietes trifft, dort reflektiert — etwa nach dem Reflexionsgesetz — oder aber absorbiert werden, so daß in diesem Falle die Irrfahrt am Rande endigt.

Schon in klassischen Untersuchungen zur Theorie der Diffusion und Wärmeleitung ist der Zusammenhang der für das Irrfahrtenproblem maßgebenden Funktionalgleichung mit der Potential- bzw. Wärmeleitungsgleichung aufgezeigt und zur Lösung von Diffusionsproblemen benutzt worden. In der Tat gehen die Funktionalgleichungen der Irrfahrt im Limes  $l \rightarrow 0$  in partielle Differentialgleichungen über. Vom mathematischen Standpunkte aus bedarf die Tatsache, daß dabei auch die Lösungen des Irrfahrtenproblems gegen die Lösungen des entsprechenden Differentialgleichungsproblems konvergieren — so daß also die letzteren als asymptotische Lösungen des Irrfahrtenproblems angesehen werden können — einer Begründung. Im Falle der Irrfahrt in einem Gitternetz, wobei dem Partikel für seine Schritte nur die vier Achsenrichtungen zur Verfügung stehen, ist diese Theorie in der unter <sup>2)</sup> zitierten Arbeit entwickelt worden.

In der vorliegenden Abhandlung, die sich an die Probleme und Begriffsbildungen der obigen Arbeit anschließt und auf Anregung von Herrn R. Courant entstanden ist, wird eine Behandlung des allgemeinen Irr-

<sup>1)</sup> Lord Rayleigh, On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *Phil. Mag.* 10 (1880), pp. 73–78; *Scient. Papers* 1, p. 491. Kluyver, *Proceedings of Royal Acad. Amsterdam* 8 (1905), pp. 341–350.

Lord Rayleigh, On the Problem of Random Vibrations and of Random Flights in one, two or three Dimensions. *Phil. Mag.* 37 (1919), pp. 321–347; *Scient. Papers* 6, p. 604.

G. Pólya, Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Irrfahrt, *Mitt. der phys. Ges. Zürich* 19 (1919).

<sup>2)</sup> Courant, Friedrichs, Lewy, Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Math. Annalen* 100.

fahrtenproblems ohne Richtungsbeschränkung durchgeführt. Das Hauptziel ist dabei der Grenzübergang von der Lösung des Irrfahrtenproblems zur Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Vorher jedoch werden wir uns einen Einblick in die Theorie der allgemeinen Funktionalgleichung des Irrfahrtenproblems verschaffen und die weitgehende Analogie mit der klassischen Theorie der Potentialgleichung erkennen.

## I. Die Irrfahrt ohne Richtungsbeschränkung.

### § 1.

#### Genauere Formulierung des Problems.

Wir formulieren die Aufgabe zunächst für eine Irrfahrt von allgemeinerem Typus, indem wir die Voraussetzung, daß das Partikel nur gleich-große Schritte ausführt, fallen lassen. Die Substanzmenge, die bei einer einmaligen Ausbreitung der Substanz  $w(x, y)$  von einem Bereich  $\omega_1$  zu einem Bereich  $\omega_2$  gelangt, sei durch das Integral

$$\iint_{\omega_2} dx dy \iint_{\omega_1} K(\xi, \eta; x, y) w(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

gegeben, wobei  $K(x, y; \xi, \eta)$  eine vorgegebene stückweise stetige Funktion ist, die den Bedingungen

$$K \geq 0 \quad \text{und} \quad \iint_{-\infty}^{\infty} K(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta = 1$$

genügt. Dabei ist das Integral als Gebietsintegral über die ganze  $\xi, \eta$ -Ebene aufzufassen. Die sich nach einer  $n$ -maligen solchen Ausbreitung ergebende Dichte  $w(x, y; n)$  läßt sich sodann auf Grund der Rekursionsformel

$$(1) \quad w(x, y; n+1) = \iint_{-\infty}^{\infty} K(\xi, \eta; x, y) w(\xi, \eta; n) d\xi d\eta$$

aus der Anfangsverteilung ermitteln. Wir erhalten

$$w(x, y; n) = \iint_{-\infty}^{\infty} K_n(\xi, \eta; x, y) w(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

wobei mit  $K_n(x, y; \xi, \eta)$  der „ $n$ -te iterierte Kern“

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \dots \iint_{-\infty}^{\infty} K(x, y; s_1, t_1) K(s_1, t_1; s_2, t_2) \dots K(s_n, t_n; \xi, \eta) ds_1 dt_1 ds_2 dt_2 \dots ds_n dt_n$$

bezeichnet ist.

Wir können die Rekursionsformel (1) auch als Funktionalgleichung für die Funktion  $w(x, y; n)$  auffassen. Die Aufgabe ist alsdann, Lösungen von (1) zu bestimmen, die für  $n=0$  mit einer vorgegebenen Funktion  $w(x, y)$  übereinstimmen.

Um das zugehörige Irrfahrtenproblem zu behandeln, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen geradlinigen Schrittes vom Punkte  $x, y$  zum Punkte  $\xi, \eta$  durch die Funktion  $K(x, y; \xi, \eta)$  charakterisiert wird, legen wir die Anfangsverteilung

$$(*) \quad \begin{cases} w_0(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\pi \delta^2}, & \text{für } (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < \delta^2, \\ w_0(x, y; \xi, \eta) = 0, & \text{für } (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 > \delta^2 \end{cases}$$

zugrunde und lassen sodann  $\delta$  gegen Null konvergieren; es ergeben sich im Limes die iterierten Kerne  $K_n(x, y; \xi, \eta)$ , so daß die Wahrscheinlichkeit, in  $n$  Schritten vom Punkte  $x, y$  in einen Bereich  $\omega$  zu gelangen, durch das Integral

$$\iint_{\omega} K_n(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta$$

gegeben wird.

Die Funktionalgleichung für die Irrfahrt bei fester Schrittweite  $l$  erhalten wir nun durch einen Grenzübergang.

Wir setzen

$$K_\varepsilon(x, y; \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi l \varepsilon} & \text{innerhalb des Kreisringes } (l - \varepsilon)^2 < (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < (l + \varepsilon)^2 \\ 0 & \text{außerhalb „ „ „ } (l - \varepsilon)^2 < (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < (l + \varepsilon)^2 \end{cases}$$

Ist die Ausgangsfunktion  $w(x, y)$  stückweise stetig, so konvergieren die Funktionen  $w_\varepsilon(x, y; n)$ , die der Gleichung

$$w_\varepsilon(x, y; n+1) = \frac{1}{2\pi l} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{l-\varepsilon}^{l+\varepsilon} r \int_0^{2\pi} w_\varepsilon(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi) d\varphi dr$$

genügen, mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen die entsprechenden Lösungen der Gleichung

$$(2) \quad w(x, y; n+1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x + l \cos \varphi, y + l \sin \varphi, n) d\varphi$$

oder abgekürzt geschrieben

$$w(x, y; n+1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{w}(x, y; n) d\varphi.$$

Es ist einleuchtend, daß unser Irrfahrtenproblem einem Anfangswertproblem dieser Funktionalgleichung entspricht.

Die Funktionalgleichung (2) erfährt im Falle der Irrfahrt in einem Gebiet mit absorbierendem Rand eine Modifikation, indem in der Nähe des Randes die Integration nur über den Teil des Kreises um  $x, y$  auszudehnen ist, der noch in  $G$  liegt. Dies läuft offenbar darauf hinaus



Lösungen der Gleichung (2) zu bestimmen, die in einem Randstreifen der Breite  $l^3$ ) identisch verschwinden.

Wir werden so auf die allgemeinere *Randwert-Anfangswertaufgabe* geführt, Lösungen von (2) zu ermitteln, die am Rande  $R$  bei jedem  $n$  vorgeschriebene Werte annehmen und für  $n = 0$  mit einer vorgegebenen Funktion übereinstimmen. Auf dem Rande  $R$  soll also die Substanzverteilung ungeändert bleiben — jede von  $G$  nach  $R$  gelangende Substanz wird sofort abgeführt und jede von  $R$  nach  $G$  eintretende Substanz sofort ersetzt.

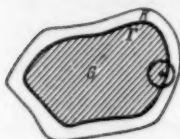


Fig. 1.

Im Innern von  $G$  entsteht sodann eine Folge von Verteilungen  $w(x, y; n)$ , die — das werden wir beweisen — konvergiert. Die Grenzfunktion  $u(x, y)$  ist unabhängig von der Ausgangsfunktion und genügt der Funktionalgleichung

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}(x, y) d\varphi$$

oder, wenn wir das Symbol

$$\odot u = \frac{1}{l^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \bar{u} d\varphi - 2\pi u \right\}$$

einführen, der Gleichung  $\odot u = 0$ ; sie löst das entsprechende Randwertproblem dieser Gleichung.

## § 2.

### Die Irrfahrt im unbeschränkten Gebiet.

Wenn die Irrfahrt eines Partikels keinerlei Randbedingungen unterworfen wird, so lassen sich die betreffenden Wahrscheinlichkeiten explizit darstellen. Obwohl diese sogenannte *Pearson'sche Aufgabe* (vgl. S. 701) bereits mehrfach behandelt worden ist, soll hier eine neue Ableitung durchgeführt werden, die neben ihrer Einfachheit den Vorteil bietet, sich auf allgemeinere Probleme dieser Art übertragen zu lassen.

Wir versuchen durch den Ansatz

$$w(x, y; n) = u(x, y) \psi(n)$$

spezielle Lösungen der Gleichung (2) zu gewinnen. Ist  $\lambda$  ein Eigenwert und  $u(x, y)$  eine zugehörige Eigenfunktion der Gleichung

$$\lambda u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}(x, y) d\varphi,$$

<sup>3)</sup> Ein solcher Randstreifen  $R$  besteht aus Randpunkten und allen äußeren Punkten von  $G$ , die von  $G$  einen Abstand kleiner als  $l$  besitzen.

so ist  $\lambda^n u(x, y)$  eine Lösung der gewünschten Form. Da nun jede Exponentialfunktion  $e^{i(sx+ty)}$  für den Eigenwert

$$\lambda(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{il(s \cos \varphi + t \sin \varphi)} d\varphi = J_0(l\sqrt{s^2+t^2})$$

diese Gleichung löst, so erhalten wir als spezielle Lösungen von Gleichung (2) die Funktionen

$$J_0^n(l\sqrt{s^2+t^2}) e^{i(sx+ty)}.$$

Hierbei ist  $J_0(x)$  die nullte Besselsche Funktion. Auf Grund des linearen Charakters von (2) ergeben sich durch Superposition allgemeinere Lösungen, z. B. bei beliebigem  $A(s, t)$  in der Form

$$\iint_{-\infty}^{\infty} A(s, t) J_0^n(l\sqrt{s^2+t^2}) e^{i(sx+ty)} ds dt,$$

falls das Integral konvergiert. In unserer Aufgabe müssen wir  $A(s, t)$  so zu bestimmen suchen, daß jenes Integral für  $n=0$  die Anfangsverteilung  $w(x, y)$  darstellt. Die Anwendung des Fourierschen Integraltheorems<sup>4)</sup> ergibt

$$A(s, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{-i(sx+ty)} dx dy$$

und daher

$$(3) \quad w(x, y; n) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} J_0^n(l\sqrt{s^2+t^2}) ds dt \iint_{-\infty}^{\infty} w(\xi, \eta) e^{i[s(x-\xi)+t(y-\eta)]} d\xi d\eta.$$

Setzen wir insbesondere

$$(*) \quad \begin{cases} w(x, y) = \frac{1}{\pi \delta^2}, & \text{für } x^2 + y^2 < \delta^2, \\ w(x, y) = \frac{1}{2\pi \delta^2}, & \text{" } x^2 + y^2 = \delta^2, \\ w(x, y) = 0, & \text{" } x^2 + y^2 > \delta^2, \end{cases}$$

so finden wir für  $A(s, t)$  den Ausdruck

$$A(\varrho \delta) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{J_1(\varrho \delta)}{\varrho \delta}, \quad \varrho = \sqrt{s^2+t^2};$$

hier ist  $J_1(x)$  die erste Besselsche Funktion. Führen wir nunmehr in der sich für  $w(x, y; n)$  ergebenden Darstellung

$$\iint_{-\infty}^{\infty} J_0^n(\varrho l) A(\varrho \delta) e^{i(sx+ty)} ds dt$$

<sup>4)</sup> Die Anwendung dieses Theorems ist u. a. dann erlaubt, wenn  $w(x, y)$  im Innern eines endlichen Bereiches stückweise glatt ist und außerhalb dieses Bereiches verschwindet.

Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}x &= r \cos \vartheta, & s &= \varrho \cos \alpha, \\y &= r \sin \vartheta, & t &= \varrho \sin \alpha\end{aligned}$$

ein, so folgt nach einigen Umformungen

$$(4) \quad w_\delta(x, y; n) = 2\pi \int_0^\infty \varrho J_0^n(\varrho l) A(\varrho \delta) J_0(\varrho r) d\varrho.$$

Bei dem Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0$  konvergiert  $A(\varrho \delta)$  für jedes feste  $\varrho$  gegen den Wert  $\frac{1}{4\pi^2}$ . Für  $n \geq 2$  konvergiert auch die Darstellung (4) und zwar gegen das Integral

$$(5) \quad w(x, y; n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varrho J_0^n(\varrho l) J_0(\varrho r) d\varrho.$$

In Übereinstimmung mit dem von Kluyver und Lord Rayleigh gefundenen Resultat ist  $w(x, y; n) dx dy$  die Wahrscheinlichkeit, bei einer vom Nullpunkt ausgehenden Irrfahrt in  $n$  Schritten zu einem Flächenelement  $dx dy$  um den Punkt  $x, y$  zu gelangen.

Wir betrachten anschließend die Summe

$$H(x, y; n) = w(x, y; 0) + \dots + w(x, y; n),$$

die man — multipliziert mit  $dx dy$  — als die *mathematische Hoffnung* bezeichnet, im Verlauf von  $n$  Schritten einmal das Flächenelement  $dx dy$  zu erreichen. Bei dem Austauschprozeß einer Substanz bedeutet diese Summe die gesamte Substanzmenge, die im Verlauf von  $n$  Schritten das Flächenelement passiert.

Zwecks späterer Verwendung wollen wir für die spezielle Anfangsverteilung (\*) die sich aus (4) ergebende Darstellung der mathematischen Hoffnung

$$H(x, y; n) = 2\pi \int_0^\infty \varrho \frac{1 - J_0^{n+1}(\varrho l)}{1 - J_0(\varrho l)} A(\varrho \delta) J_0(\varrho r) d\varrho$$

auf ihr Verhalten bei dem Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  untersuchen. Man erkennt leicht, daß  $H(x, y; n)$  bei wachsendem  $n$  über alle Grenzen wächst. Bilden wir jedoch für irgend zwei von 0, 0 verschiedene Punkte — etwa für die Punkte  $(x, y)$  und  $(0, 1)$  — die Differenz  $H(x, y; n) - H(0, 1; n)$ , so entsteht eine konvergente Folge

$$\begin{aligned}h_\delta(r, n) &= H(x, y; n) - H(0, 1; n) = 2\pi \int_0^\infty \frac{\varrho A(\varrho \delta)}{1 - J_0(\varrho l)} (J_0(\varrho r) - J_0(\varrho)) d\varrho \\&\quad - 2\pi \int_0^\infty \frac{\varrho A(\varrho \delta)}{1 - J_0(\varrho l)} J_0^{n+1}(\varrho l) (J_0(\varrho r) - J_0(\varrho)) d\varrho.\end{aligned}$$

Denn hier strebt das zweite Integral mit wachsendem  $n$  gleichmäßig in  $r \leq r_0$  gegen Null. Wir erhalten also als Summe der für  $r \leq r_0$  gleichmäßig konvergenten Reihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} (w(x, y; v) - w(0, 1; v))$$

den Ausdruck

$$(6) \quad h_\delta(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\varrho A(\varrho \delta)}{1 - J_0(\varrho l)} (J_0(\varrho r) - J_0(\varrho)) d\varrho.$$

Wenden wir auf diese Summe den Operator  $\odot$  an, so folgt

$$l^2 \odot h_\delta(r) = l^2 \odot \sum_{v=0}^{\infty} (w(x, y; v) - w(0, 1; v)) = \sum_{v=0}^{\infty} l^2 \odot w(x, y; v),$$

also wegen

$$l^2 \odot w(x, y; v) = 2\pi (w(x, y; v+1) - w(x, y; v))$$

$$(7) \quad l^2 \odot h_\delta(r) = -2\pi w(x, y; 0).$$

Dies bedeutet genauer

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{l^2}{2\pi} \odot h_\delta(r) = -\frac{1}{\pi \delta^2}, & \text{für } r < \delta, \\ = -\frac{1}{2\pi \delta^2}, & \text{" } r = \delta, \\ = 0, & \text{" } r > \delta. \end{cases}$$

Da die Funktionen

$$w(x, y; 0), w(x, y; 1), \dots, w(x, y; m-1)$$

für  $r > (m-1)l + \delta$  verschwinden, kann  $H(x, y; n)$  auch durch die Summe

$$H(x, y; n) = \sum_{v=m}^n w(x, y; v) \quad (m \leq n)$$

dargestellt werden. Die Funktion  $h_\delta(r)$  wird also — wenn  $r$  und 1 größer als  $ml$  angenommen wird — auch durch das Integral

$$(9) \quad h_\delta(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\varrho A(\varrho \delta)}{1 - J_0(\varrho l)} J_0^m(\varrho l) (J_0(\varrho r) - J_0(\varrho)) d\varrho$$

bestimmt.

Nunmehr lassen wir  $\delta$  gegen Null konvergieren. Die Funktion  $A(\varrho \delta)$  strebt dabei für jedes  $\varrho$  gegen  $\frac{1}{4\pi^2}$ ; wählen wir  $m$  hinreichend groß — z. B.  $m \geq 4$  —, so konvergiert auch das Integral (9) gleichmäßig für jedes  $r \geq ml$  gegen den Ausdruck

$$(10) \quad h(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varrho J_0^m(\varrho l)}{1 - J_0(\varrho l)} [J_0(\varrho r) - J_0(\varrho)] d\varrho.$$

Diese Funktion  $h(r)$  genügt für jedes  $r \geq 4l$  der Gleichung  $\odot h = 0$ ; wir bezeichnen sie aus später zu ersiehenden Gründen als *Grundlösung* der Gleichung  $\odot u = 0$ .

Wir bemerken noch, daß  $h(r)$  bei hinreichend großem  $r$  beliebig oft differenzierbar ist. Die Existenz der ersten Ableitung ist bereits für  $m \geq 6$ , also für  $r \geq 6l$  gewährleistet. Denn das Integral (10) ist für  $r \geq 4l$  und das durch formales Differenzieren gewonnene Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{\varrho^2 J_0^m(\varrho l)}}{1 - J_0(\varrho l)} J_0'(\varrho r) d\varrho$$

für  $m \geq 6$ , also für  $r \geq 6l$ , gleichmäßig konvergent. Nach einem bekannten Satz ergibt sich daher für  $r \geq 6l$

$$(11) \quad h'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{\varrho^2 J_0^m(\varrho l)}}{1 - J_0(\varrho l)} J_0'(\varrho r) d\varrho$$

und für  $r \geq 8l$

$$(12) \quad h''(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{\varrho^2 J_0^m(\varrho l)}}{1 - J_0(\varrho l)} J_0''(\varrho r) d\varrho$$

usw.

In analoger Weise läßt sich die räumliche Gleichung

$$w(x, y, z; n+1) = \frac{1}{4\pi} \iint \bar{w}(x, y, z; n) d\omega$$

behandeln — das Integral ist hier über die Einheitskugel um den Punkt  $x, y, z$  zu erstrecken, während  $\bar{w}(x, y, z; n)$  zur Abkürzung für

$$w(x+la, y+lb, z+lc), \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

geschrieben ist. Durch den Produktansatz

$$w(x, y, z; n) = u(x, y, z) \psi(n)$$

werden wir auf die speziellen Lösungen

$$\left( \frac{\sin t \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}{t \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \right)^n e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

geführt, die von den drei Parametern  $\alpha, \beta, \gamma$  abhängig sind. Bei der Ausgangsfunktion

$$(**) \quad \begin{cases} w(x, y, z) = \frac{3}{4\pi \delta^3}, & \text{für } x^2 + y^2 + z^2 < \delta^2, \\ w(x, y, z) = 0, & \text{für } x^2 + y^2 + z^2 > \delta^2 \end{cases}$$

ergibt sich für die Verteilung nach  $n$  Schritten

$$(13) \quad w_n(x, y, z; n) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \varrho \left( \frac{\sin \varrho l}{\varrho l} \right)^n A(\varrho \delta) \sin \varrho r d\varrho,$$

wobei

$$A(\varrho \delta) = \frac{3}{8\pi^3} \frac{\sin(\varrho \delta) - \varrho \delta \cos \varrho \delta}{(\varrho \delta)^3},$$

ist. Lassen wir nun  $\delta$  gegen Null konvergieren, so gilt bei jedem festen  $\varrho$ :

$$A(\varrho \delta) \rightarrow \frac{1}{8\pi^3} \text{ und für } n \geq 2$$

$$(14) \quad w(x, y, z; n) = \frac{1}{2\pi^3 r} \int_0^\infty \varrho \left( \frac{\sin \varrho l}{\varrho l} \right)^n \sin \varrho r d\varrho$$

— wiederum in Übereinstimmung mit dem Resultat von Kluyver und Lord Rayleigh.

Die Summe der ersten  $n$  Verteilungen  $w_\delta(x, y, z; \nu)$  führt hier im Gegensatz zu den Ergebnissen in der Ebene direkt zu einer konvergenten Folge. Denn in der Gleichung

$$H(x, y, z; n) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \frac{\varrho A(\varrho \delta)}{1 - \frac{\sin \varrho l}{\varrho l}} \sin \varrho r d\varrho - \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \frac{\varrho A(\varrho \delta)}{1 - \frac{\sin \varrho l}{\varrho l}} \left( \frac{\sin \varrho l}{\varrho l} \right)^{n+1} \sin \varrho r d\varrho$$

konvergiert das zweite Integral mit wachsendem  $n$  gleichmäßig in  $r$  gegen Null. Im Limes  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich

$$(15) \quad H(x, y, z) = \sum_0^\infty w(x, y, z; \nu) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \varrho \frac{A(\varrho \delta)}{1 - \frac{\sin \varrho l}{\varrho l}} \sin \varrho r d\varrho$$

und damit in der Form  $H(x, y, z) dx dy dz$  die gesamte Substanzmenge, die ein Raumelement  $dx dy dz$  passiert. Die Funktion  $H(x, y, z) = h_\delta(r)$  genügt dabei der Gleichung

$$(16) \quad \frac{l^3}{4\pi} \odot h_\delta(r) = -w(x, y, z; 0)$$

oder genauer

$$(16') \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{l^3}{4\pi} \odot h_\delta = -\frac{3}{4\pi \delta^3}, & \text{für } r < \delta, \\ = -\frac{3}{8\pi \delta^3}, & \text{" } r = \delta, \\ = 0, & \text{" } r > \delta. \end{array} \right.$$

Beachten wir nun, daß die Funktionen  $w(x, y, z; 0) \dots w(x, y, z; m-1)$  verschwinden, wenn  $r > (m-1)l + \delta$  ist, so folgt genau wie im ebenen Fall, daß  $h_\delta(r)$  auch in der Form

$$(17) \quad h_\delta(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \frac{\varrho A(\varrho \delta)}{1 - \frac{\sin \varrho l}{\varrho l}} \left( \frac{\sin \varrho l}{\varrho l} \right)^m \sin \varrho r d\varrho$$

dargestellt werden kann.

Ist  $m \geq 3$ , also  $r \geq 3l$ , so läßt sich der Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0$  unter dem Integralzeichen ausführen. Für die mathematische Hoffnung  $h(r)$  des Irrfahrtenproblems ergibt sich sodann der Ausdruck

$$(18) \quad h(r) = \frac{1}{2\pi^2} r \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin \varrho l}{\varrho l}\right)^m}{1 - \frac{\sin \varrho l}{\varrho l}} \sin \varrho r d\varrho.$$

Auch hier fügen wir noch die Bemerkung hinzu, daß  $h(r)$  Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt, wenn nur  $r$  hinreichend groß ist. Z. B. ist für  $r \geq 4l$

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} h'(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\varrho^2 \left(\frac{\sin \varrho l}{\varrho l}\right)^m}{1 - \frac{\sin \varrho l}{\varrho l}} \left(\frac{\sin \varrho r}{\varrho r}\right)' d\varrho, \\ \text{und für } r \geq 5l \\ h''(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\varrho^4 \left(\frac{\sin \varrho l}{\varrho l}\right)^m}{1 - \frac{\sin \varrho l}{\varrho l}} \left(\frac{\sin \varrho r}{\varrho r}\right)'' d\varrho. \end{array} \right.$$

### § 3.

#### Die Irrfahrt im beschränkten Gebiet.

##### 1. Absorbierender Rand.

Ist das Gebiet  $G$  von einem absorbierenden Rand  $\Gamma$  umgeben, so haben wir nach § 1 Lösungen der Funktionalgleichung (2) zu suchen, die auf dem Randstreifen  $R$  verschwinden. Wir werden durch den Ansatz

$$w(x, y; n) = u(x, y) \psi(n)$$

auf Lösungen der Form

$$\lambda^n u(x, y)$$

geführt, wobei  $\lambda$  ein Eigenwert und  $u(x, y)$  eine Eigenfunktion der Gleichung

$$\lambda u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u} d\varphi$$

mit der Randbedingung  $u = 0$  auf  $R$  ist. Die Eigenwerte  $\lambda$  bilden hier eine abzählbare Folge

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots$$

und man kann versuchen, die Lösung des Problems in eine unendliche Reihe

$$w(x, y; n) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \lambda_r^n u_r(x, y)$$

zu entwickeln.



Bei Zugrundelegung der Verteilung (\*) erhalten wir Funktionen  $w_1(x_0, y_0; x, y; n)$ , die für  $n \geq 2$  im Limes  $\delta \rightarrow 0$  in die Wahrscheinlichkeiten  $W(x_0, y_0; x, y; n)$  übergehen, in  $n$  Schritten vom Punkte  $x_0, y_0$  zum Punkte  $x, y$  zu gelangen, ohne den Rand zu treffen. Bei Benutzung der normierten Eigenfunktionen  $u_r(x, y)$  erhalten wir für sie die Darstellung

$$(20) \quad W(x_0, y_0; x, y; n) = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r^n u_r(x_0, y_0) u_r(x, y) \quad (n \geq 2).$$

Ohne auf eine nähere Begründung dieser Tatsachen einzugehen, wollen wir für eine spätere Verwendung diese Wahrscheinlichkeiten auf ihre Stetigkeits-eigenschaften hin untersuchen.

Es sei zunächst  $w_0(x, y)$  eine beliebige stückweise stetige Anfangsverteilung; denken wir  $w_0(x, y)$  außerhalb von  $G$  durch  $w_0 \equiv 0$  fortgesetzt, so ist die Verteilung nach dem ersten Schritt

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{w}_0 d\varphi$$

und nach dem zweiten Schritt

$$w_2(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\psi \int_0^{2\pi} w_0(x + l \cos \varphi + l \cos \psi, y + l \sin \varphi + l \sin \psi) d\varphi.$$

Dabei sind mit  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Winkel der Radien gegen die  $x$ -Achse bezeichnet, die vom Punkte  $x, y$  aus nach den Schnittpunkten des Kreises  $k_1$ <sup>5)</sup> um  $x, y$  mit dem Rande  $\Gamma$  hinführen.

Durch die Substitution

$$\xi = x + l(\cos \varphi + \cos \psi)$$

$$\eta = y + l(\sin \varphi + \sin \psi)$$

erhalten wir

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{k_1} \frac{w_0(\xi, \eta)}{r \sqrt{(2l)^2 - r^2}} d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi^2} \iint_{k_2} \frac{w_0(\xi, \eta)}{r \sqrt{(2l)^2 - r^2}} d\xi d\eta,$$

wobei  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  ist und  $k_1$  bzw.  $k_2$  die in Fig. 2 und Fig. 3 gekennzeichneten Teilgebiete des Kreises  $k_1$  um  $x, y$  bedeuten.

Ist der Punkt  $x, y$  von  $\Gamma$  um mehr als  $2l$  entfernt, so gilt einfach

$$w_2(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{k_1} \frac{w_0(\xi, \eta)}{r \sqrt{(2l)^2 - r^2}} d\xi d\eta.$$

<sup>5)</sup> Mit  $k_1, k_2, \dots$  bezeichnen wir im folgenden Kreise mit den Radien  $l, 2l, \dots$



Fig. 2.

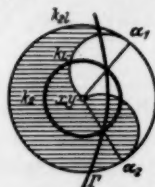


Fig. 3.

Hieraus folgt, daß die Funktionen  $w_2^{\delta}(x_0, y_0; x, y)$ , die aus der Anfangsverteilung (\*) nach zwei Schritten entstehen, mit  $\delta \rightarrow 0$  in jedem Kreisring

$$\varepsilon \leq r \leq 2l - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

um den Punkt  $x_0, y_0$  gleichmäßig gegen die Wahrscheinlichkeit  $W_2(x_0, y_0; x, y)$  konvergieren. Wir finden explizit

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} W_2(x_0, y_0; x, y) &= \frac{1}{\pi^2 r \sqrt{(2l)^2 - r^2}}, \\ r &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &\text{in den von } k_1 \text{ und } k_2 \text{ überdeck-} \\ &\text{ten Teilen von } k_{21} \text{ um } x_0, y_0 \\ &\text{(vgl. Fig. 4),} \\ W_2(x_0, y_0; x, y) &= \frac{1}{2\pi^2 r \sqrt{(2l)^2 - r^2}} \\ &\text{in den nur von einem der Gebiete } k_1 \text{ und } k_2 \\ &\text{überdeckten Teilen von } k_{21}, \\ W_2(x_0, y_0; x, y) &= 0 \text{ in den nicht überdeckten Teilen von } k_{21} \text{ und} \\ &\text{außerhalb von } k_{21}. \end{aligned} \right.$$

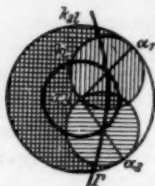


Fig. 4.

Insbesondere gilt bei ungehinderter Ausbreitung

$$(22) \quad w_2(x_0, y_0; x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 r \sqrt{(2l)^2 - r^2}}, & \text{für } 0 < r < 2l, \\ 0, & \text{für } r > 2l. \end{cases}$$

Nach § 2 ist diese Funktion auch durch das Integral  $\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \rho J_0^2(\rho l) J_0(\rho r) d\rho$  darstellbar.

Die Funktion  $W_2$  ist also für  $\varepsilon \leq r \leq 2l - \varepsilon$  stückweise stetig; sie besitzt im Punkte  $x_0, y_0$  und auf dem Kreise  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (2l)^2$  Singularitäten der Form  $\frac{1}{r}$  bzw.  $\frac{1}{\sqrt{(2l)^2 - r^2}}$ .

Nach dem dritten Schritt erhalten wir — zunächst bei endlichem  $\delta$  —

$$w_3^{\delta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i \bar{w}_2^{\delta} d\varphi$$

und sehen hieraus, daß  $w_3^{\delta}$  in jedem Gebiet, für dessen Punkte  $x, y$  der zugehörige Kreis  $k_1$  den Punkt  $x_0, y_0$  vermeidet und den Kreis  $k_{21}$  um  $x_0, y_0$  unter einem von Null verschiedenen Winkel trifft — also in jedem die Kreisringe

$$l - \varepsilon < r < l + \varepsilon, \quad 3l - \varepsilon < r < 3l$$

ausschließenden Gebiet — gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion

$$W_3(x_0, y_0; x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{W}_3 d\varphi$$

ist also abgesehen von den Punkten der Kreise  $r=l$ ,  $r=3l$  stetig und besitzt hier logarithmische Singularitäten. Dies letztere folgt leicht aus der bei ungehinderter Ausbreitung geltenden Darstellung<sup>6)</sup>

$$w_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varrho J_0^2(\varrho l) J_0(\varrho r) d\varrho.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich, daß die Funktion  $w_4^b$  in jedem den Punkt  $x_0, y_0$  ausschließenden Gebiet gleichmäßig gegen

$$W_4(x_0, y_0; x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{W}_4 d\varphi$$

konvergiert, daß  $W_4$  in jedem solchen Gebiet gleichmäßig stetig ist und im Punkte  $x_0, y_0$  logarithmisch unendlich wird.

Die Konvergenz der folgenden Verteilungen  $w_n^b$ ,  $n > 4$ , ist sodann in jedem endlichen Gebiet gleichmäßig; d. h. die *Wahrscheinlichkeiten*  $W_n(x_0, y_0; x, y)$  sind für  $n > 4$  stetig.

Analoge Betrachtungen lassen sich im dreidimensionalen Raume durchführen. Hier ist die Konvergenz bereits für  $n \geq 3$  gleichmäßig und führt zu stetigen Grenzfunktionen.

## 2. Reflektierender Rand.

Im Falle der Irrfahrt in einem Gebiet mit reflektierendem Rand läßt sich die Methode der Eigenfunktionen ebenfalls zur Darstellung der Lösung verwenden, wie wir an dem speziellen Beispiel einer rechteckigen Umrandung zeigen wollen. Wir nehmen an, daß ein Partikel, das den Rand trifft, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen wird. Die Schrittlänge  $l$  soll jedoch erhalten bleiben. Denken wir uns einen den Rand treffenden Schritt zunächst ungehindert ausgeführt, so ist der Punkt, zu dem das Partikel so gelangen würde, gerade der Spiegelpunkt zu dem wirklichen Endpunkt des Schrittes in bezug auf die reflektierende Seite. Trifft das Partikel eine der Ecken des Rechtecks, so soll es in seiner Bahn rückwärts reflektiert werden.

<sup>6)</sup> Bei absorbierendem Rand gilt nämlich  $W_3 \leq w_3$ , so daß in diesem Falle in der Nähe des Randes  $\Gamma$  die Singularität sicher nicht von höherer als logarithmischer Ordnung sein kann.

Ist nun  $w(x, y)$  die Anfangsverteilung einer Substanz, die über dem Rechteck

$$0 \leq x \leq a$$

$$0 \leq y \leq b$$

ausgebreitet ist, und ist  $w(x, y; n)$  die Verteilung nach  $n$ -maliger Ausbreitung, so genügt  $w(x, y; n)$  der Relation

$$w(x, y; n+1) = \frac{1}{2\pi l} \int_0^C \bar{w}(x, y; n) ds.$$

Hierbei ist  $C$  im Rechteck

$$l \leq x \leq a-l$$

$$l \leq y \leq b-l$$

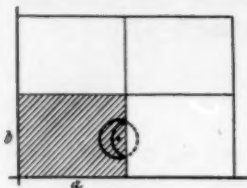


Fig. 5.

der Kreis vom Radius  $l$  um den Punkt  $x, y$ ; in dem restlichen Randstreifen aber besteht  $C$  aus dem im Rechteck verlaufenden Teil des Kreises um  $x, y$  und aus dem Spiegelbild des über den Rand hinausgehenden Teiles (vgl. Fig. 5). Denken wir uns jedoch  $w(x, y)$  und  $w(x, y; n)$  durch Spiegelung an den Seiten des Rechtecks in das Rechteck

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$0 \leq y \leq 2b$$

und dann periodisch mit der Periode  $2a$  bzw.  $2b$  fortgesetzt, so genügt die erweiterte Funktion  $w(x, y; n)$  der alten Funktionalgleichung

$$(2) \quad w(x, y; n+1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{w}(x, y; n) d\varphi^*).$$

Die Funktionen

$$J_0^n(l\sqrt{v^2 + \mu^2}) \cos \frac{\pi}{a} vx \cos \frac{\pi}{b} \mu y \quad (v, \mu = 0, 1, 2, \dots)$$

sind Lösungen der Gleichung (2) und besitzen die verlangten Symmetrie- und Periodizitätseigenschaften. Wir versuchen also, die Funktionen  $w(x, y; n)$  in eine Reihe der Form

$$(23) \quad \frac{c_{00}}{4} + \sum_{v, \mu=1}^{\infty} c_{v, \mu} J_0^n(l\sqrt{v^2 + \mu^2}) \cos \frac{\pi}{a} vx \cos \frac{\pi}{b} \mu y$$

zu entwickeln. Da diese Reihe für  $n=0$  die gegebene Funktion  $w(x, y)$

<sup>\*)</sup> Man überzeugt sich leicht, daß auch die in der Nähe der Ecken auftretende mehrfache Reflexion und die Reflexion in den Ecken selbst durch den obigen Kunstgriff berücksichtigt wird.

darstellen muß, so ergeben sich für die Koeffizienten die Ausdrücke

$$(24) \quad c_{\nu, \mu} = \frac{1}{ab} \int_0^{2a} \int_0^{2b} w(\xi, \eta) \cos \frac{\pi}{a} \nu \xi \cos \frac{\pi}{b} \mu \eta d\xi d\eta.$$

Wählen wir insbesondere  $w(x, y) = \frac{1}{4\delta^2}$  in einem kleinen Quadrat von der Seitenlänge  $2\delta$  um den Punkt  $x_0, y_0$  als Mittelpunkt,  $w(x, y) = \frac{1}{8\delta^2}$  auf der Seite des Quadrates und  $w(x, y) = 0$  im übrigen Teil des Rechtecks  $0 \leq x < a; 0 \leq y < b$ , so folgt

$$c_{\nu, \mu} = \frac{4}{ab} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{a} \nu \delta}{\frac{\pi}{a} \nu \delta} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{b} \mu \delta}{\frac{\pi}{b} \mu \delta} \cos \frac{\pi}{a} \nu x_0 \cos \frac{\pi}{b} \mu y_0.$$

Mit  $\delta \rightarrow 0$  konvergiert jedes  $c_{\nu, \mu}$  gegen

$$\frac{4}{ab} \cos \frac{\pi}{a} \nu x_0 \cos \frac{\pi}{b} \mu y_0$$

und für  $n \geq 2$  auch die Reihe (8) gegen

$$(25) \quad W(x_0, y_0; x, y; n) \\ = \frac{1}{ab} + \sum_{\nu, \mu=1}^{\infty} J_0^n(l \sqrt{\nu^2 + \mu^2}) \cos \frac{\pi}{a} \nu x_0 \cos \frac{\pi}{b} \mu y_0 \cos \frac{\pi}{a} \nu x \cos \frac{\pi}{b} \mu y.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu, \mu=1}^{\infty} J_0^n(l \sqrt{\nu^2 + \mu^2}) \cos \frac{\pi}{a} \nu x_0 \cos \frac{\pi}{b} \mu y_0 \cos \frac{\pi}{a} \nu x \cos \frac{\pi}{b} \mu y$$

mit wachsendem  $n$  gegen Null konvergiert. Die Funktion  $w(x_0, y_0; x, y; n)$  nähert sich somit mehr und mehr dem konstanten Wert  $\frac{1}{ab}$ .

Durch eine ähnliche Betrachtung ergibt sich im Falle der räumlichen Irrfahrt in einem Rechteck

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq a \\ 0 &\leq y \leq b \\ 0 &\leq z \leq c \end{aligned}$$

für die Wahrscheinlichkeitsdichte die Darstellung

$$(26) \quad W(x_0, y_0, z_0; x, y, z; n) \\ = \frac{1}{abc} + \frac{8}{abc} \sum_{\nu, \mu, \lambda=1}^{\infty} \left( \frac{\sin l \sqrt{\nu^2 + \mu^2 + \lambda^2}}{l \sqrt{\nu^2 + \mu^2 + \lambda^2}} \right)^n \cos \frac{\pi}{a} \nu x_0 \cos \frac{\pi}{b} \mu y_0 \cos \frac{\pi}{c} \lambda z_0 \\ \times \cos \frac{\pi}{a} \nu x \cos \frac{\pi}{b} \mu y \cos \frac{\pi}{c} \lambda z.$$

## II. Das Randwertproblem der Funktionalgleichung $\odot u = 0$ .

Wir behandeln das folgende Randwertproblem. Es sei  $G$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit stückweise glatter Umrandung  $\Gamma$ ;  $R$  sei ein Randstreifen zu  $G$  von der Breite  $l$ , bestehe also aus Randpunkten und allen äußeren Punkten, die von  $G$  einen Abstand kleiner als  $l$  besitzen. Wir geben in einem  $G + R$  umfassenden Gebiet eine stückweise stetige Funktion  $f(x, y)$  vor und suchen eine Funktion  $u(x, y)$ , die im Innern von  $G$  der Gleichung  $\odot u = 0$  genügt und in  $R$  mit  $f(x, y)$  übereinstimmt.

### § 1.

#### Integralumformungen.

Für den Ausdruck  $\odot u$  bestehen eine Anzahl von Integralumformungen, die genau den Greenschen Formeln der Potentialtheorie entsprechen. Wir bilden mit Hilfe zweier stückweise stetiger Funktionen  $\psi(x, y)$  und  $\chi(x, y)$  das Gebietsintegral

$$D[\psi, \chi] = \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\psi - \bar{\psi}}{i} \right) \left( \frac{\chi - \bar{\chi}}{i} \right) d\varphi dx dy.$$

Die Existenz dieses Integrals ist sichergestellt, wenn die Existenz von  $\iint_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx dy$  und  $\iint_{-\infty}^{\infty} \chi^2 dx dy$  vorausgesetzt wird.

Durch Umformung des Integranden erhalten wir

$$\begin{aligned} D[\psi, \chi] &= \frac{1}{i^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} (2\psi\chi - \psi\bar{\chi} - \bar{\psi}\chi) d\varphi dx dy \\ &\quad + \frac{1}{i^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} (\bar{\psi}\bar{\chi} - \psi\chi + \psi\bar{\chi} - \bar{\psi}\chi) d\varphi dx dy. \end{aligned}$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$\underline{\psi} = \psi(x - l \cos \varphi, y - l \sin \varphi)$$

gesetzt. Durch Vertauschung der Integrationen nach  $x, y$  und  $\varphi$  erkennt man, daß das zweite Integral den Wert Null besitzt. Es ergibt sich also

$$(1) \quad \begin{cases} D[\psi, \chi] = -2 \iint_{-\infty}^{\infty} \psi \odot \chi dx dy \\ \quad \quad \quad = -2 \iint_{-\infty}^{\infty} \chi \odot \psi dx dy. \end{cases}$$

Sind zwei stückweise stetige Funktionen  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  nur im Gebiet  $G + R$  gegeben, so denken wir sie uns außerhalb von  $G + R$  durch

$u = 0$  und  $v = 0$  fortgesetzt; aus (1) folgt

$$(2) \quad \begin{cases} D[u, v] = -2 \iint_G u \odot v \, dx \, dy - 2 \iint_R u \left\{ \int_{\alpha} \bar{v} \, d\varphi - 2\pi v \right\} dx \, dy \\ \quad = -2 \iint_G v \odot u \, dx \, dy - 2 \iint_R v \left\{ \int_{\alpha} \bar{u} \, d\varphi - 2\pi u \right\} dx \, dy. \end{cases}$$

Dabei ist mit  $\alpha(x, y)$  der Teil des Integrationskreises um  $x, y$  bezeichnet, der noch im Gebiet  $G + R$  liegt.

Führen wir noch die Bezeichnung

$$\odot' u = \frac{1}{i^2} \left\{ \int_{\alpha} \bar{u} \, d\varphi - \alpha u \right\}$$

ein, so erhalten wir durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für  $D[u, v]$  schließlich die Identität

$$(3) \quad \iint_G (u \odot v - v \odot u) \, dx \, dy + \iint_R (u \odot' v - v \odot' u) \, dx \, dy = 0,$$

die ein genaues Analogon zu der bekannten Greenschen Formel

$$\iint_G (u \Delta v - v \Delta u) \, dx \, dy - \int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0$$

darstellt.

Zu einer anderen Identität, die später benutzt werden soll, gelangt man, indem man die identische Relation

$$(\psi - \bar{\psi})^2 = (\chi - \bar{\chi})^2 + (\psi - \chi + \bar{\psi} - \bar{\chi})^2 + 2(\chi - \bar{\psi})(\psi - \chi) + 2(\bar{\chi} - \psi)(\bar{\psi} - \bar{\chi})$$

zuerst nach  $\varphi$  und dann nach  $x$  und  $y$  über die Ebene integriert.  $\psi(x, y)$  und  $\chi(x, y)$  sollen dieselben Voraussetzungen wie oben erfüllen. Es ergibt sich

$$(4) \quad \begin{cases} D[\psi, \psi] = D[\chi, \chi] + \frac{1}{i^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} (\psi - \chi + \bar{\psi} - \bar{\chi})^2 d\varphi \, dx \, dy \\ \quad + \frac{4}{i^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left( 2\pi \chi - \int_0^{2\pi} \bar{\psi} \, d\varphi \right) (\psi - \chi) \, dx \, dy. \end{cases}$$

Insbesondere ist also, wenn

$$\chi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\psi} \, d\varphi$$

gilt,

$$D[\psi, \psi] = D[\chi, \chi] + \frac{1}{i^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} (\psi - \chi + \bar{\psi} - \bar{\chi})^2 d\varphi \, dx \, dy,$$

woraus sofort die Ungleichung

$$D[\chi, \chi] \leq D[\psi, \psi]$$

zu erkennen ist.



## § 2.

**Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems.**

Die Randwertaufgabe ist äquivalent mit dem folgenden *Variationsproblem*. Wir suchen unter allen stückweise stetigen Funktionen  $\psi(x, y)$ , die am Rande  $R$  mit  $f(x, y)$  übereinstimmen und außerhalb  $G + R$  identisch verschwinden, eine solche, für die der Ausdruck

$$D[\psi, \psi] = \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\psi - \bar{\psi}}{t} \right)^2 d\varphi dx dy$$

möglichst klein wird.

Der Beweis, daß jede Lösung dieses Variationsproblems auch das Randwertproblem löst, und ferner, daß diese Lösung eindeutig bestimmt ist, verläuft unter Benutzung der Formeln (1) und (2) in völliger Analogie zu den entsprechenden Beweisen der Potentialtheorie.

Um die *Existenz der Lösung* des Variationsproblems nachzuweisen, gehen wir von einer Minimalfolge

$$v_1(x, y), v_2(x, y), \dots, v_n(x, y), \dots$$

aus, für die der Ausdruck  $D[v_n]$  gegen die untere Grenze  $d$  strebt. Diese Folge ersetzen wir im Innern von  $G$  durch die „geglättete“ Folge

$$\omega_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{v}_n(x, y) d\varphi,$$

während auf dem Rande und außerhalb  $G + R$   $v_n$  ungeändert bleibt.

Die Folge  $\omega_n(x, y)$  ist nun wieder eine Minimalfolge. Denn nach Formel (4) gilt

$$\begin{aligned} D[\omega_n] &= D[v_n] - \frac{1}{t^2} \iint \int_0^{2\pi} (\omega_n - v_n + \bar{\omega}_n - \bar{v}_n)^2 d\varphi dx dy \\ &\quad - \frac{4}{t^2} \iint \left( 2\pi \omega_n - \int_0^{2\pi} \bar{v}_n d\varphi \right) (\omega_n - v_n) dx dy, \end{aligned}$$

und hier verschwindet das letzte Integral, da im Innern von  $G$  der Faktor  $2\pi \omega_n - \int_0^{2\pi} \bar{v}_n d\varphi$ , außerhalb von  $G$  aber  $\omega_n - v_n$  Null wird. Aus der sich so ergebenden Ungleichung

$$D[\omega_n] \leq D[v_n]$$

geht die Behauptung unmittelbar hervor.

Durch  $m$ -malige Anwendung dieses Glättungsprozesses erhalten wir eine Minimalfolge, die wir wieder mit  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$  bezeichnen wollen. Verstehen wir unter  $W_m(x, y; \xi, \eta)$  für  $m \geq 2$  die in I, § 3 gekennzeichneten Wahrscheinlichkeiten für die Irrfahrt mit absorbierendem Rand, so lassen sich die Funktionen  $\omega_n$  in der Form

$$(5) \quad \begin{aligned} \omega_n(x, y) = & \iint_G W_m(\xi, \eta; x, y) v_n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & + \iint_R \left( \sum_{\nu=1}^m W_\nu(\xi, \eta; x, y) \right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

auch direkt aus der ursprünglichen Folge gewinnen. Dabei ist unter  $\int_R W_1(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$  das Kurvenintegral  $\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \bar{f}(x, y) d\varphi - \sigma$  ist der auf  $R$  verlaufende Bogen des Kreises  $k_1$  um  $x, y$  — und unter  $\int_R W_\nu(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$  für  $\nu = 2, 3, 4$  das den Singularitäten von  $W_\nu$  entsprechende uneigentliche Integral zu verstehen.

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$F_m(x, y) = \iint_R \left( \sum_{\nu=1}^m W_\nu(\xi, \eta; x, y) \right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

wobei  $F_m(x, y)$  ebenso wie  $f(x, y)$  stückweise stetig ist, so gilt

$$\omega_n(x, y) = \iint_G W_m(\xi, \eta; x, y) v_n(\xi, \eta) d\xi d\eta + F_m(x, y).$$

Bereits für  $m = 5$  ist nun die Funktion  $W_5(\xi, \eta; x, y)$  in jedem abgeschlossenen Teilgebiet  $G'$  *gleichmäßig stetig*. Infolgedessen ist die Folge  $\omega_n(x, y) - F_5(x, y)$  in  $G'$  *gleichmäßig stetig*, wenn  $v_n(x, y)$  in  $G$  gleichmäßig beschränkt ist. Dieser Voraussetzung können wir aber  $v_n(x, y)$  unterwerfen, wir werden sogleich eine solche spezielle Minimalfolge kennenlernen. Also läßt sich aus  $\omega_n(x, y) - F_5(x, y)$  eine Teilfolge auswählen, die in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von  $G$  gleichmäßig konvergiert. Dann konvergiert aber auch die entsprechende Teilfolge der  $\omega_n(x, y)$  in den Teilgebieten von  $G'$ , wo  $F_5(x, y)$  stetig ist, gegen eine Grenzfunktion  $u(x, y)$ , die im Innern von  $G$  stückweise stetig ist und Variations- und Randwertproblem löst.

### § 3.

$$\text{Die Konvergenz der Folge } u_{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \bar{u}_n d\varphi.$$

Im Anschluß an die anschauliche Deutung durch den Austauschprozeß einer Substanzmenge (I, § 1) behandeln wir das folgende Problem. Es sei  $u_0(x, y)$  irgendeine stückweise stetige Funktion, die am Rande  $R$  die vor-

geschriebenen Randwerte  $f(x, y)$  annimmt. Wir betrachten die Folge

$$(6) \quad \begin{aligned} u_{n+1}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}_n(x, y) d\varphi && \text{innerhalb } G, \\ u_n(x, y) &= f(x, y) && \text{auf } R, \\ u_n(x, y) &= 0 && \text{außerhalb } G + R, \end{aligned}$$

die im Gebiet  $G$  die einzelnen Verteilungen der Substanz charakterisiert, die anfänglich mit der Dichte  $u_0(x, y)$  über  $G$  ausgebreitet war.

Wir beweisen zunächst, daß (5) eine *Minimalfolge* ist. Da jedes Glied der Folge aus dem Vorangehenden durch den in § 2 benutzten Glättungsprozeß hervorgeht, so folgt genau wie dort

$$D[u_{n+1}] \leq D[u_n].$$

Die Zahlen  $D[u_n]$  konvergieren also monoton gegen einen Grenzwert  $D$ ; wir werden zeigen, daß dieser Grenzwert nicht von der speziellen Wahl der Ausgangsfunktion  $u_0(x, y)$ , sondern nur von den Randwerten abhängig ist.

Hierzu genügt es, festzustellen, daß für die Randwerte Null  $D[u_n]$  unabhängig von  $u_0(x, y)$  gegen den Wert Null konvergiert. Denn sind bei allgemeinen Randwerten  $f(x, y)$

$$\begin{aligned} u_0(x, y), u_1(x, y), \dots \\ v_0(x, y), v_1(x, y), \dots \end{aligned}$$

zwei für verschiedene Ausgangsfunktionen bestimmte Folgen (6), so bilden die Differenzen  $u_n(x, y) - v_n(x, y)$  ebenfalls eine solche Folge, jedoch mit den Randwerten Null. Konvergiert daher  $D[u_n - v_n]$  gegen Null, so folgt aus der Ungleichung

$$0 \leq (\sqrt{D[u_n]} - \sqrt{D[v_n]})^2 \leq D[u_n - v_n]$$

sofort, daß  $D[u_n]$  und  $D[v_n]$  denselben Grenzwert besitzen.

Um die Behauptung für die Randwerte Null zu beweisen, zeigen wir, daß die Folge

$$Q[u_n] = \iint_{G+R} u_n^2 dx dy$$

gegen Null konvergiert. Aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} D[u_n] &= \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left( \frac{u_n - \bar{u}_n}{r} \right)^2 d\varphi dx dy \\ &\leq \frac{4\pi}{r^2} \iint u_n^2 dx dy + \frac{2}{r^2} \iint \bar{u}_n^2 d\varphi dx dy \leq \frac{8\pi}{r^2} Q[u_n] \end{aligned}$$

folgt dann die Behauptung auch für  $D[u_n]$ .

Es sei  $F$  irgendein Teilgebiet von  $G$ ,  $S$  der äußere und  $\Sigma$  der innere Randstreifen von der Breite  $l$ . Wir bilden für dieses Gebiet  $F$  den Ausdruck

$$Q[u_{n+1}] = \iint_F u_{n+1}^2 dx dy + \iint_S u_{n+1}^2 dx dy$$

und ersetzen  $u_{n+1}$  im Innern von  $F$  durch das In-

tegral  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}_n d\varphi$ . Es ergibt sich durch Anwendung

der Schwarzschen Ungleichung

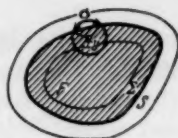


Fig. 6.

$$Q[u_{n+1}] \leq \frac{1}{2\pi} \iint_F \int_0^{2\pi} \bar{u}_n^2 d\varphi dx dy + \iint_S u_{n+1}^2 dx dy.$$

Vertauschen wir jetzt im ersten Integral die Integrationen nach  $\varphi$  und nach  $x$  und  $y$ , so folgt

$$Q[u_{n+1}] \leq \iint_F u_n^2 dx dy + \iint_S \frac{2\pi - \sigma}{2\pi} u_n^2 dx dy - \iint_\Sigma \frac{\sigma}{2\pi} u_n^2 dx dy + \iint_S u_{n+1}^2 dx dy,$$

— wobei  $\sigma(x, y)$  derjenige Bogen des Kreises vom Radius  $l$  um  $x, y$  ist, der nicht mehr in  $F$  liegt (Fig. 6) — und daraus endlich

$$(7) \quad Q[u_{n+1}] \leq Q[u_n] + \iint_S u_{n+1}^2 dx dy - \iint_\Sigma \frac{\sigma}{2\pi} u_n^2 dx dy.$$

Ist  $\Sigma^*$  irgendein Teilstreifen von  $\Sigma$ , so gilt mit diesem  $\Sigma^*$  die abgeleitete Ungleichung um so mehr:

$$(7^*) \quad Q[u_{n+1}] \leq Q[u_n] + \iint_S u_{n+1}^2 dx dy - \iint_{\Sigma^*} \frac{\sigma}{2\pi} u_n^2 dx dy.$$

Nunmehr wählen wir für  $F$  das Gebiet  $G$  selbst. Das über  $S = R$  erstreckte Randintegral  $\iint_R u_{n+1}^2 dx dy$  verschwindet infolge der Randbedingung, und wir erhalten

$$Q[u_{n+1}] \leq Q[u_n] - \iint_{\Sigma} \frac{\sigma}{2\pi} u_n^2 dx dy.$$

Hieraus folgt die Konvergenz der Folge  $Q[u_n]$  und weiter, daß  $\iint_\Sigma \frac{\sigma}{2\pi} u_n^2 dx dy$  und daher auch  $\iint_\Sigma u_n^2 dx dy$  gegen Null konvergiert.

Sodann wenden wir (7) auf das Gebiet  $G - \Sigma$  an. Mit  $Q'[u_n]$  sei das Integral

$$\iint_{G-\Sigma} u_n^2 dx dy + \iint_{\Sigma} u_n^2 dx dy$$

bezeichnet, das übrigens wegen  $\iint_R u_n^2 dx dy = 0$  denselben Wert wie  $Q[u_n]$  besitzt. Es folgt

$$Q'[u_{n+1}] \leq Q'[u_n] + \iint_{\Sigma} u_{n+1}^2 dx dy - \iint_{\Sigma} \frac{\sigma'}{2\pi} u_n^2 dx dy,$$

wobei jetzt  $\Sigma'$  ein innerer Randstreifen von  $G - \Sigma$  mit einer Breite kleiner als  $l$  ist. Da  $Q'[u_n] = Q[u_n] - \iint_R u_n^2 dx dy$  konvergiert und  $\iint_{\Sigma} u_{n+1}^2 dx dy$  den Grenzwert Null besitzt, so gilt auch

$$\iint_{\Sigma'} \frac{\sigma'}{2\pi} u_n^2 dx dy \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \iint_{\Sigma} u_n^2 dx dy \rightarrow 0.$$

Denken wir uns nun das Gebiet  $G$  in eine endliche Anzahl konzentrischer Streifen  $S_1, S_2, \dots, S_n$  zerlegt, deren „Breite“ niemals die Größe  $l$  überschreitet (Fig. 7), so können wir durch sukzessive Anwendung unserer Ungleichung (7) schließen, daß für jeden Streifen  $S_r$  das Integral  $\iint_{S_r} u_n^2 dx dy$  und damit auch

$$Q[u_n] = \sum_{r=1}^n \iint_{S_r} u_n^2 dx dy$$

gegen Null konvergiert. Hiermit ist aber der Beweis, daß  $D[u_n]$  unabhängig von  $u_0$  gegen eine Zahl  $D$  konvergiert, vollständig geführt.

Um endlich noch zu zeigen, daß  $D$  mit der unteren Grenze  $d$  aller Zahlen  $D[\psi]$  zusammenfällt, benutzen wir die Funktionen

$$\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(m)}, \dots$$

einer Minimalfolge als Ausgangsfunktionen für die Folgen

$$u_{n+1}^{(m)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}_n^{(m)} d\varphi.$$

Nach dem obigen Resultat ist unabhängig von  $m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D[u_n^{(m)}] = D,$$

und zwar gilt infolge der Monotonität

$$D[\omega^{(m)}] \geq D[u_n^{(m)}] \geq D.$$

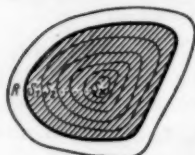


Fig. 7.

Lassen wir in dieser Ungleichung  $m$  über alle Grenzen wachsen, so folgt

$$d \geq D,$$

was nur möglich ist, wenn

$$d = D$$

gilt. Die Funktionen  $u_n(x, y)$  bilden also bei jeder Ausgangsfunktion eine Minimalfolge<sup>a)</sup>; da durch den früher verwendeten Glättungsprozeß die Folge rekonstruiert wird, so ist die Folge  $u_n - F_s(x, y)$  gleichgradig stetig (vgl. § 3). Es existiert eine Teilfolge der  $u_n(x, y)$ , die in jedem abgeschlossenen Teilgebiet, in dem  $F_s$  stetig ist, gleichmäßig gegen die Lösung des betreffenden Randwertproblems konvergiert. Infolge der eindeutigen Bestimmtheit dieser Lösung konvergiert aber nicht nur eine Teilfolge, sondern die Folge  $u_n(x, y)$  selbst gegen jene Lösung.

#### § 4.

Die mathematische Hoffnung im Falle der Irrfahrt bei absorbierendem Rand.

Es sei  $u_0(x, y)$  eine beliebige stückweise stetige Anfangsverteilung und  $u_n(x, y)$  die sich daraus für die Randwerte Null ergebende Verteilung nach  $n$  Schritten. Wir beweisen zunächst, daß die Reihe

$$(8) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

absolut und gleichmäßig konvergiert.

Wir können  $u_0 \geq 0$  voraussetzen<sup>b)</sup>. Verstehen wir dann unter  $W_n(x, y; \xi, \eta)$  wie früher (vgl. I, § 3) die Wahrscheinlichkeit, in  $n$  Schritten vom Punkte  $x, y$  zum Punkte  $\xi, \eta$  zu gelangen, ohne vorher den Rand  $\Gamma$  zu treffen, so ist

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \iint_G W_n(x, y; \xi, \eta) [u_0(\xi, \eta) + \dots + u_{n-1}(\xi, \eta)] d\xi d\eta.$$

Da  $W_n(x, y; \xi, \eta)$  für alle Werte  $x, y; \xi, \eta$  beschränkt ist und stets  $u_n \geq 0$  gilt, so genügt es, zu beweisen, daß die Summe

$$P_0 + P_1 + \dots + P_n$$

der Integrale

$$P_n = \iint_G u_n(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

<sup>a)</sup> Ist  $M$  eine obere Schranke für die Anfangsfunktion, so ist bei jedem  $n$

$$|u_n| \leq M;$$

$u_n(x, y)$  ist also eine beschränkte Minimalfolge (vgl. § 2).

<sup>b)</sup> Andernfalls bilden wir mit Hilfe der Anfangsverteilung  $v_0 = |u_0|$  die Folge

$$v_0, v_1, v_2, \dots$$

und erkennen aus der Ungleichung

$$|u_n| \leq v_n,$$

daß die Reihe  $\sum |u_n|$  gleichmäßig konvergiert, wenn dies für die Reihe  $\sum v_n$  feststeht.

für alle  $n$  beschränkt bleibt. Hierzu verwenden wir eine der Ungleichung (7) entsprechende Relation für die Ausdrücke  $P_r$ . Aus

$$P_{r+1} = \iint_F \left( \frac{1}{2\pi} \int \bar{u}_r d\varphi \right) dx dy + \iint_S u_{r+1} dx dy$$

folgt durch Vertauschung der Integrationen nach  $\varphi$  und nach  $x$  und  $y$

$$P_{r+1} = P_r + \iint_S u_{r+1} dx dy - \iint_{\Sigma} \frac{\sigma}{2\pi} u_r dx dy - \iint_S \frac{\sigma}{2\pi} u_r dx dy,$$

wegen  $u_r \geq 0$  also

$$(9) \quad P_{r+1} \leq P_r + \iint_S u_{r+1} dx dy - \iint_{\Sigma} \frac{\sigma}{2\pi} u_r dx dy.$$

Addieren wir die für  $r = 0, 1, \dots, n$  gebildeten Ungleichungen (9), so ergibt sich

$$(9') \quad \iint_{\Sigma} \frac{\sigma}{2\pi} (u_0 + \dots + u_n) dx dy \leq P_0 + \iint_S (u_0 + \dots + u_{n+1}) dx dy.$$

Zerteilen wir nun das Gebiet  $G$  in der in Fig. 7 angegebenen Weise, jedoch so, daß in jedem Streifen  $S_r$

$$\frac{\sigma}{2\pi} \geq \frac{1}{C_1} > 0$$

gilt, so folgt zunächst für  $S = R$ ;  $\Sigma = S_1$

$$\iint_{S_1} (u_0 + \dots + u_n) dx dy \leq C_1 P_0.$$

Durch sukzessive Anwendung der Ungleichung (9') auf die durch die obige Zerteilung entstandenen Teilgebiete von  $G$  erhalten wir allgemein

$$\iint_{S_r} (u_0 + \dots + u_n) dx dy \leq C_r P_0,$$

wobei die Konstanten  $C_r$  in gewisser, nur von der Zerteilung abhängiger Weise aus  $C_1$  berechnet werden können. Durch Addition folgt endlich

$$(10) \quad P_0 + P_1 + \dots + P_n \leq C P_0^{10)}$$

und damit die Konvergenz der Reihe (7). Ihre Summe

$$H(x, y) = u_0 + u_1 + \dots$$

genügt der Gleichung

$$(11) \quad \odot H = -\frac{2\pi}{I^2} u_0.$$

<sup>10)</sup> Ebenso gilt natürlich

$$P_n + \dots + P_m \leq C P_n.$$



Insbesondere wählen wir die Anfangsverteilung

$$(*) \quad u_0^\delta(x_0, y_0; x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\delta^2}, & \text{für } (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2, \\ 0, & \text{für } (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 > \delta^2. \end{cases}$$

Hier sei  $x_0, y_0$  ein innerer Punkt von  $G$  und  $\delta$  kleiner als der Abstand des Punktes vom Rande  $\Gamma$ .

Für  $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} > 4l + \delta$  wird die Summe

$$H_\delta(x_0, y_0; x, y) = u_0^\delta + u_1^\delta + \dots$$

bereits dargestellt durch

$$u_0^\delta + u_1^\delta + \dots$$

und ist daher nach (10) sicher nicht größer als die von  $\delta$  unabhängige Konstante  $CP_0 = C$ .

Lassen wir nun  $\delta$  gegen 0 konvergieren, so strebt nach I, § 3 für  $n \geq 5$  jede Funktion  $u_n^\delta$  gleichmäßig gegen die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $W_n(x_0, y_0; x, y)$ . Auch für die Reihe

$$W_5 + W_6 + \dots$$

gilt daher

$$W_5 + W_6 + \dots + W_n \leq C,$$

woraus sofort die Konvergenz dieser Reihe folgt<sup>11)</sup>.

Ihre Summe

$$H(x_0, y_0; x, y) = W_5 + W_6 + \dots$$

ist für  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 > (4l)^2$  die mathematische Hoffnung, vom Punkte  $x_0, y_0$  aus einmal den Punkt  $x, y$  zu berühren, ohne den Rand zu treffen. Sie ergibt sich auch als Grenzwert der Folge  $H_\delta(x_0, y_0; x, y)$  bei  $\delta \rightarrow 0$ . Denn es ist

$$u_n^\delta + u_{n+1}^\delta + \dots \leq AP_{n-\delta}^\delta,$$

wobei  $A$  von  $n$  und  $\delta$  unabhängig ist, und ferner

$$P_r^\delta \leq G \cdot \text{Ob. Gr. } u_r^\delta \leq G \cdot \text{Ob. Gr. } W_r.$$

<sup>11)</sup> Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt so: Wegen

$$\iint (W_5 + W_6 + \dots + W_n) dx dy \leq C \cdot G$$

konvergiert auch die Summe der Integrale  $P_r = \iint W_r d\xi d\eta$ . Da nun

$$W_n = \iint W_n W_{n-x} d\xi d\eta$$

gilt und  $W_n$  für  $n \geq 5$  beschränkt ist, so erhalten wir

$$W_n + \dots + W_m \leq C(P_{n-x} + \dots + P_{m-x})$$

und daraus die behauptete Gleichmäßigkeit der Konvergenz.

Es wird also der Reihenrest

$$u_n^\delta + u_{n+1}^\delta + \dots$$

gleichmäßig in  $\delta$  beliebig klein, woraus

$$H_\delta(x_0, y_0; x, y) \Rightarrow H(x_0, y_0; x, y)$$

folgt.

Im Innern des Kreisinges

$$l^2 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (4l)^2$$

definieren wir die mathematische Hoffnung durch

$$H(x_0, y_0; x, y) = W_2 + W_3 + \dots;$$

aber jetzt ist  $H$  nicht mehr singularitätenfrei, wie aus der Betrachtung von I, § 3 über die Funktionen  $W_n$  hervorgeht.

Die mathematische Hoffnung  $H(x, y; \xi, \eta)$  besitzt für das Randwertproblem der Gleichung  $\odot u = 0$  eine ähnliche Bedeutung wie die Greensche Funktion für die Potentialgleichung.

Setzen wir nämlich in der Greenschen Formel

$$(3) \quad \iint_G (u \odot v - v \odot u) d\xi d\eta + \iint_R (u \odot' v - v \odot' u) d\xi d\eta = 0$$

für  $v$  die Funktion  $H_\delta(x, y; \xi, \eta)$ , und für  $u$  eine Lösung von  $\odot u = 0$  ein, so folgt

$$\frac{1}{\pi \delta^2} \cdot \frac{2\pi}{l^2} \iint_{K_\delta} u d\xi d\eta = \iint_R u \odot' H_\delta d\xi d\eta.$$

Lassen wir sodann  $\delta$  gegen Null konvergieren, so erhalten wir — zunächst unter der Voraussetzung, daß  $x, y$  vom Rande einen Abstand größer als  $4l$  besitzt — die folgende Darstellung der Funktion  $u(x, y)$  durch ihre Randwerte:

$$(12) \quad u(x, y) = \frac{l^2}{2\pi} \iint_R u(\xi, \eta) \odot' H(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Da  $H$  am Rande  $R$  verschwindet, so lautet (12) ausgeschrieben

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_R u \left( \int_a \bar{H} d\varphi \right) dx dy$$

oder

$$(12') \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_\Sigma H \left( \int_a \bar{u} d\varphi \right) dx dy,$$

wobei  $\Sigma$  wieder der dem Streifen  $R$  im Innern benachbarte Streifen von der Breite  $l$  ist.

Liegt der Punkt  $x, y$  in der Nähe des Randes, so verstehen wir unter

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} (W_2 + W_3 + W_4) \left( \int_{\sigma} \bar{u} d\varphi \right) dx dy$$

das entsprechende uneigentliche Integral und unter

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} W_1 \left( \int_{\sigma} \bar{u} d\varphi \right) dx dy$$

das Kurvenintegral

$$\frac{1}{2\pi} \int g(x + l \cos \varphi, y + l \sin \varphi) d\varphi; \quad \left( g = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \bar{u} d\varphi \right)$$

über den Teilbogen des Kreises  $k_l$ , der in  $\Sigma$  liegt. Dann gilt für alle Punkte im Innern von  $G$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} H \left( \int_{\sigma} \bar{u} d\varphi \right) d\xi d\eta$$

mit  $H = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$ .

Für die Funktion  $u \equiv 1$  liefert (12) und (12') unmittelbar die Relation

$$(13) \quad \frac{l^2}{2\pi} \iint_R \odot' H d\xi d\eta = \iint_{\Sigma} \frac{\sigma}{2\pi} H d\xi d\eta = 1,$$

während allgemein durch Anwendung der Formel (3) auf irgendein Teilgebiet von  $G$  mit dem Randstreifen  $S$ , welches den Punkt  $x, y$  enthält, folgt:

$$(13') \quad \frac{l^2}{2\pi} \iint_S \odot' H d\xi d\eta = 1.$$

### III. Der Grenzübergang $l \rightarrow 0$ .

Das Ziel dieses Abschnittes ist, nachzuweisen, daß bei dem Grenzübergang  $l \rightarrow 0$  die Lösung des Randwertproblems der Irrfahrtengleichung  $\odot u = 0$  gegen die entsprechende Lösung der Potentialgleichung konvergiert. Wir zeigen zunächst, daß die oben eingeführte Grundlösung  $l^2 h(r)$  — die für die Irrfahrt im wesentlichen die Bedeutung der mathematischen Hoffnung besitzt — gegen die Lösung  $C \log \frac{1}{r}$  bzw.  $\frac{C}{r}$  der Potentialgleichung konvergiert. Auf Grund dieser Tatsache läßt sich dann sofort der Beweis für die Konvergenz der Lösungen des Randwertproblems durchführen.

## § 1.

## Die Konvergenz der Grundlösung.

Substituieren wir in der Integraldarstellung (10) Kap. I  $s = \varrho l$ , so folgt

$$(1) \quad l^2 h(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{s J_0^m(s)}{1 - J_0(s)} \left( J_0\left(\frac{r}{l} s\right) - J_0\left(\frac{1}{l} s\right) \right) ds.$$

Für die Untersuchung der Konvergenz dieser Darstellung bei  $l \rightarrow 0$  benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. Es sei  $p(x)$ , sowie das unbestimmte Integral

$$P(x) = \int_0^x p(x) dx$$

für alle  $x$  beschränkt (etwa  $|p(x)| \leq p$  und  $|P(x)| \leq P$ ). Ist dann  $f(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  stetig, so konvergiert das Integral

$$J[f] = \int_a^b f(x) p(\lambda x) dx$$

mit wachsendem  $\lambda$  gegen Null<sup>12)</sup>.

Setzen wir nun

$$p(s) = J_0(rs) - J_0(s),$$

$$f(s) = \frac{1}{s} \left( \frac{s^2 J_0^m(s)}{1 - J_0(s)} - 4 \right); \quad f(0) = 0,$$

$$\lambda = \frac{1}{l},$$

so genügen die Funktionen  $p(s)$  und  $f(s)$  den Voraussetzungen des Hilfssatzes. Da ferner das Integral

$$\int_0^{\infty} f(s) p(\lambda s) ds$$

wegen

$$|f(s)| \leq \frac{C_1}{s} \quad \text{und} \quad |p(\lambda s)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda s}} \left( \frac{C_2}{\sqrt{r}} + C_3 \right)$$

<sup>12)</sup> Beweis. Ist  $f_n(x)$  eine differenzierbare Funktion, die  $f(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  mit der Genauigkeit  $\varepsilon$  approximiert, so gilt zunächst

$$J[f] = J[f_n] + \varepsilon \Theta p(b-a); \quad |\Theta| \leq 1.$$

Durch partielle Integration folgt aber — wenn  $M$  und  $M'$  Schranken für  $|f_n|$  und  $|f'_n|$  bedeuten —  $J[f_n] \leq \frac{P}{\lambda} (2M + M'(b-a))$ , woraus sich die Behauptung für  $f_n(x)$  und damit auch für  $f(x)$  ergibt. Wir bemerken ausdrücklich, daß  $p(x)$  die Art der Konvergenz nur durch die Größen  $p$  und  $P$  beeinflusst.

absolut und gleichmäßig in  $\lambda$  für  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$  konvergiert<sup>13)</sup>, so können wir den Hilfssatz auch für das Intervall  $0 \leq x < \infty$  in Anwendung bringen. Es folgt, daß  $\int_0^\infty f(s) p(\lambda s) ds$  gegen Null konvergiert und daß daher  $l^3 h(r)$  dasselbe Konvergenzverhalten besitzt wie die Folge

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{r}{l}s\right) - J_0\left(\frac{1}{l}s\right)}{s} ds.$$

Ersetzen wir  $\frac{s}{l}$  durch  $s$ , so folgt

$$l^3 h(r) \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(rs) - J_0(s)}{s} ds,$$

und hier ist die rechte Seite die Funktion  $\frac{2}{\pi} \log \frac{1}{r}$  <sup>14)</sup>.

Die Konvergenz wird nun, abgesehen von den Daten der Funktion  $f(s)$ , nur von den oberen Schranken der Funktionen

$$p(s) = J_0(rs) - J_0(s)$$

und

$$P(s) = \int_0^s p(t) dt = \frac{1}{r} \int_0^{rs} J_0(t) dt - \int_0^s J_0(t) dt$$

beeinflusst. Diese sind aber wegen

$$|p(s)| \leq 2,$$

$$|P(s)| \leq C\left(1 + \frac{1}{r}\right) \leq C\left(1 + \frac{1}{r_0}\right)$$

für  $r \geq r_0 > 0$  von  $r$  unabhängig. Daraus folgt, daß  $l^3 h(r)$  für alle  $r \geq r_0 > 0$  gleichmäßig gegen  $\frac{2}{\pi} \log \frac{1}{r}$  konvergiert.

Die erste Ableitung der Funktion  $l^3 h(r)$  existiert nach I, § 2 für  $r \geq 6l$ . Führen wir in Formel (11) die Substitution  $s = ql$  aus, so folgt

$$l^3 h'(r) = \frac{1}{2\pi l} \int_0^\infty \frac{s^3 J_0''(s)}{1 - J_0(s)} J_0'\left(\frac{r}{l}s\right) ds.$$

Da die Funktion  $f(s) = \frac{s^3 J_0''(s)}{1 - J_0(s)}$  im Intervall  $0 \leq s < \infty$  stetig und stetig differenzierbar ist, wenn wir  $f(0) = 4$  setzen, so ergibt sich durch partielle

<sup>13)</sup> Auch in  $r \geq r_0 > 0$  ist die Konvergenz gleichmäßig.

<sup>14)</sup> Es gilt allgemein die Tatsache, daß unter der Voraussetzung der Existenz von  $\int_a^\infty \frac{f(s)}{s} ds$  für alle  $a, b > 0$  das Integral  $\int_0^\infty \frac{f(as) - f(bs)}{s} ds$  den Wert  $f(0) \log \frac{b}{a}$  besitzt.

## Integration

$$\begin{aligned}
 l^3 h'(r) &= \frac{1}{2\pi r} f(s) J_0\left(\frac{r}{l} s\right) \Big|_0^\infty - \frac{1}{2\pi r} \int_0^\infty f'(s) J_0\left(\frac{r}{l} s\right) ds \\
 &= -\frac{2}{\pi r} - \frac{1}{2\pi r} \int_0^\infty f'(s) J_0\left(\frac{r}{l} s\right) ds.
 \end{aligned}$$

Nach unserem Hilfssatz konvergiert das Integral rechts mit  $l$  gegen Null und zwar gleichmäßig für alle  $r \geq r_0 > 0$ , also — wie zu erwarten war —

$$l^3 h'(r) \Rightarrow -\frac{2}{\pi r}.$$

Analog zeigt man, daß auch die zweite Ableitung  $l^3 h''(r)$ , die für  $r \geq 8l$  existiert, gegen  $\frac{2}{\pi r^3}$  konvergiert.

Im Raum lassen sich die Verhältnisse noch einfacher übersehen. Durch die Substitution  $s = \varrho l$  geht Formel (18) in Kapitel I über in

$$(2) \quad l^3 h(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{s^2 \left(\frac{\sin s}{s}\right)^m \frac{\sin \frac{r}{l} s}{s}}{1 - \frac{\sin s}{s}} ds.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}
 f(s) &= \frac{s^2}{1 - \frac{\sin s}{s}} \left(\frac{\sin s}{s}\right)^m, \\
 \lambda &= \frac{r}{l},
 \end{aligned}$$

so können wir uns direkt auf die bekannte Tatsache stützen (Dirichletsches Integral), daß bei beliebigem  $a$  das Integral

$$\int_0^a f(s) \frac{\sin \lambda s}{s} ds$$

den Grenzwert  $\frac{\pi}{2} f(0)$  besitzt, wenn  $f(s)$  im Intervall  $0 \leq s \leq a$  stückweise glatt ist. Diese Voraussetzung ist nun in unserem Fall erfüllt; da ferner für  $m \geq 3$  das Integral  $\int_0^\infty f(s) \frac{\sin \lambda s}{s} ds$  absolut und gleichmäßig in  $\lambda$  konvergiert, so ergibt sich, daß  $l^3 h(r)$  dem Grenzwert  $\frac{3}{2\pi} \frac{1}{r}$  zustrebt.

Auch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz erkennen wir genau wie im ebenen Fall. Ebenso gilt für die Ableitungen

$$\begin{aligned}
 l^3 h'(r) &\Rightarrow -\frac{3}{2\pi r^2}, \\
 l^3 h''(r) &\Rightarrow \frac{3}{\pi r^3}.
 \end{aligned}$$

## § 2.

## Die Konvergenz der Lösung des Randwertproblems.

Es sei  $\{u_i(x, y)\}$  die Menge der Funktionen, die sich bei verschiedenen Werten von  $l$  als Lösungen des in Kap. II behandelten Randwertproblems ergeben, wenn wir das Gebiet  $G$  mit dem Rand  $\Gamma$  sowie die die Randwerte bestimmende Funktion  $f(x, y)$  festhalten.  $f(x, y)$  sei stetig und stetig differenzierbar. Wir zeigen, daß die Menge  $\{u_i\}$  *gleichgradig stetig* ist. Hierzu benutzen wir eine *Integraldarstellung*, die für jede stückweise stetige Funktion  $u(x, y)$  gültig ist, die im Innern von  $G$  der Gleichung  $\odot u = 0$  genügt.



Fig. 8.

Wir denken uns um einen innern Punkt  $x, y$  von  $G$  zwei Kreise  $K_a$  und  $K_b$  mit den Radien  $a \geq 13l$  und  $\delta < l$  gelegt; beide Kreise sollen noch ganz in  $G$  liegen, so daß ein Kreisring  $S$  von der Breite  $l$  um  $K_a$  noch dem Gebiete  $G + R$  angehört (vgl. Fig. 8). Wenden wir auf das Gebiet  $K_a$  die Integralformel (3) Kap. II an, so folgt

$$\iint_{K_a - K_b} (u \odot v - v \odot u) d\xi d\eta + \iint_{K_b} (u \odot v - v \odot u) d\xi d\eta + \iint_S (u \odot' v - v \odot' u) d\xi d\eta = 0.$$

Wir wählen für  $v(x, y)$  die spezielle Funktion

$$v(x, y) = h_\delta(r) + \alpha r^2 + \beta,$$

wobei  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  gesetzt ist,  $h_\delta(r)$  die früher festgelegte Bedeutung hat und  $\alpha$  und  $\beta$  sogleich näher zu bestimmende Konstanten sind. Diese Hilfsfunktion hat die Eigenschaft, daß  $l^2 \odot v$  im Innern von  $K_b$  den Wert  $2\pi\alpha l^2 - \frac{2\pi}{\pi\delta^2}$ , außerhalb von  $K_b$  aber den Wert  $2\pi\alpha l^2$  besitzt.

Da ferner  $\odot u$  im Innern von  $K_a$  verschwindet, so liefert die obige Integralformel

$$\left(\frac{2\pi}{\pi\delta^2} - 2\pi\alpha l^2\right) \iint_{K_b} u d\xi d\eta = 2\pi\alpha l^2 \iint_{K_a - K_b} u d\xi d\eta + l^2 \iint_S (u \odot' v - v \odot' u) d\xi d\eta.$$

Mit  $\delta \rightarrow 0$  konvergiert  $h_\delta(r)$  gleichmäßig für jedes  $r \geq 4l$  gegen die Grundlösung  $h(r)$  und damit  $v(r)$  gegen die Funktion

$$g(r) = h(r) + \alpha r^2 + \beta.$$

Unsere Integralformel geht hierbei über in

$$(3) \quad u(x, y) = \alpha l^2 \iint_{K_a} u(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{l^2}{2\pi} \iint_S (u \odot' g - g \odot' u) d\xi d\eta.$$



Wir bestimmen nun die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$ , so daß sowohl  $g(a)$  wie  $g'(a)$  verschwindet ( $g'(a)$  existiert, da  $a \geq 9l$  vorausgesetzt ist); wir erhalten

$$\alpha = -\frac{h'(a)}{2a}, \quad \beta = -h(a),$$

$$g(r) = h(r) - h(a) - \frac{h'(a)}{2a}(r^2 - a^2)$$

und also

$$(4) \quad u(x, y) = -\frac{l^2 h'(a)}{2a} \iint_{K_a} u \, d\xi \, d\eta + \frac{l^2}{2\pi} \iint_S (u \odot' g - g \odot' u) \, d\xi \, d\eta.$$

In dem Randintegral  $l^2 \iint_S (u \odot' g - g \odot' u) \, d\xi \, d\eta$  treten die Funktionen  $u$  und  $g$  nur für solche Argumente auf, die in dem Kreisring

$$(a-l)^2 \leq (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \leq (a+l)^2$$

gelegen sind. Hier existieren aber wegen  $a \geq 9l$  die ersten beiden Ableitungen von  $g(r)$ ; also gestattet  $g(r)$  die Darstellung

$$g(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{r-a}{l} \right)^2 l^2 g''(r + \theta(r-a)) \quad (|\theta| \leq 1).$$

Nach § 1 bilden die Funktionen  $l^2 h''(r)$  und daher auch  $l^2 g''(r) = l^2 h''(r) - \frac{1}{a} l^2 h'(a)$  für  $r, a \geq r_0 > 0$  eine für  $l \rightarrow 0$  gleichmäßig konvergente Folge. Der Ausdruck  $l^2 |g''(r + \theta(r-a))|$  und damit  $|g(r)|$  ist also im obigen Kreisring sicher kleiner als eine von  $l$  unabhängige Konstante.

Setzen wir für  $u$  die Lösung  $u_l(x, y)$  des Randwertproblems ein, so ist  $u_l(x, y)$  wegen  $\odot u_l = 0$  absolut kleiner als das Maximum der Funktion  $|f(x, y)|$  auf dem Rande  $R$ , also ebenfalls kleiner als eine von  $l$  unabhängige Konstante.

Infolgedessen bleibt das Integral

$$\frac{1}{2\pi} l^2 \iint_S (u_l \odot' g - g \odot' u_l) \, d\xi \, d\eta$$

für alle  $l$  absolut kleiner als

$$C \iint_S dx \, dy \leq Ml,$$

wobei  $M$  wiederum von  $l$  nicht abhängt. Wir schreiben daher Formel (4) in der Form

$$(5) \quad u_l(x, y) = -\frac{l^2 h'(a)}{2a} \iint_{K_a} u_l \, d\xi \, d\eta + \Theta Ml \quad (|\Theta| \leq 1).$$

Es sei nun  $G_q$  ein abgeschlossenes Teilgebiet von  $G$ , dessen Punkte vom Rande  $R$  einen Abstand größer als  $q$  besitzen. Dann gilt im Innern von  $G_q$  bei hinreichend kleinem  $l$

$$u_l(x, y) = -\frac{l^2 h'(a)}{2a} \iint_{K_a} u_l d\xi d\eta + \Theta Ml,$$

wenn nur  $a < q$  gewählt ist. Für die Differenz der Funktionswerte in zwei Punkten  $x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$  von  $G_q$  erhalten wir die Ungleichung

$$|u_l(x_1, y_1) - u_l(x_2, y_2)| \leq \left| \frac{l^2 h'(a)}{2a} \right| \cdot \left| \iint_{K_1} u_l d\xi d\eta - \iint_{K_2} u_l d\xi d\eta \right| + 2 Ml.$$

$K_1$  und  $K_2$  sind zwei Kreise um die Punkte  $x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$  mit dem Radius  $a$  (vgl. Fig. 9). Die Differenz der Integrale  $\iint_{K_1} u_l d\xi d\eta$  und  $\iint_{K_2} u_l d\xi d\eta$  ist aber kleiner als das Maximum  $F$  der absolut genommenen Randwerte multipliziert mit dem Flächeninhalt der beiden Halbmonde, die von den Kreisen  $K_1$  und  $K_2$  gebildet werden; also erst recht kleiner als  $F \cdot 4ad^{15)}$ , wobei  $d$  der Abstand der beiden Punkte  $x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$  ist. Da  $l^2 h'(a)$  konvergiert, so ergibt sich

$$|u_l(x_1, y_1) - u_l(x_2, y_2)| \leq A'd + 2 Ml$$

und für  $l < d$

$$|u_l(x_1, y_1) - u_l(x_2, y_2)| \leq Ad.$$

Dies ist — da  $A$  von  $l$  nicht abhängt — charakteristisch für die gleichgradige Stetigkeit der Menge  $\{u_l\}^{16)}$ .

Da nun die Menge  $\{u_l\}$  auch gleichmäßig beschränkt ist, so können wir eine Teilfolge auswählen, die in jedem abgeschlossenen Teilgebiet  $G_q$  gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion  $u(x, y)$  konvergiert. Für sie gilt wegen  $\frac{l^2 h'(a)}{2a} \rightarrow -\frac{1}{\pi a^2}$  die Darstellung

$$(6) \quad u(x, y) = \frac{1}{\pi a^2} \iint_{K_a} u d\xi d\eta,$$

wobei das Integral über einen beliebigen Kreis vom Radius  $a$  um  $x, y$  erstreckt werden kann, der noch in  $G$  liegt. Hieraus folgt bekanntlich, daß die Grenzfunktion  $u(x, y)$  im Innern von  $G$  der Potentialgleichung  $\Delta u = 0$  genügt.

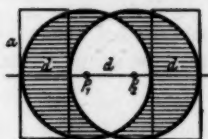


Fig. 9.

<sup>15)</sup>  $2ad$  ist der Inhalt eines der beiden in Fig. 9 gekennzeichneten Rechtecke, die sicher größer als die entsprechenden Halbmonde sind.

<sup>16)</sup> Die gleichgradige Stetigkeit ist hier in dem weiteren Sinne zu verstehen, daß zwar die Funktionen  $u_l(x, y)$  selbst nur stückweise stetig sind, daß aber die Größe des Sprunges der Funktionen in einem Unstetigkeitspunkt mit  $l$  gegen Null strebt. Der Auswahlssatz gilt auch in diesem Falle.

### Mathematische Hoffnung und Greensche Funktion.

Im Anschluß an die obigen Ausführungen beweisen wir noch die folgende Tatsache:

#### Die mathematische Hoffnung

$$H(x, y; \xi, \eta) = W_1(x, y; \xi, \eta) + W_2(x, y; \xi, \eta) + \dots$$

konvergiert — mit  $4l^2$  multipliziert — bei dem Grenzübergang  $l \rightarrow 0$  in jedem den Punkt  $\xi = x$ ,  $\eta = y$  ausschließenden Teilgebiet von  $G$  gegen die Greensche Funktion

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} + v(x, y; \xi, \eta) \quad (r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}).$$

Zum Beweise beachten wir, daß die Summe

$$l^2 H_\delta(x, y; \xi, \eta) = l^2(u_0^\delta + u_1^\delta + \dots)$$

eine Lösung der Gleichung

$$\odot u = -2\pi u_0^\delta$$

ist, die am Rande verschwindet. Da eine solche eindeutig bestimmt ist<sup>17)</sup>, so muß sie übereinstimmen mit

$$l^2 H_\delta = l^2 h_\delta + v_\delta;$$

dabei ist  $h_\delta(x, y; \xi, \eta)$  die früher betrachtete Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (w_\nu^\delta(x, y; \xi, \eta) - w_\nu^\delta(0, 0; 0, 1))$$

der Verteilungen bei unbeschränkter Ausbreitung und  $v_\delta(x, y; \xi, \eta)$  eine Lösung der Gleichung  $\odot u = 0$ , die als Funktion von  $\xi$  und  $\eta$  am Rande die Werte  $-l^2 h_\delta(x, y; \xi, \eta)$  annimmt.

Lassen wir  $\delta$  gegen Null konvergieren, so strebt  $H_\delta(x, y; \xi, \eta)$  in einem Teilgebiet von  $G$ , dessen Punkte von  $x, y$  einen Abstand größer als  $4l$  besitzen, gleichmäßig gegen  $H(x, y; \xi, \eta)$  und  $h_\delta(x, y; \xi, \eta)$  gegen die Grundlösung

$$h(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-J_0^\infty(\varrho l)}}{1 - J_0(\varrho l)} [J_0(\varrho r) - J_0(\varrho)] d\varrho.$$

Infolgedessen konvergiert auch  $v_\delta(x, y; \xi, \eta)$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $v(x, y; \xi, \eta)$ , die der Gleichung  $\odot u = 0$  genügt und am Rande die Werte  $-l^2 h(x, y; \xi, \eta)$  annimmt.

Bei dem Grenzübergang  $l \rightarrow 0$  konvergiert nun  $l^2 h$  gegen die Funktion  $\frac{2}{x} \log r$ , und ferner ist — wie man ganz ähnlich wie oben einsieht — die Menge  $\{v_l(x, y; \xi, \eta)\}$  gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt. Wir

<sup>17)</sup> Denn die Differenz  $g_1 - g_2$  zweier Lösungen würde eine am Rande verschwindende Lösung von  $\odot u = 0$  sein.

können also aus der Menge  $\{l^2 H_l(x, y; \xi, \eta)\}$  eine Teilfolge auswählen, die in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von  $G$ , das den Punkt  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  nicht enthält, gleichmäßig gegen eine Funktion

$$\frac{2}{\pi} \log \frac{1}{r} + v(x, y; \xi, \eta)$$

konvergiert, in der der Bestandteil  $v$  überall in  $G$  der Potentialgleichung  $\Delta v = 0$  genügt. Durch ganz geringfügige Modifikation der im nächsten Paragraphen durchzuführenden Überlegungen zeigt man, daß  $v$  am Rande die Werte  $-\frac{2}{\pi} \log \frac{1}{r}$  annimmt und daß daher die Grenzfunktion bis auf den Faktor 4 mit der Greenschen Funktion  $K(x, y; \xi, \eta)$  übereinstimmt.

### § 3.

#### Die Randbedingung.

Es sei  $S_r$  ein innerer Randstreifen von  $G$ , begrenzt von den Kurven  $\Gamma$  und  $\Gamma_r$ ; er bestehe aus allen Punkten von  $G$ , die von  $R$  einen Abstand kleiner als  $r$  besitzen. Wir beweisen, daß der Ausdruck

$$\frac{1}{r} \iint_{S_r} (u - f)^2 dx dy$$

mit  $r$  gegen Null strebt. Diese Tatsache zieht in der Ebene bereits die exakte Übereinstimmung der Werte von  $f(x, y)$  und  $u(x, y)$  auf  $\Gamma$  nach sich. Im Raum ist es die sinngemäße Forderung, die wir beim Randwertproblem von  $\Delta u = 0$  stellen müssen<sup>15)</sup>.

Zum Beweise benutzen wir den folgenden

**Hilfssatz.** *Es seien  $Q_r[v]$  und  $D_r[v]$  die über den Streifen  $S_r$  erstreckten Integrale  $Q[v]$  bzw.  $D[v]$ . Dann gilt für jede stückweise stetige Funktion  $v(x, y)$ , die am Rande  $R$  verschwindet, die Ungleichung*

$$(7) \quad Q_r[v] \leq A r^{1/2} \sqrt{D_r[v]}.$$

Hierbei ist  $A$  eine Konstante, die nur von der oberen Grenze der Funktion  $|v(x, y)|$  und von der Gestalt des Randes  $\Gamma$ , nicht aber von  $l$  oder  $r$  abhängig ist.

Wir beweisen diese Ungleichung zunächst für konvexe Gebiete  $G$ .

Es seien  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  zwei Parallelkurven zu  $\Gamma$ , die im Innern von  $S_r$  und voneinander im Abstände  $l$  verlaufen. Zwischen ihnen — und zwar im Abstände  $l' = ql$  ( $q < 1$ ) von  $\Gamma_1$  — liege eine weitere Kurve  $\Gamma'_2$ . Wir bezeichnen (vgl. Fig. 10) die Ringgebiete zwischen  $\Gamma$  und  $\Gamma_1$  mit  $S_1$ , zwischen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  mit  $\mathcal{S}$  und zwischen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma'_2$  mit  $\mathcal{S}'$ .

<sup>15)</sup> Vgl. Courant, Friedrichs, Lewy, loc. cit.

Verlegen wir den Nullpunkt des Koordinatensystems in einen Punkt im Innern der Kurve  $\Gamma$ , und wenden für die Funktionen

$$\psi = v^2(x, y),$$

$$\chi = \log \varrho; \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

die Formel (2) Kap. II auf das Gebiet  $S_1$  an, so folgt, indem wir

$$D_1[v^2, \chi] = \iint_{S_1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{v^2 - \bar{v}^2}{l} \right) \left( \frac{\chi - \bar{\chi}}{l} \right) d\varphi dx dy + \iint_R \int_\alpha \left( \frac{v^2 - \bar{v}^2}{l} \right) \left( \frac{\chi - \bar{\chi}}{l} \right) d\varphi dx dy \\ + \iint_\Sigma \int_\alpha \left( \frac{v^2 - \bar{v}^2}{l} \right) \left( \frac{\chi - \bar{\chi}}{l} \right) d\varphi dx dy$$

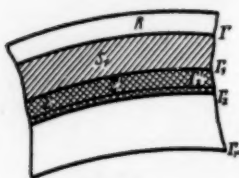


Fig. 10.

setzen, wegen  $\odot \chi = 0$

$$D_1[v^2, \chi] = -2 \iint_\Sigma v^2 \odot' \chi dx dy.$$

Dabei ist

$$\odot' \chi = \frac{1}{l^2} \left\{ \int_\alpha \bar{\chi} d\varphi - \alpha \chi \right\}$$

und  $\alpha$  der Bogen des Kreises vom Radius  $l$  um  $x, y$ , der noch im Gebiet  $S_1$  liegt. Wegen der Konvexität von  $G$  trifft jede vom Nullpunkt ausgehende Gerade den Rand  $\Gamma$  — und bei hinreichend kleinem  $r$  auch die Kurven  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  — unter einem Winkel, der größer als eine feste Konstante ist. Wir können daher  $q$  so wählen, daß der Winkel  $\alpha$  überall in  $\Sigma'$  von einer vom Nullpunkt durch den Punkt  $x, y$  hindurchgehenden Geraden in zwei Teile zerschnitten wird, von denen jeder absolut größer als  $\alpha_0$  und kleiner als  $\pi - \alpha_0$  ist.  $\alpha_0$  ist dabei eine positive, nur von  $q$  und der Gestalt des Randes abhängige Konstante. Dann ist aber der Ausdruck  $l \odot' \chi$  bei genügend kleinem  $l$  in  $\Sigma'$  ebenfalls größer als eine positive Konstante  $Q$ , die nur von  $q$  und  $\Gamma$  abhängt<sup>19)</sup>.

Wir erhalten die Ungleichung

$$\iint_{\Sigma'} v^2 dx dy \leq \frac{1}{2Q} l |D_1[v^2, \chi]|,$$

also wegen  $|D[v^2, \chi]| \leq \sqrt{D[v^2]} \sqrt{D[\chi]}$ :

$$\iint_{\Sigma'} v^2 dx dy \leq \frac{1}{2Q} l \sqrt{D_1[v^2]} \sqrt{D_1[\chi]}$$

<sup>19)</sup> Denn es ist

$$l \odot' \chi = \frac{1}{l} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \log \left( 1 + \frac{l^2}{r^2} + 2 \frac{l}{r} \cos \varphi \right) d\varphi,$$

also bis auf Glieder, die mit  $l$  gegen Null streben:

$$l \odot' \chi = \frac{2}{r} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) \geq \frac{4}{r} \sin \alpha_0.$$

und um so mehr

$$\iint_{\Sigma} v^2 dx dy \leq \frac{1}{2Q} l \sqrt{D_r[v^2]} \sqrt{D_r[\chi]}.$$

Unter Beachtung von

$$D_r[\chi] \leq C_1 r,$$

$$D_r[v^2] \leq C_2 D_r[v]$$

folgt schließlich

$$\iint_{\Sigma} v^2 dx dy \leq A l \sqrt{r} \sqrt{D_r[v]}.$$

Unterteilen wir den Streifen  $S_r$  durch im Abstände  $l' = ql$  verlaufende Parallelkurven zu  $\Gamma$  in  $\kappa$  derartige Streifen  $\Sigma'$  und addieren die einzelnen Ungleichungen, so folgt die Ungleichung

$$(7) \quad Q_r[v] \leq A r^{1/2} \sqrt{D_r[v]}.$$

Wir wenden nun (7) auf die Funktion  $v = u_i - f$  an; es folgt

$$\iint_{S_r} (u_i - f)^2 dx dy \leq A r^{1/2} \sqrt{D_r[u_i - f]}$$

und um so mehr

$$\iint_{S_r} (u_i - f)^2 dx dy \leq A r^{1/2} \sqrt{D[u_i - f]} \leq 2 A r^{1/2} \sqrt{D[f]},$$

wobei jetzt das  $D$ -Integral über das ganze Gebiet  $G$  zu erstrecken ist.

Ist  $S_{r-q}$  ein Teilstreifen von  $S_r$ , begrenzt von zwei Kurven  $\Gamma_r$  und  $\Gamma_q$ , so gilt natürlich auch

$$\iint_{S_{r-q}} (u_i - f)^2 dx dy \leq 2 A r^{1/2} \sqrt{D[f]}$$

und daher im Limes  $l \rightarrow 0$  wegen der Beschränktheit von  $D[f]$ :

$$\iint_{S_{r-q}} (u - f)^2 dx dy \leq C r^{1/2}$$

bei beliebigem  $q < r$ .

Hieraus folgt

$$\frac{1}{r} \iint_{S_r} (u - f)^2 dx dy \leq C \sqrt{r}$$

und damit die eingangs formulierte Randbedingung.

Die Voraussetzung der Konvexität von  $G$  ist natürlich für die Gültigkeit von (7) nicht wesentlich. Es ist aber im Falle eines nichtkonvexen Gebietes  $G$  bequemer, die mittlere Annahme der Randwerte mit Hilfe einer Modifikation von (7) zu beweisen. Hierzu unterteilen wir  $S_r$  durch eine Anzahl von Normalen auf  $\Gamma$  in Teilgebiete  $T$ , in denen sich die Tangente von  $\Gamma$  monoton und stetig ändert. Mit  $S_i$ ,  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  bezeichnen wir die in  $T$

verlaufenden Teile der früheren Streifen (vgl. Fig. 11) und mit  $N_1$  zwei längs der  $S_1$  begrenzenden Randnormalen verlaufende Streifen der Breite  $l$ . Die Anwendung der Formel (2), Kap. II ergibt jetzt

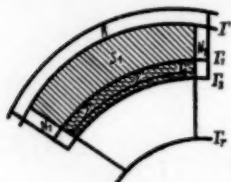


Fig. 11.

$$-2 \iint_{\Sigma} v^2 \odot' \chi \, dx \, dy \\ = D_1[v^2, \chi] + 2 \iint_{N_1} v^2 \odot' \chi \, dx \, dy.$$

Bei geeigneter Wahl des Nullpunktes ist  $l \odot' \chi$  auf  $\Sigma'$  negativ und absolut größer als eine feste Konstante  $Q > 0$ . Die weiteren Rechnungen verlaufen genau wie früher, es ist nur noch nötig, das Zusatzglied  $2 \iint_{N_1} v^2 \odot' \chi \, dx \, dy$  abzuschätzen. Für dieses gilt

$$2 \left| \iint_{N_1} v^2 \odot' \chi \, dx \, dy \right| \leq B' r,$$

so daß zunächst

$$\iint_{\Sigma} v^2 \, dx \, dy \leq A' l \sqrt{r} \sqrt{D_r[v]} + B' r l$$

und sodann durch Addition

$$(7') \quad Q_r[v] \leq A r'^{1/2} \sqrt{D_r[v]} + B r^2$$

folgt;  $A$  und  $B$  sind von  $r$  und  $l$  unabhängig.

Mit Hilfe dieser Relation erhalten wir aber durch Anwendung auf die Funktion  $v = u_1 - f$  ebenfalls die zu beweisende Randbedingung.

(Eingegangen am 25. 9. 1930.)



# Über ein Tschebyscheffsches Extremumproblem.

Von

N. Achyesser in Kiew (Ukraine).

## § 1.

In vorliegender Arbeit beschäftige ich mich mit folgender Aufgabe:  
Unter allen reellen Funktionen vom Typus

$$(1) \quad \sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \dots + \sigma_l x^{n-l} + p_{l+1} x^{n-l-1} + \dots + p_n \\ + \frac{r_0 x^{l-1} + r_1 x^{l-2} + \dots + r_{l-1}}{q_0 x^l + q_1 x^{l-1} + \dots + q_l},$$

wo  $n, l$  und die Koeffizienten  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_l$  gegeben sind, ist diejenige zu finden, welche in dem Intervalle  $\langle -1, 1 \rangle$  am wenigsten von Null abweicht; mit anderen Worten, diejenige, für welche das Maximum des absoluten Betrages in  $\langle -1, 1 \rangle$  den kleinsten Wert hat.

Diese Aufgabe wurde von P. Tschebyscheff in der Abhandlung „Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions“<sup>1)</sup> aufgestellt. Der berühmte Mathematiker gab dort zur Lösung dieser Aufgabe ein mit der Theorie der Kettenbrüche zusammenhängendes Verfahren. Für die einfachsten Fälle, nämlich für  $l=1$  und für  $l=2, \sigma_1=0$  hat P. Tschebyscheff den kleinsten Wert des absoluten Betrages von (1) im Intervalle  $\langle -1, 1 \rangle$  wirklich gefunden.

Diese kleinste Abweichung soll im folgenden durch  $L$  bezeichnet werden.

In dieser Mitteilung wird eine neue und wesentlich einfachere Lösung der betrachteten Aufgabe gegeben.

Es wird eine algebraische Gleichung vom Grade  $l+1$  aufgestellt, welcher die Größe  $L$  genügt.

Ferner wird gezeigt, daß die Lösung der Aufgabe von  $l$  Parametern abhängt, die sämtlich reell sind und, nachdem  $L$  gefunden ist, sich aus einem System von  $l$  linearen Gleichungen bestimmen lassen.

<sup>1)</sup> Œuvres de P. Tchebychef, T. I, S. 273—378; insbesondere S. 338—378.

## § 2.

Zunächst wollen wir in den Funktionen (1) das Polynom

$$\sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \dots + \sigma_l x^{n-l}$$

durch ein lineares Aggregat von Tschebyscheffschen Polynomen

$$T_m(x) = \cos m \arccos x = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^k m}{2(m-k)} \binom{m-k}{k} (2x)^{m-2k}$$

ausdrücken, so daß die Funktionen (1) die Form

$$(2) \quad \tau_0 T_n(x) + \dots + \tau_l T_{n-l}(x) + t_{l+1} x^{n-l-1} + \dots + t_n + \frac{\tau_0 x^{l-1} + \dots + \tau_{l-1}}{q_0 x^l + q_1 x^{l-1} + \dots + q_l}$$

erhalten.

Später werden wir die Zweckmäßigkeit dieser Transformation erkennen.

Nach einer leichten Rechnung bekommen wir folgende Beziehungen zwischen den neuen Koeffizienten  $\tau_j$  und den alten  $\sigma_j$ :

$$\tau_{2i} = \frac{1}{2^{n-2i-1}} \left\{ \sigma_{2i} + \frac{\sigma_{2i-2}}{4} \binom{n-2i+2}{1} + \frac{\sigma_{2i-4}}{4^2} \binom{n-2i+4}{2} + \dots + \frac{\sigma_2}{4^i} \binom{n}{i} \right\},$$

$$\tau_{2i-1} = \frac{1}{2^{n-2i}} \left\{ \sigma_{2i-1} + \frac{\sigma_{2i-3}}{4} \binom{n-2i+3}{1} + \frac{\sigma_{2i-5}}{4^2} \binom{n-2i+5}{2} + \dots + \frac{\sigma_1}{4^{i-1}} \binom{n-1}{i-1} \right\}.$$

Jetzt wollen wir eine andere Formulierung unserer Aufgabe geben, nämlich:

Unter allen reellen Funktionen vom Typus

$$(3) \quad R(x) = \frac{p_0 x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \dots + p_{n-1}}{q_0 x^l + q_1 x^{l-1} + \dots + q_l}$$

ist diejenige zu finden, welche in dem Intervalle  $\langle -1, 1 \rangle$  am wenigsten von der Funktion

$$F(x) = \tau_0 T_n(x) + \dots + \tau_l T_{n-l}(x)$$

abweicht.

Nun können wir den Tschebyscheffschen Satz<sup>2)</sup> über die beste Annäherung einer stetigen Funktion durch rationale Funktionen vom Typus (3) anwenden. Aus diesem Satze folgt, daß unsere Aufgabe stets eine und nur eine Lösung besitzt, und zwar wird die Funktion

$$S(x) = \frac{a_0 x^{n-v-1} + a_1 x^{n-v-2} + \dots + a_{n-v-1}}{b_0 x^{l-1} + b_1 x^{l-2} + \dots + b_{l-1}},$$

<sup>2)</sup> loc. cit., théorème 4. Vgl. N. Achyser, Sur les propriétés extrémales de certaines fonctions fractionnaires, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1930 A, 18, S. 495.

wo der Zähler und Nenner teilerfremd sind und  $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ , dann und nur dann die Lösung unserer Aufgabe (in zweiter Formulierung) bilden, wenn die Differenz  $F(x) - S(x)$  ihren in dem Intervalle  $\langle -1, 1 \rangle$  maximalen Absolutwert mit abwechselnden Vorzeichen mindestens in  $n + l - d + 1$  Punkten dieses Intervalls annimmt; dabei ist

$$d = \min \{r, l\}.$$

Keht man zur ersten Formulierung unserer Aufgabe zurück, so ergibt sich, daß eine Funktion

$$(4) \quad \tau_0 T_n(x) + \dots + \tau_l T_{n-l}(x) + c_{l+1} x^{n-l-1} + \dots + c_n \\ + \frac{a_0 x^{l-l-1} + \dots + a_{l-l-1}}{b_0 x^{l-l} + b_1 x^{l-l-1} + \dots + b_{l-l}},$$

wo  $b_0 \neq 0$  und der Bruch auf die einfachste Form gebracht ist, dann und nur dann die Lösung liefert, wenn diese Funktion ihren in  $\langle -1, 1 \rangle$  maximalen Absolutwert mindestens  $n + l - l + 1$ -mal mit abwechselnden Vorzeichen annimmt.

Diese Tatsache erlaubt, die gesuchte Funktion wirklich zu bestimmen, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden soll.

### § 3.

Wird die Lösung unserer Aufgabe (in erster Formulierung) mit  $y$  bezeichnet, so ergibt sich, da  $y$  die Form (4) hat, wo  $\lambda$  eine zunächst unbestimmte,  $l$  nicht übertreffende natürliche Zahl bedeutet, daß die Gleichung

$$(5) \quad y^2 - L^2 = 0$$

genau  $2(n + l - \lambda)$  Wurzeln besitzt.

Diese Wurzeln müssen, damit die am Ende des vorigen Paragraphen erkannte Eigenschaft der Funktion  $y$  erfüllt ist, sämtlich in dem Intervalle  $\langle -1, 1 \rangle$  liegen. Und zwar müssen  $-1, 1$  einfache Wurzeln der Gleichung (5) sein, die übrigen  $2(n + l - \lambda - 1)$  Wurzeln dieser Gleichung aber werden alle zu je zwei gleich, so daß sie in der Gestalt von  $n + l - \lambda - 1$  Doppelwurzeln im Inneren des Intervalls  $\langle -1, 1 \rangle$  erscheinen werden. Diese Doppelwurzeln zusammen mit den Enden des Intervalls bilden diejenigen  $n + l - \lambda + 1$  Stellen, wo  $y$  mit abwechselnden Vorzeichen den Wert  $L$  annehmen muß.

Jetzt führen wir die Funktion

$$\eta = \frac{y + \sqrt{y^2 - L^2}}{L}$$

ein. In dem Intervall  $\langle -1, 1 \rangle$  hat sie den Betrag Eins, da in diesem Intervall die Ungleichung  $y^2 \leq L^2$  gilt. Ferner ist die Funktion  $\eta$  in der längs der Strecke  $-1, 1$  zerschnittenen  $x$ -Ebene eindeutig. Dies folgt aus der

Tatsache, daß alle Unendlichkeitstellen der Funktion  $y^3 - L^3$  von gerader Ordnung sind und alle Nullstellen (deren Anzahl gerade ist) in dem Intervalle  $(-1, 1)$  liegen. Somit können und wollen wir in dem Ausdrucke für  $\eta$  das Vorzeichen vor dem Radikal so bestimmen, daß für  $x = \infty$  die Funktion  $\eta$  unendlich wird.

Nun wollen wir die zerschnittene  $x$ -Ebene auf den Einheitskreis einer  $v$ -Ebene abbilden. Dazu setzen wir

$$x = \frac{1}{2} \left( v + \frac{1}{v} \right).$$

Als Funktion von  $v$  besitzt  $\eta$  folgende Eigenschaften:  $\eta = \eta(v)$  ist in  $|v| \leq 1$  eindeutig, in  $|v| < 1$  absolut größer als Eins und auf dem Rande vom Betrage Eins; im Punkte  $v = 0$  hat  $\eta$  einen Pol  $n$ -ter Ordnung, und aus der Form der Funktion  $y$  folgt, daß  $\eta$  noch  $l - \lambda$  Pole besitzt, welche sämtlich in  $|v| < 1$  liegen und mit  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{l-\lambda}$  bezeichnet werden mögen.

Diese Betrachtung lehrt, daß die Funktion

$$\eta v^n \prod_{j=1}^{l-\lambda} \frac{v - \beta_j}{1 - \bar{\beta}_j v}$$

in dem Bereiche  $|v| \leq 1$  regulär, in dem Gebiete  $|v| < 1$  von Null verschieden und am Rande vom Betrage Eins ist. Nach dem Schwarzschen Spiegelungssatz\*) folgt daraus, daß diese Funktion eine Konstante vom Betrage Eins sein muß. Also wird

$$\eta = \varepsilon v^{-n} \prod_{j=1}^{l-\lambda} \frac{1 - \bar{\beta}_j v}{v - \beta_j} \quad (|\varepsilon| = 1).$$

Diejenigen Wurzeln  $\beta_i$ , welche komplex sind, sind paarweise konjugiert. Darum kann man  $\eta$  auch in der Form

$$\eta = \varepsilon v^{-n} \prod_{j=1}^{l-\lambda} \frac{1 - \beta_j v}{v - \bar{\beta}_j}$$

darstellen. Da außerdem

$$(6) \quad y = \frac{L}{2} \left( \eta + \frac{1}{\eta} \right)$$

ungeändert bleibt, wenn man  $v$  durch  $\frac{1}{v}$  ersetzt, bemerken wir, daß  $\varepsilon = \pm 1$  sein muß.

Endlich kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\eta$  in der Gestalt

$$(7) \quad \eta = \pm v^{-n} \prod_{j=1}^l \frac{1 - \beta_j v}{v - \beta_j} = \pm v^{-n} \omega(v) = \pm v^{-n} \frac{\mu_0 v^l + \mu_1 v^{l-1} + \dots + \mu_l}{\mu_1 v^l + \mu_{l-1} v^{l-1} + \dots + \mu_0}$$

annehmen, wobei  $\mu_l = 1$  und  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{l-1}$  reelle Parameter bedeuten.

\*) Vgl. L. Bieberbach, *Moderne Funktionentheorie*, S. 123 (1927).

Denn im Falle  $\lambda \neq 0$  kann man als  $\beta_{i-1+1}, \dots, \beta_i$  beliebige komplexe Zahlen vom Betrage Eins annehmen, mit der einzigen Einschränkung, daß die so im Zähler und Nenner entstehenden komplementären Faktoren reelle Koeffizienten haben; dann sind diese Faktoren identisch.

Auf Grund von (6) und (7) erhalten wir für die gesuchte Funktion  $y$  den Ausdruck

$$(8) \quad y = \frac{M}{2} \left\{ v^{-n} \omega(v) + v^n \omega\left(\frac{1}{v}\right) \right\},$$

wo  $L = \pm M = |M|$ .

Es bleibt nur übrig, die Größen  $M, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{i-1}$  zu finden. Dazu müssen wir (8) mit (4) vergleichen. Dies führt zur Identität

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_0}{2} \left( v^n + \frac{1}{v^n} \right) + \frac{\tau_1}{2} \left( v^{n-1} + \frac{1}{v^{n-1}} \right) + \dots + \frac{\tau_l}{2} \left( v^{n-l} + \frac{1}{v^{n-l}} \right) + \dots \\ &= \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{v^n} \frac{\mu_0 v^l + \dots + \mu_l}{\mu_0 v^l + \dots + \mu_n} + v^n \frac{\mu_l v^l + \dots + \mu_0}{\mu_0 v^l + \dots + \mu_l} \right\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & (\mu_1 v^1 + \dots + \mu_0) \left( \frac{r_0}{v^n} + \frac{r_1}{v^{n-1}} + \dots + \frac{r_l}{v^{n-l}} + \dots \right) \\ &= \frac{M}{v^n} (\mu_0 v^1 + \dots + \mu_l) + v^n \mathfrak{P}(v). \end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten liefert folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} M\mu_i &= \mu_0 \tau_0, \\ M\mu_{i-1} &= \mu_0 \tau_1 + \mu_1 \tau_0, \\ M\mu_{i-2} &= \mu_0 \tau_2 + \mu_1 \tau_1 + \mu_2 \tau_0, \\ &\dots \\ M\mu_0 &= \mu_0 \tau_i + \mu_1 \tau_{i-1} + \mu_2 \tau_{i-2} + \dots + \mu_i \tau_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Größe  $M$  genügt also der charakteristischen Gleichung

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \tau_1 - M & \tau_{1-1} & \dots & \tau_1 & \tau_0 \\ \tau_{1-1} & \tau_{1-2} - M & \dots & \tau_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_1 & \tau_0 & \dots & -M & 0 \\ \tau_0 & 0 & \dots & 0 & -M \end{vmatrix} = 0.$$

Alle Wurzeln dieser Gleichung sind reell. Aus dem Charakter unserer Aufgabe ist ersichtlich, daß der Betrag der absolut kleinsten Wurzel die Abweichung  $L$  geben wird.

Nachdem  $M$  gefunden ist, bekommen wir die Parameter  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{i-1}$  aus dem System (9).

Die Aufgabe ist somit vollständig gelöst.

## § 4.

Wir wollen als Beispiel den Fall  $l = 2$  betrachten.

Es sei  $l = 2$ ;  $\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_1 = -\sigma$ ,  $\sigma_2 = \varrho$ .

In diesem Falle nimmt (10) die Gestalt

$$(11) \quad N^3 - (n + 4\varrho + 1)N^2 + (n + 4\varrho - 4\sigma^2 - 1)N + 1 = 0$$

an, wobei

$$N = \pm 2^{n-1}L.$$

Ist

$$4\varrho + n - 2\sigma^2 - 2\sigma\sqrt{\sigma^2 + 1} + 0,$$

wo  $\sigma\sqrt{\sigma^2 + 1} \geq 0$ , so werden die Zahlen  $\beta_1, \beta_2$  konjugiert komplex; dabei wird

$$\mu_2 = 1, \quad \mu_1 = \frac{2\sigma N}{1-N}, \quad \mu_0 = N.$$

In diesem Falle ist  $\lambda = 0$ .

Ist

$$4\varrho + n - 2\sigma^2 - 2\sigma\sqrt{\sigma^2 + 1} = 0, \quad \sigma\sqrt{\sigma^2 + 1} > 0,$$

so wird  $\beta_1 = N$ ,  $\beta_2 = 1$ , wobei  $N = \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 1}$ .

In diesem Falle ist  $\lambda = 1$ .

Ist endlich

$$4\varrho + n - 2\sigma^2 - 2\sigma\sqrt{\sigma^2 + 1} = 0, \quad \sigma = 0,$$

so daß  $4\varrho + n = 0$ , so wird  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $N = 1$ .

In diesem Falle ist  $\lambda = 2$ .

(Eingegangen am 25. 11. 1930.)

# Zur Theorie der elliptischen Funktionen.

Von

W. Maier<sup>1)</sup> in Lafayette (Ind., USA.).

## Einleitung.

Die durch Eisenstein<sup>2)</sup> gegebene „genaue Untersuchung“ unendlicher Doppelreihen scheint erstmals jene Idee auf elliptische Funktionen angewandt zu haben, die man heute etwa kennzeichnen mag als „Bildung analytischer Invarianten durch Summation“. Die konsequente Durchführung zeigt, daß man mehr als zwei komplexe Veränderliche mitnehmen kann, ohne die Resultate zu belasten; grundlegend ist eine Funktion  $s\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u \end{smallmatrix}\right)$  von Kronecker<sup>3)</sup>, und wir übernehmen hier den Titel jener Veröffentlichung, welche die ersten Eigenschaften von  $s\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u \end{smallmatrix}\right)$  darlegte. In Hermites Bezeichnungsweise handelt es sich um elliptische Funktionen „zweiter Art“, deren differentielle Eigenschaften an anderer Stelle<sup>4)</sup> untersucht wurden. Im Mittelpunkt der gegenwärtigen Betrachtung steht ein Additionssatz zweiten Grades, dem die  $s$ -Funktion genügt (§ 3, 2); er entspricht dem Additionstheorem vierten Grades der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion. In § 4 wird die formale Analogie zwischen Bernoullischen Polynomen und elliptischen Funktionen beleuchtet; letztere unterscheiden sich vom elementaren Grenzfall durch die Nichtexistenz zweier Grenzwerte. Als Anwendung folgt in § 5 eine Weiterführung der speziellen Teilungstheorie elliptischer Integralperioden; ist

<sup>1)</sup> Fellow of the International Education Board.

<sup>2)</sup> G. Eisenstein, *Mathematische Abhandlungen*, 1847.

<sup>3)</sup> L. Kronecker, *Zur Theorie der elliptischen Funktionen*; *Abhandlungen d. Kgl. Preussischen Akademie* 1887.

<sup>4)</sup> Bernoullische Polynome und elliptische Funktionen, sowie Theorie der  $s$ -Funktion, *Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik* 1931.



z. B. für die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion die Fünfteilung vollzogen, so sind nur noch quadratische Gleichungen aufzulösen, um für Jacobis ungerade Funktion  $\wp(v)$  den Teilwert  $\frac{\wp'(1/5)}{\wp}$  zu berechnen. Für  $\Re(\omega) = 0$  haben die nicht reellen Nullstellen von  $\wp'(v)$  trivialerweise rationale Realteile. Als Folge unserer Teilungstheorie beweisen wir: Hat auch nur eine solche Nullstelle rationales  $\frac{\wp(v)}{\omega}$ , so existiert ein Polynom  $P$ , so daß identisch in  $\omega$  die Beziehung gilt

$$P(g_2, g_3, \pi) = 0,$$

wo  $g_2, g_3$  Weierstraßs Invarianten bedeuten und die eingehenden Koeffizienten natürliche Zahlen sind.

### § 1.

#### Bernoullische Polynome als Grenzfall.

Sind  $p$  und  $q$  komplex und ist  $pq(p+q) \neq 0$ , so besteht die Teilbruchzerlegung  $\frac{1}{pq} = \frac{1}{(p+q)} \cdot \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right]$ . Es seien

$$(1) \quad \kappa, \lambda \equiv 0(1); \quad u, v, u+v \not\equiv 0(1),$$

dann wird

$$(2) \quad \frac{1}{(u+\kappa)(v+\lambda)} = \frac{1}{(u+v+\kappa+\lambda)} \cdot \left[ \frac{1}{u+\kappa} + \frac{1}{v+\lambda} \right]$$

eine rationale Identität in  $u, v$ , aus welcher Eisenstein durch Bildung von  $\sum_{\kappa+\lambda}^+$  das Additionsgesetz für  $\text{ctg } u$  herleitete.

Anstatt auf (2) unmittelbar einen Summationsprozeß auszuüben, verallgemeinern wir unsere algebraische Grundlage durch Einführung zweier reeller Größen  $x, \xi$  wobei die Ungleichungen

$$(1') \quad 0 < \xi < x < 1$$

vorausgesetzt werden. Man benutze folgende zwei Zerlegungen einer in  $\kappa, \lambda$  und  $x, \xi$  vierfach linearen Form

$$(3) \quad \kappa x + \lambda \xi = x(\kappa + \lambda) + (\xi - x)\lambda = \xi(\kappa + \lambda) + (x - \xi)\kappa,$$

um jedem Multiplikanden aus (2) einen Faktor zuzuordnen, in welchem der nämliche Summationszeiger  $\kappa, \lambda$  oder  $\kappa + \lambda$  auftritt. Dies gelingt, wenn aus (3) Exponentialfunktionen hergestellt werden; aus Konvergenzgründen wähle man dieselben vom Betrag 1, so daß sie in der komplexen Zahlenebene als „Dreh“faktoren angesprochen werden können. Aus (2), (3) bilden

wir unter den Einschränkungen (1), (1')

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{e^{2\pi i x n}}{u+n} \frac{e^{2\pi i \xi \lambda}}{v+\lambda} &= \frac{e^{2\pi i \xi (n+\lambda)}}{u+v+n+\lambda} \cdot \frac{e^{2\pi i (x-\xi) n}}{u+n} + \frac{e^{2\pi i x (n+\lambda)}}{u+v+n+\lambda} \frac{e^{2\pi i (\xi-x) \lambda}}{v+\lambda} \\
 &= \frac{e^{2\pi i \xi (n+\lambda)}}{u+v+n+\lambda} \frac{e^{2\pi i (x-\xi) n}}{u+n} - \frac{e^{2\pi i x (n+\lambda)}}{u+v+n+\lambda} \frac{e^{2\pi i (x-\xi) \cdot (-\lambda)}}{-v-\lambda}, \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x n}}{u+n} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \xi \lambda}}{v+\lambda} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \xi (n+\lambda)}}{u+v+n+\lambda} \frac{e^{2\pi i (x-\xi) n}}{u+n} \\
 &\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x (n+\lambda)}}{u+v+n+\lambda} \frac{e^{2\pi i (x-\xi) \mu}}{-v+\mu}.
 \end{aligned}$$

Von den zwei Doppelsummen rechter Hand in (4) genügt es, eine umzuformen, etwa  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \xi (n+\lambda)}}{u+v+n+\lambda}$ ; setzt man

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^n \frac{e^{2\pi i x n}}{u+n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x n}}{u+n} = f(x; u),$$

so entsteht als Grenzwert jener Doppelsumme

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=-\infty}^n \frac{e^{2\pi i \xi (n+\lambda)}}{u+v-n+\lambda} \frac{e^{2\pi i (x-\xi) n}}{u+n} &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \xi v}}{u+v+v} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (x-\xi) n}}{u+n} \\
 &= f(\xi, u+v) \cdot f(x-\xi, u),
 \end{aligned}$$

und man erhält aus (4) folgenden Additionssatz

$$(7) \quad f(x, u) \cdot f(\xi, v) = f(\xi, u+v) \cdot f(x-\xi, u) - f(x, u+v) \cdot f(x-\xi, -v).$$

Diese Identität in vier Argumenten sei der Ausgangspunkt der Theorie. Sie enthält das Additionsgesetz der  $\text{ctg}$ -Funktion sowie die Theorie der Bernoullischen Polynome. Hätte man in (2)  $v$  durch  $-v$  und  $\lambda$  durch  $-\lambda$  ersetzt, so wäre man über

$$\frac{1}{(u+n)(v+\lambda)} = \frac{1}{(u-v+n-\lambda)(v+\lambda)} - \frac{1}{(u-v+n-\lambda)(v+n)}$$

wegen der aus (1'), (5) fließenden Spiegelungseigenschaft

$$(8) \quad f(x, u) + f(1-x, -u) = 0$$

zu folgender Gestalt des Additionstheorems gelangt

$$(7') \quad f(x, u) f(\xi, v) = f(x, u-v) \cdot f(x+\xi, v) + f(\xi, v-u) f(x+\xi, u);$$

anstatt (1') muß hier verlangt werden

$$(1'') \quad 0 < \xi < 1-x < 1.$$

Nach Cauchys Integralsatz kann der Ausdruck (5) summiert werden; mit  $0 < x < 1$ ;  $u \neq 0(1)$  gilt, wenn unendliche Summationsgrenzen nur durch Vorzeichen angedeutet werden,

$$\sum_{-}^{+} \frac{e^{2\pi i x v}}{u+v} = \sum_{-}^{+} \frac{e^{2\pi i x v}}{u+v} \oint_{0+} \frac{dt}{1-e^{-2\pi i t}},$$

wenn  $dt$  nach  $t = u$  verlegt wird

$$= \oint_{u+} \frac{dt}{(t-u)} \frac{e^{-2\pi i x t}}{(1-e^{-2\pi i t})},$$

somit

$$(9) \quad \sum_{-}^{+} \frac{e^{2\pi i x v}}{u+v} = 2\pi i \frac{e^{-2\pi i x u}}{1-e^{-2\pi i u}}.$$

Aus (5), (9) entnimmt man

$$(10) \quad \frac{1}{2} [f(x) + f(1-x)] = \sum_{-}^{+} \frac{\cos 2\pi x v}{u+v} = \pi i \frac{e^{\pi i u(1-2x)} + e^{-\pi i u(1-2x)}}{e^{\pi i u} - e^{-\pi i u}}$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [f(x, u) + f(1-x, u)] = \operatorname{ctg} \pi u,$$

wo die in  $x$  ungleichmäßige Konvergenz insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n \frac{1}{u+v} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^{+n} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{2\pi i x v}}{u+v} + \lim_{u \rightarrow 0} \sum_{-}^{+} \frac{e^{2\pi i x v}}{u+v}$$

nach sich zieht;

$$\frac{1}{2i} [f(x, u) - f(1-x, u)] = \pi \cdot \frac{e^{\pi i u(1-2x)} - e^{-\pi i u(1-2x)}}{e^{\pi i u} - e^{-\pi i u}}$$

ergibt noch

$$(10') \quad \frac{1}{2\pi i} \lim_{x \rightarrow 0} [f(x, u) - f(1-x, u)] = 1.$$

Trägt man (10), (10') in (7') ein, so folgt für  $\xi \rightarrow 0$  das Subtraktionstheorem für  $\operatorname{ctg} u$ .

Will man die zum Nachweis von (6) nötige Größenschätzung umgehen, so benutze man die Darstellung (9), um das Additionstheorem (7') zu bestätigen. Dabei hebt sich der gemeinsame Faktor  $-4\pi^2 \cdot e^{-2\pi i(xu+\xi v)}$  so daß mit  $-e^{-2\pi i u} = a$ ;  $-e^{-2\pi i v} = b$  nur

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)} = \frac{1}{\left(1-\frac{a}{b}\right)(1+b)} + \frac{1}{\left(1-\frac{b}{a}\right)(1+a)}$$

oder

$$\frac{b-a}{(1+a)(1+b)} = \frac{b}{1+b} - \frac{a}{1+a}$$

nachzuweisen bleibt, was trivial ist.

Aus der so bestätigten Identität (7') können durch Besonderung oder durch Grenzprozesse Aussagen gezogen werden, die eine kleinere Anzahl von Argumenten enthalten. Setzt man z. B.

$$f\left(\frac{1}{8}, u\right) = \sum_{\nu} \frac{e^{\frac{2\pi i \nu}{8}}}{u + \nu} = 2\pi i \frac{e^{\frac{\pi i u}{8}}}{e^{\pi i u} - e^{-\pi i u}} = \varphi(u),$$

so wird

$$(11) \quad \varphi(u)\varphi(v) + \varphi(u-v)\varphi(-v) + \varphi(v-u)\varphi(-u) = 0.$$

Durch Spezialisierung wurden aus (11) die Argumente  $x, y, \xi, \eta$  entfernt; umgekehrt kommen wir zu Differentialbeziehungen in  $u$ , wenn  $v = u + \varepsilon$  gesetzt und  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehend angenommen wird. Setzt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\nu \neq 0 \\ \pm n}} \frac{e^{2\pi i \nu x}}{\nu} = g_1(x)$$

und schreibt abkürzend

$$g_1(x) = g_1; \quad g_1(\xi) = \gamma_1,$$

so wird

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{\varepsilon} + f(x, \varepsilon) \right] = g_1$$

und für  $0 < |\varepsilon| < |u| < 1$

$$f(x, u + \varepsilon) = f(x, u) + \varepsilon f'(x, u) + \varepsilon^2 \dots,$$

wo  $f' = \frac{\partial f}{\partial u}$  ist; aus (7') wird so

$$f(x, u) f(\xi, u + \varepsilon) = f(x, -\varepsilon) f(x + \xi, u + \varepsilon) + f(\xi, \varepsilon) f(x + \xi, u)$$

(12)

$$f(x, u) f(\xi, u)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left( -\frac{1}{\varepsilon} + g_1 \dots \right) [f(x + \xi, u) + \varepsilon f'(x + \xi, u)] + \left( \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_1 \right) [f(x + \xi, u)] + O(\varepsilon) \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -f'(x + \xi, u) + [g_1 + \gamma_1] f(x + \xi, u) + O(\varepsilon) \right\} \\ &= -f'(x + \xi, u) + [g_1 + \gamma_1] f(x + \xi, u). \end{aligned}$$

Diese von  $v$  freie differentielle Aussage (12) vermittelt, wenn man nach steigenden Potenzen von  $u$  entwickelt, quadratische Rekursionen zwischen den Ausdrücken

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\nu \neq 0 \\ \pm n}} \frac{e^{2\pi i \nu x}}{\nu^l} = g_l(x) \quad \text{für } l = 1, 2, \dots,$$

wo wieder  $g_l(x) = g_l$ ;  $g_l(\xi) = \gamma_l$  und zudem  $g_0(x) = -1$  geschrieben werden möge. Für  $m = -1, 0, 1, \dots$  gibt (12)

$$(12') \quad \sum_{-1}^{m+1} g_{\mu+1} \gamma_{m-\mu+1} = (m+1) g_{m+2}(x + \xi) + [g_1 + \gamma_1] g_{m+1}(x + \xi);$$

inhaltsreichere algebraische Beziehungen als (12') gewinnt man für die  $g_i$ , wenn man auf (7') zurückgeht und die Potenzreihe in den beiden Veränderlichen  $u, v$  ansetzt. Mit

$$f(x, u) = \sum_{-1}^{\infty} (-u)^x g_{x+1}$$

geht (7') über in

$$(14) \quad \sum_{-1}^{\infty} (-u)^x g_{x+1} \sum_{-1}^{\infty} (-v)^y \gamma_{y+1} = \sum_{-1}^{\infty} (v-u)^x g_{x+1} \sum_{-1}^{\infty} (-v)^y g_{y+1}(x+\xi) \\ + \sum_{-1}^{\infty} (u-v)^x \gamma_{x+1} \sum_{-1}^{\infty} (-u)^y g_{y+1}(x+\xi).$$

Um Koeffizientenvergleich einer Entwicklung  $\sum_{-1}^{\infty} c_{\kappa\lambda} (-u)^x (-v)^y$  vornehmen zu können, erweitere man (14) mit  $(v-u)$  und erhält für  $c_{\kappa\lambda}$  folgende Ausdrücke

$$g_{\kappa} \gamma_{\lambda+1} - g_{\kappa+1} \gamma_{\lambda} = g_{\kappa} g_{\lambda+1}(x+\xi) - \binom{\kappa+1}{1} g_{\kappa+1} g_{\lambda}(x+\xi) + \dots \\ + (-1)^{\lambda} \binom{\kappa+\lambda}{\lambda} g_{\kappa+\lambda} g_1(x+\xi) + (-1)^{\lambda} \binom{\kappa+\lambda+1}{\lambda+1} g_{\kappa+\lambda+1} \\ - \left\{ \gamma_{\lambda} g_{\kappa+1}(x+\xi) - \binom{\lambda+1}{1} \gamma_{\lambda+1} g_{\kappa}(x+\xi) + \dots + (-1)^{\kappa} \binom{\lambda+\kappa+1}{\kappa+1} \gamma_{\lambda+\kappa+1} \right\}$$

für  $\kappa, \lambda = 0, 1, 2, \dots$  und diese doppelte Folge von Aussagen wird in Determinantengestalt für  $0 \leq \kappa, \lambda; \kappa \leq \lambda$  zu

$$(15) \quad \begin{vmatrix} g_{\kappa} & g_{\kappa+1} \\ \gamma_{\lambda} & \gamma_{\lambda+1} \end{vmatrix} = \sum_{\mu=0}^{\lambda+1} (-1)^{\mu} \cdot \begin{vmatrix} \binom{\kappa+\mu}{\mu} g_{\kappa+\mu} & g_{\kappa+1-\mu}(x+\xi) \\ \binom{\lambda+\mu}{\mu} \gamma_{\lambda+\mu} & g_{\lambda+1-\mu}(x+\xi) \end{vmatrix}.$$

Wir spezialisieren (15) auf  $\lambda = 0$  zu

$$(15') \quad g_{\kappa} \gamma_1 + g_{\kappa+1} = g_{\kappa} g_1(x+\xi) + (\kappa+1) g_{\kappa+1} - \sum_{\mu=0}^{\kappa+1} \gamma_{\mu} g_{\kappa+1-\mu}(x+\xi) (-1)^{\mu}$$

und setzen  $1 - \xi - x = \bar{x}$ ; die  $f$ -Spiegelung (8) vererbt sich auf die  $g_r$  und gibt

$$(8') \quad g_r(1-x) = (-1)^r g_r \quad \text{für } r = 0, 1, \dots,$$

so daß (15') jetzt geschrieben werden kann

$$g_{\kappa}(1-x) [g_1(\bar{x}) + \gamma_1] + \kappa g_{\kappa+1}(1-x) = \sum_{\mu=0}^{\kappa+1} \gamma_{\mu} g_{\kappa+1-\mu}(\bar{x}),$$

und dies ist wegen  $1-x = \xi + \bar{x}$  nichts anderes als (12').

Betrachten wir (12') als Additionstheorem für  $g_m(x+\xi)$ , so wird

$$(16) \quad g_m(x+\xi) = P(g_1, g_2, \dots, g_m; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$$

als Polynom in  $2m$  Argumenten mit rationalen Zahlkoeffizienten dargestellt.

Vollzieht man in (12') den Grenzübergang  $x \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow 0$  und benutzt die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_l(x) = g_l(0) \quad \text{für } l = 0, 1, 2, \dots,$$

die nach (13) für  $l+1$  trivial ist, so ist jedes  $g_l(0)$  rational aus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{\nu}^+ \frac{e^{2\pi i x \nu}}{\nu} = g_1(0) = \pi i$$

bestimmt mittels der quadratischen Rekursion

$$(17) \quad \sum_{-1}^{m+1} g_{\mu+1}(0) g_{m-\mu+1}(0) = (m+1) g_{m+2}(0) + 2 g_1(0) \cdot g_{m+1}(0).$$

Unter Benutzung von (8') führe man jetzt in (12') den anderen Grenzprozeß aus:  $\xi \rightarrow 1-x$ . Er liefert

$$(18) \quad \sum_{-1}^{m+1} (-1)^{\mu} g_{\mu+1} g_{m-\mu+1} = -(m+1) g_{m+2}(0)$$

und drückt jedes  $g_{2m}$  durch  $g_{2m-1}, g_{2m-3}, \dots, g_3, g_1$  und  $g_1(0)$  rational aus; zwischen den  $g_1, g_3, \dots$  ist damit keinerlei Abhängigkeit gesetzt.

Eine solche erhält man aus (15) für  $\lambda = 1$ , nämlich für  $x = 0, 1, \dots$

$$(19) \quad \sum_{0}^{x+1} (-1)^{\mu} \mu \gamma_{\mu} g_{x+1-\mu}(x+\xi) \\ = g_{x-1} \gamma_2 - g_x \gamma_1 + \binom{x+1}{2} g_{x+1} + x g_x g_1(x+\xi) - g_{x-1} g_2(x+\xi).$$

Ersetzt man in (19) die Größen  $x, \xi$  durch  $1-x, \xi+x$  und addiert, so entsteht die mit  $x+1$  erweiterte Gleichung (15'); mit ihr ist also auch (17), (18) in (19) enthalten.

Linearkombination von (15'), (19) gibt mit (8') entsprechend (12') für  $m = -2, -1, \dots$

$$(19') \quad \sum_{-1}^{m+2} \mu \gamma_{\mu+1} g_{m+2-\mu} \\ = [\gamma_2 - g_2] g_{m+1}(x+\xi) + (m+1) g_1 g_{m+2}(x+\xi) + \binom{m+2}{2} g_{m+3}(x+\xi),$$

und mit  $\xi \rightarrow 1-x$

$$(19'') \quad \sum_{-1}^{m+2} \mu g_{\mu+1} g_{m+2-\mu} (-1)^{\mu+1} = (m+1) g_1 g_{m+2}(0) + \binom{m+2}{2} g_{m+3}(0).$$

Aus (19'') findet man jedes  $g_l$  rational aus

$$\sum_{\nu}^+ \frac{e^{2\pi i x \nu}}{\nu} = g_1 = \pi i (1-2x),$$

so daß das Additionstheorem (16) sich vereinfacht und  $g_1(x + \xi)$  als Polynom  $l$ -ten Grades von nur zwei Argumenten liefert, etwa

$$(16') \quad g_1(x + \xi) = Q_m(g_1, \gamma_1).$$

Die sonst gebräuchliche Erklärung der Bernoullischen Polynome

$$(20) \quad B_l(x) = \frac{d^l}{dy^l} \frac{ye^{xy}}{e^y - 1} \Big|_{y=0} = -g_l(x) \cdot \frac{l!}{(2\pi i)^l}$$

macht (16') evident; verloren geht nur der heuristische Gesichtspunkt für die elliptischen Funktionen.

## § 2.

### Periodizität von $s\left(\frac{x, y}{u}\right)$ .

Zufolge (1.9) konvergiert die einfach unendliche Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i x k}}{u + k} \quad \text{für } 0 < x < 1 \quad \text{und} \quad u \not\equiv 0(1).$$

Sei  $k$  ein neuer Summationszeiger,  $\omega$  und  $y$  Parameter, so verallgemeinern wir den oben stehenden Summanden zu

$$\frac{e^{2\pi i (xk + yk)}}{u + k + \omega k};$$

um die Nenner von Null fern zu halten, schränken wir  $\omega$  ein durch die Forderung

$$(1) \quad 0 < \Im(\omega)$$

und verlangen zudem

$$(1') \quad u \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}.$$

Der Zähler bleibt für alle ganzen rationalen Zeiger  $k$  beschränkt, wenn  $x, y$  reell bleiben; wir setzen die engere Bestimmung

$$(1'') \quad 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1.$$

Die Verallgemeinerung

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i (xk + yk)}}{u + k + \omega k}$$

von (1.5) existiert dann zwar nicht, wohl aber der Grenzwert

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{e^{2\pi i (xk + yk)}}{u + k + \omega k} = s\left(\frac{x, y}{u}\right);$$

er wurde von Kronecker eingeführt als grundlegend zur Theorie der elliptischen Funktionen.



Den Konvergenzbeweis der Reihe (2) erbringt man durch Zerlegung in einfach erstreckte Teilsummen und Größenschätzung. Seien zwei natürliche Zahlen vorgelegt

$$m > m_0(x, y, u, \omega) \quad \text{und} \quad n > m;$$

dann ist nur

$$(3) \quad \left| \sum_{1+m}^n \sum_{-m}^k \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u+h+\omega k} \right| < m^{-\frac{1}{2}}$$

zu zeigen, um

$$\left| \sum_{-n}^n \sum_{-m}^k \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u+h+\omega k} - \sum_{-m}^m \sum_{-n}^k \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u+h+\omega k} \right| < m^{-\frac{1}{2}}$$

unter gleichen Voraussetzungen zu erkennen; wir betrachten aber (3) unter der weiteren Einschränkung

$$(1''') \quad \Re(\omega) = 0,$$

setzen für  $0 < \Re(t)$

$$e^{2\pi i x - t} = v; \quad e^{2\pi i y - \omega t} = w$$

und bilden, um die Nenner links in (3) „hochzuziehen“, Eulersche Integrale über  $dt$ . Da die Operationen tauschbar sind, führe man die endlichen geometrischen Reihen im Integranden zuerst aus und benutze dann Cauchys Integralsatz

$$\begin{aligned} (3') \quad \sum_{1+m}^n \sum_{-m}^k \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u+h+\omega k} &= \sum_{1+m}^n \sum_{-m}^k \int_0^\infty dt e^{-tu+h(2\pi i x - t)+k(2\pi i y - \omega t)} \\ &= \int_0^\infty dt e^{-tu} \sum_{1+m}^n v^h \sum_{-m}^k w^k \\ &= \int_0^\infty dt e^{-tu} \frac{v^{1+m} - v^{1+n}}{1-v} \frac{w^{-m} - w^{n+1}}{1-w} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{r(1+\omega)} dt e^{-tu} v^{1+m} \frac{1-v^{n-m}}{1-v} \frac{w^{-m}-1}{1-w} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{r(1-\omega)} dt e^{-tu} v^{1+m} \frac{1-v^{n-m}}{1-v} \frac{1-w^{n+1}}{1-w} \right\}. \end{aligned}$$

Die Ausbiegungen der Integrationswege in der  $t$ -Ebene sind so gewählt, daß die Integranden für  $|t| > 0$  klein werden. Mit einer von  $m, n$  unabhängigen Zahl  $c$  folgt aus (3')

$$\left| \sum_{1+m}^n \sum_{-m}^k \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u+h+\omega k} \right| < c \int_0^\infty dt e^{-tu} v^{1+m} < \int_0^\infty dt e^{-t\sqrt{m}} = m^{-\frac{1}{2}},$$

d. h. (3) und insbesondere gilt auch für den „Randstreifen“

$$\left| \sum_{-n}^n k \frac{e^{2\pi i k y}}{u + h + k\omega} \right| < n^{-\frac{1}{2}}.$$

Durch die Teilbruchreihe (2) ist also eine in  $u$  meromorphe Funktion  $s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u \end{smallmatrix}\right)$  bestimmt, deren Verhalten im Nullpunkt durch

$$(4) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} u s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u \end{smallmatrix}\right) = 1$$

gekennzeichnet wird, denn  $-\frac{1}{u} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n k$  konvergiert für  $|u| \rightarrow 0$  gleichmäßig. Nach (4) hat  $s$  einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1 in  $u = 0$ ; sein Verhalten im großen ist aber durch Periodizitätseigenschaften sehr durchsichtig zu bestimmen.

Aus (2) entnimmt man

$$s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u+1 \end{smallmatrix}\right) = e^{2\pi i x} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n k \frac{e^{2\pi i [x(h+1)+yk]}}{u + (h+1) + k\omega} = e^{-2\pi i x} s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u \end{smallmatrix}\right)$$

und

$$s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u+\omega \end{smallmatrix}\right) = e^{2\pi i y} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n k \frac{e^{2\pi i [xh+y(k+1)]}}{u + h + \omega(k+1)} = e^{-2\pi i y} s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u \end{smallmatrix}\right),$$

d. h.

$$(5) \quad s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u \end{smallmatrix}\right) = e^{2\pi i x} s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u+1 \end{smallmatrix}\right) = e^{2\pi i y} s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u+\omega \end{smallmatrix}\right).$$

Die Periodizität (5) zusammen mit dem Grenzwert (4) und der Regularitätsforderung für jedes  $u \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}$  bestimmt die Transzendente  $s$  eindeutig als elliptische Funktion „zweiter Art“ in der Bezeichnung von Hermite; nach Abzug einer Vergleichsfunktion bleibt nämlich ein Rest, dessen Betrag längs eines endlichen Parallelogrammes beliebig klein wird. Für rationale  $x, y$  wird sie sogar in  $u$  doppelt periodisch, also wegen (4) elliptisch, und es empfiehlt sich, sie durch Jacobis Thetafunktion auszudrücken.

Unter den Voraussetzungen (1), (1'), (1'') konvergiert

$$(6) \quad -i \sum_{\nu}^+ (-1)^{\nu} e^{\pi i [\omega(\nu+\frac{1}{2})^2 + 2u(\nu+\frac{1}{2})]} = \vartheta(u),$$

und es besteht

$$\vartheta'(0) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\vartheta(u)} = 1.$$

Als Eigenschaft eines jeden Summanden in (6) erscheint

$$\vartheta(u+1) = -\vartheta(u),$$

und als Wirkung der vollzogenen Summation über  $\nu$

$$(7) \quad \vartheta(u+\omega) = -e^{-\pi i (2u+\omega)} \vartheta(u).$$

Für jedes von  $u$  freie  $z$  bleibt  $\frac{\vartheta(u+z)}{\vartheta(u)}$  unverändert, wenn  $u$  um eins vermehrt wird; die erste der Funktionalgleichungen (5) wird also durch  $e^{-2\pi i z u} \frac{\vartheta(u+z)}{\vartheta(u)}$  befriedigt. Die Bestimmung von  $z$  gelingt durch Benutzung der zweiten Periodizität in (5) aus

$$e^{-2\pi i x(u+\omega)} \frac{\vartheta(u+z+\omega)}{\vartheta(u+\omega)} = e^{-2\pi i y - 2\pi i x u} \frac{\vartheta(u+z)}{\vartheta(u)}$$

nach (7):

$$e^{2\pi i(y-\omega x)} \frac{e^{-\pi i(2u+2z+\omega)} \vartheta(u+z)}{e^{-\pi i(2u+\omega)} \vartheta(u)} = \frac{\vartheta(u+z)}{\vartheta(u)},$$

woraus notwendig folgt

$$z \equiv y - \omega x \quad (1).$$

Wählen wir

$$(8) \quad z = y - \omega x,$$

so ist gemäß (4) eindeutig

$$(9) \quad s\left(\begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix}\right) = e^{-2\pi i x u} \frac{\vartheta'(0) \vartheta(u+z)}{\vartheta(u) \vartheta(z)}.$$

Die schon durch Kronecker gegebene Darstellung (9) erlaubt gegenüber (2) die Aufhebung der Schranken (1''); es ist jetzt  $s$  meromorph fortgesetzt durch die volle  $x$ - und  $y$ -Ebene hindurch. Den Perioden (5) von  $s$  entsprechend genügt  $f$  in (1.5.9) der Bedingung

$$f(x, u+1) = e^{-2\pi i x} f(x, u),$$

wie zu erwarten. In Abhängigkeit von  $x$  jedoch zeigt die rechte Seite von (1.9) folgendes Verhalten:

$$(10) \quad f(x+1, u) = e^{-2\pi i u} f(x, u),$$

wodurch die Konvergenzgrenzen der in  $x$  periodischen Darstellung linker Hand in (1.9) evident werden. Vergleicht man entsprechend die Erscheinungen bei  $s$ , so findet man

$$s\left(\begin{matrix} x + \frac{1}{\omega}, y \\ u \end{matrix}\right) = e^{\frac{-2\pi i u}{\omega}} \cdot e^{2\pi i x u} \frac{\vartheta'(0) \vartheta(u+z-1)}{\vartheta(z) \vartheta(u-1)} = e^{\frac{-2\pi i u}{\omega}} \cdot s\left(\begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix}\right)$$

und

$$(10') \quad s\left(\begin{matrix} x+1, y \\ u \end{matrix}\right) = e^{-2\pi i u(1+\omega)} \frac{\vartheta'(0) \vartheta(u+z-\omega)}{\vartheta(u) \vartheta(z-\omega)} \\ = e^{-2\pi i u} s\left(\begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix}\right) e^{\pi i(2u+2z-\omega-2s+\omega)} = s\left(\begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix}\right),$$

so daß, einfacher als im elementaren Fall (10), die  $x$ -Funktion  $s$  in Wahrheit die Periode eins aufweist, und die Darstellung (2) anstatt durch (1'') nur durch

$$(1^*) \quad -\infty < x, y < \infty; \quad x, y \not\equiv 0(1)$$

einzuschränken ist. Gegen  $y$ -Schreitungen nämlich wird entsprechend

$$s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u \end{smallmatrix}\right) = e^{2\pi i u} s\left(\begin{smallmatrix} x, y + \omega \\ u \end{smallmatrix}\right) = s\left(\begin{smallmatrix} x, y + 1 \\ u \end{smallmatrix}\right).$$

Was also die trigonometrische Darstellung (1.9) nur vortäuscht, eine  $x$ -Periode, das kommt im Fall der Doppelreihe (2) der dargestellten Funktion  $s$  als Eigenschaft zu. Daher ist es wünschenswert, den Grenzprozeß

$$\lim_{\Im(\omega) \rightarrow \infty} s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u \end{smallmatrix}\right)$$

vermöge (6), (9) genauer zu verfolgen; man erhält mit  $e^{\pi i \omega} = q$  für große  $\Im(\omega)$  die Schätzung

$$i\vartheta(u) = \sum_{-1}^0 (-1)^r q^{(r+\frac{1}{2})^2} e^{2\pi i u(r+\frac{1}{2})} + O(q^2),$$

$$i\vartheta'(0) = \sum_{-1}^0 (-1)^r \cdot 2\pi i \left(r + \frac{1}{2}\right) q^{(r+\frac{1}{2})^2} + O(q^2), \quad \text{mit } 0 < x < 1,$$

$$i\vartheta(z) = q^{\frac{1}{4}(1-2z)} e^{\pi i z} + O(q^{\frac{1}{4}+z}),$$

$$i\vartheta(u+z) = q^{\frac{1}{4}(1-2z)} e^{\pi i(u+z)} + O(q^{\frac{1}{4}+z})$$

und aus (6)

$$\lim_{\Im(\omega) \rightarrow \infty} s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u \end{smallmatrix}\right) = e^{-2\pi i x u} \frac{2\pi i}{e^{\pi i u} - e^{-\pi i u}} \cdot e^{\pi i u} = 2\pi i \frac{e^{-2\pi i x u}}{1 - e^{-2\pi i u}},$$

d. h. (1.9).

Indem wir in (2) die  $x, y$  wieder innerhalb des Einheitsintervalles annehmen, tragen wir den Konvergenzbeweis allgemein für  $0 < \Im(\omega)$  nach, befreien uns also von der Einschränkung (1''').

Setzt man wie in (3) für  $m_0 < m < n$

$$(11) \quad \sum_{1+m}^n \sum_{-m}^n k \frac{e^{2\pi i(xk+yk)}}{u+k+\omega k} = r_m,$$

benutzt in einer komplexen  $v$ -Ebene das positiv umfahrene Rechteck  $v_1 v_2 v_3 v_4$  als Integrationsweg, wo

$$v_1 = -\left(m + \frac{1}{2}\right) + \omega\left(m + \frac{1}{2}\right),$$

$$v_2 = -\left(n + \frac{1}{2}\right) + \omega\left(m + \frac{1}{2}\right),$$

$$v_3 = -\left(n + \frac{1}{2}\right) - \omega\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$v_4 = -\left(m + \frac{1}{2}\right) - \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

gewählt wird, um gerade alle Pole von  $r_m$  mitzunehmen, so kann nach (9) für  $r_m$  der Ausdruck gegeben werden

$$r_m = \frac{\phi'(0)}{2\pi i} \oint \frac{dv}{v-u} e^{-2\pi i z v} \frac{\phi(v+z)}{\phi(v)\phi(z)};$$

die Größenschätzung verläuft gleichartig über jeder der vier Rechteckseiten. Es genügt, etwa

$$(12) \quad \left| \int_{\gamma_k} \frac{dv}{v-u} e^{-2\pi i z v} \frac{\phi(v+z)}{\phi(v)} \right| < m^{-\frac{1}{2}}$$

nachzuweisen, wobei wir zunächst  $x$  als rationale Zahl voraussetzen; es sei  $0 < kx \equiv 0(1)$ , so wird wegen (5), (6)

$$(13) \quad \int_{\gamma_k} dv e^{-2\pi i z v} \frac{\phi(v+z)}{\phi(v)} = 0.$$

Es genügt in (11)  $n < m^{\frac{1}{2}}$  anzunehmen, denn das Summationsgebiet in (2) kann durch eine konvergente Folge von Randsummen des Typus  $r_m$  durch die volle  $h, k$ -Ebene hin erstreckt werden. Zerlegt man  $\int dv$  in (12), so bleibt

$$\int_{\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}+k} dv e^{-2\pi i z v} \frac{\phi(v+z)}{\phi(v)} \sum_m^{[m^{\frac{1}{2}}]} (v-u+l)^{-1}$$

zu betrachten; wir entwickeln als fallende Reihe nach  $(l-u)$ :

$$\frac{1}{l-u+v} = \frac{1}{l-u} - \frac{v}{(l-u)^2} + \frac{v^2}{(l-u)^3} \dots,$$

entfernen vermöge (13) das von  $v$  freie Glied, finden

$$\left| \int_{\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}+k} dv e^{-2\pi i z v} \frac{\phi(v+z)}{\phi(v)} \sum_m^{[m^{\frac{1}{2}}]} \frac{1}{l-u+v} \right| < c(x, y, u, \omega) \sum_m^{[m^{\frac{1}{2}}]} \frac{1}{l^n} < m^{-\frac{1}{2}}$$

für hinreichend große  $m$ , und befreien uns durch Stetigkeitsbetrachtung von der Einschränkung rationaler  $x$ . Damit ist (12), also (3), für jedes  $\omega$  der oberen Halbebene bewiesen.

### § 3.

#### Additionssatz.

Das Additionsgesetz der Exponentialfunktion  $e^u = E(u)$  kann gleichzeitig zu  $E(u)E(v) = E(u+v)$  auch durch

$$E(u+x) \cdot E(v+y) = E(u+v) \cdot E(x+y)$$

gegeben werden. Für die durch (2.2) eingeführte Funktion  $s\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u \end{smallmatrix}\right)$  gilt ganz entsprechend ein Additionssatz, der formal aus (1.7') hervorgeht, wenn dort  $f$  zu  $s$  verallgemeinert wird. Gefunden wurde diese Tatsache durch Umformung von Teilbruchreihen und Restschätzung entsprechend (2.3'); eine Bestätigung kann wegen (2.9) mit den klassischen Hilfsmitteln der  $\vartheta$ -Theorie gegeben werden. Setzt man für  $0 < \Im(\omega)$

$$(1) \quad y - \omega x = z; \quad \eta - \omega \xi = \zeta,$$

so gilt für jedes System von  $u, v, u-v, z, \zeta, z+\zeta \equiv 0 \pmod{1, \omega}$  die Aussage

$$(2) \quad s\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u \end{smallmatrix}\right) s\left(\begin{smallmatrix} \xi & \eta \\ v \end{smallmatrix}\right) = s\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u-v \end{smallmatrix}\right) s\left(\begin{smallmatrix} x+\xi & y+\eta \\ v \end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix} \xi & \eta \\ v-u \end{smallmatrix}\right) s\left(\begin{smallmatrix} x+\xi & y+\eta \\ u \end{smallmatrix}\right).$$

Zum Beweis trage man (2.9) in (3.2) ein, benutze

$$xu + \xi v = x(u-v) + (\xi+x)v = \xi(v-u) + (x+\xi)u$$

und kürze, so bleibt folgende reine  $\vartheta$ -Identität zu beweisen:

$$\frac{\vartheta(u+z) \vartheta(v+\zeta)}{\vartheta(u) \vartheta(z) \vartheta(v) \vartheta(\zeta)} = \frac{\vartheta(u-v+z) \vartheta(v+\zeta)}{\vartheta(u-v) \vartheta(z) \vartheta(v) \vartheta(z+\zeta)} + \frac{\vartheta(v-u+\zeta) \vartheta(u+z+\zeta)}{\vartheta(v-u) \vartheta(\zeta) \vartheta(u) \vartheta(z+\zeta)}.$$

Mit  $\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial C}{\partial u} = 0$  erkennt man funktionentheoretisch, daß

$$\vartheta(u-v) \vartheta(u+z) A = \vartheta(u) \vartheta(u+z-v) B + \vartheta(u-v-\zeta) \vartheta(u+z+\zeta) C$$

gesetzt werden darf; wegen  $\vartheta(0) = 0$  folgt für  $u = v$ :

$$0 = \vartheta(v) \vartheta(z) B - \vartheta(\zeta) \vartheta(v+z+\zeta) C,$$

für  $u = 0$ :

$$\vartheta(v) \vartheta(z) A = \vartheta(v+\zeta) \vartheta(z+\zeta) C$$

und für  $u = v + \zeta$ :

$$\vartheta(\zeta) \vartheta(v+z+\zeta) A = \vartheta(v+\zeta) \vartheta(z+\zeta) C,$$

aus welchen Bestimmungsgleichungen  $A:B:C$  und (2) folgt.

Die eben gegebene Begründung des Additionssatzes (2) gewinnt an Kürze, wenn der Umweg über die  $\vartheta$ -Theorie vermieden wird. Die elliptische Funktion zweiter Art  $s$ , die im Grundparallelogramm  $1, \omega$  der  $u$ -Ebene nur einen Pol hatte, war durch (2.4.5) eindeutig gekennzeichnet. Verallgemeinernd führe man die Anzahl der  $\infty^1$ -Stellen im Grundgebiet als „Ordnung“ einer Funktion ein, so zeigt sich nach Sätzen von Liouville und Kronecker wieder die Bestimmtheit der Funktion aus Periodizität und singulärem Verhalten. Mit  $\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial u} = 0$ ;  $0 < \xi, \eta, x+\xi, y+\eta < 1$  können wir eine besondere Funktion zweiter Ordnung einmal als Produkt

und dann als Summe von  $s$ -Funktionen ausdrücken, nämlich

$$s\left(\frac{\xi}{v-u}, \eta\right) s\left(\frac{x+\xi}{u}, y+\eta\right) = \alpha s\left(\frac{x}{u}, y\right) + \beta s\left(\frac{x}{u-v}, y\right).$$

Für  $u \rightarrow 0$  bestimmt sich  $\alpha = s\left(\frac{\xi}{v}, \eta\right)$ ,

für  $u \rightarrow v$   $\beta = -s\left(\frac{x+\xi}{v}, y+\eta\right)$ ,

wodurch die Identität (2) wiederum bewiesen ist.

Im elementaren Grenzfall (1.7') war aus (1.9) die Existenz von

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(x, u) = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i u}} = \pi i [1 + \operatorname{ctg} \pi u]$$

zu entnehmen, welche unmittelbar ergab

$$(3) \quad [1 + \operatorname{ctg} u] \{1 + \operatorname{ctg} v\} = [1 + \operatorname{ctg} (u - v)] \{1 + \operatorname{ctg} v\} + [1 + \operatorname{ctg} (v - u)] \{1 + \operatorname{ctg} u\}.$$

Im gegenwärtigen Fall endlicher  $\omega$  folgt aber aus (2.8.9)

$$(4) \quad \lim_{z \rightarrow 0} z s\left(\frac{x}{u}, y\right) = 1,$$

so daß mit  $z \rightarrow 0$   $s$  bestimmt gegen Unendlich läuft, wobei aus (2) nur

$$1 = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \zeta \rightarrow 0}} \left[ z^2 s\left(\frac{x}{u-v}, y\right) s\left(\frac{x+\xi}{v}, y+\eta\right) + \zeta^2 s\left(\frac{\xi}{v-u}, \eta\right) s\left(\frac{x+\xi}{u}, y+\eta\right) \right]$$

zu entnehmen ist; es entfällt hier also die Möglichkeit, die sechs Argumente

$$(5) \quad x, y, \xi, \eta, x + \zeta, y + \eta$$

einander gleich zu machen, um ein Additionstheorem für  $s$  in den unteren Veränderlichen  $u, v, u - v$  allein aufzustellen. Will man die Funktionalgleichung (2) zur Kennzeichnung einer Funktion gebrauchen, so muß die Anzahl der eingehenden Veränderlichen reduziert werden, und dies ist möglich, z. B. auf dem Wege Weierstraßens, durch Bildung von

$$-\frac{d}{du} s\left(\frac{x}{u}, y\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{+n} \lambda k \frac{e^{2\pi i (x\lambda + yk)}}{(u + h + \omega k)^2}$$

und Entfernung von  $x, y$  durch einen Grenzprozeß. Das alsdann für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \lambda k (u + h + \omega k)^{-2} = \wp(u)$$

entstehende Additionstheorem pflegt freilich der Kürze wegen unter Vermittlung von  $\frac{d}{du} \wp(u)$  angeschrieben zu werden.



Unser Ausgangspunkt, die durch Drehfaktoren konvergent gehaltene Darstellung (2.2), legt es aber nahe, die Argumente (5) nicht auf einen, sondern auf zwei verschiedene Werte zu spezialisieren, entsprechend (1.11); benutzt wird folgende Verallgemeinerung von (1.8)

$$(6) \quad s\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ u \end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix} 1-x, 1-y \\ -u \end{smallmatrix}\right) = 0,$$

die auf  $3^2 - 1 = 8$  Teilwertepaare der oberen Argumente führt und acht  $s$ -Funktionen als Lösungen einer Funktionalgleichung liefert, nämlich

für  $x, \lambda = 0, 1, 2$ ;  $0 < x + \lambda$ ;  $s\left(\begin{smallmatrix} x, \lambda \\ \frac{\pi}{3}, \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right) = s(u)$  gilt ja, wenn nur  $u, v, u - v \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}$  bleibt,

$$(7) \quad s(u)s(v) + s(u-v)s(-v) + s(v-u)s(-u) = 0,$$

und dabei ist

$$s(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}(xh + \lambda k)}}{u + h + \omega k}.$$

Symmetrischer geschrieben: Mit  $a + b + c = 0$ ;  $a, b, c \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}$  wird

$$s(-a)s(b) + s(-b)s(c) + s(-c)s(a) = 0.$$

Der allgemeine Additionssatz (2) kann gleichfalls symmetrischer ausgedrückt werden. Es seien die neun Größen  $a, b, c$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$ ;  $u, v, w \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}$ ; mit  $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma = u + v + w = 0$  gilt dann

$$(2') \quad s\left(\begin{smallmatrix} a, \alpha \\ u \end{smallmatrix}\right) s\left(\begin{smallmatrix} b, \beta \\ -v \end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix} c, \gamma \\ v \end{smallmatrix}\right) s\left(\begin{smallmatrix} a, \alpha \\ -w \end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix} b, \beta \\ w \end{smallmatrix}\right) s\left(\begin{smallmatrix} c, \gamma \\ -u \end{smallmatrix}\right) = 0.$$

Als Gegenstück zu (7) kann nun auch der Nenner spezialisiert werden; es sei z. B.  $0 < a, b, c, \alpha, \beta, \gamma < 1$ ;  $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma = 0$

$$s\left(\begin{smallmatrix} a, \alpha \\ \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}(a k + \alpha k)}}{\frac{1}{3} + h + \omega k} = \sigma(a),$$

so ist

$$(8) \quad \sigma(a)\sigma(-b) + e^{2\pi i b} \sigma(b)\sigma(-c) + e^{2\pi i (b+c)} \sigma(c)\sigma(-a) = 0.$$

Im Grenzfalle  $\omega \rightarrow \infty$  wird wegen (1.9)  $\sigma(a)$  zu einer Exponentialfunktion

$$\sigma(a) = f\left(a, \frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi i}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}a}} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{3}a},$$

welche in der Tat der Identität (8) Genüge leistet.

## § 4.

 Einführung von  $t_*(x, y)$ .

Nach dem Vorgang in (1.13.15) empfiehlt es sich, die Identität (3.2) zu verfolgen als Aussage allein in den oberen Veränderlichen  $x, y, \xi, \eta$ . An Stelle des stetig veränderlichen Größenpaares  $u, v$  tritt bei Vergleich der Koeffizienten von  $u^x v^y$  für  $x, y = 0, 1, \dots$  eine abzählbare Parameterfolge in unseren Relationen auf. Überdies zeigt sich, daß jene Beziehungen voneinander abhängig sind in solchem Umfang, daß es ausreicht, den einen der beiden Zeiger nur beliebig anwachsen zu lassen, während der andere beschränkt bleibe.

Schreibt man (2.2) in der Gestalt

$$(1) \quad s\left(\begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{e^{2\pi i(xk+yk)}}{u+h+\omega k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-u)^k t_{k+1}(x, y),$$

so wird

$$t_0(x, y) = -1;$$

die Schreibweise  $\sum_{k \neq 0} = \sum'_{k=1}^{\infty}$  erlaubt daher, für  $\nu = 1, 2, 3, \dots$

$$(1') \quad t_{\nu}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum'_{k=1}^n \frac{e^{2\pi i(xk+yk)}}{(h+\omega k)^{\nu}}$$

und für  $\nu > 2$  sogar

$$t_{\nu}(x, y) = \sum'_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(xk+yk)}}{(h+\omega k)^{\nu}}$$

zu erkennen. Der Vergleich mit (1.18) zeigt für  $\nu = 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{\Im(\omega) \rightarrow \infty} t_{\nu}(x, y) = g_{\nu}(x, y),$$

und nach (1.20) erscheinen die  $t_{\nu}(x, y)$  als eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Polynome entsprechend dem Übergang vom System der ganzen rationalen Zahlen zu imaginär quadratischen.

Lediglich als ein Abbild jener elementaren Theorie erhält man aus (1.14.15.8') durch Übergang von  $f$  zu  $s$ , d. h. durch systematisches Ersetzen der  $g_{\nu}(x) = g_{\nu}$  durch  $t_{\nu}(x, y) = t_{\nu}$ , z. B.

$$(2) \quad t_{\nu}(1-x, 1-y) = (-1)^{\nu} t_{\nu}.$$

Die entsprechende Einsparung  $t_{\nu}(\xi, \eta) = t_{\nu}$  für ein Paar reeller Argumente  $0 < \xi < 1-x$ ;  $0 < \eta < 1-y$  und die Schreibweise  $t_{\nu}(x+\xi, y+\eta) = t_{\nu}(x+\xi)$  gibt für

$$(3) \quad \left. \begin{matrix} x, y = 0, 1, \dots \\ x \leq y \end{matrix} \right\}: \quad \left| \begin{matrix} t_{\nu} & t_{\nu+1} \\ t_1 & t_{1+1} \end{matrix} \right| = \sum_{\mu=0}^{y+1} (-1)^{\mu} \left| \begin{matrix} \binom{x+\mu}{\mu} t_{x+\mu} & t_{x+1-\mu}(x+\xi) \\ \binom{y+\mu}{\mu} t_{y+\mu} & t_{y+1-\mu}(x+\xi) \end{matrix} \right|.$$

Insbesondere entnimmt man daraus für  $\lambda = 0$  statt (1.12') für  $m = -1, 0, \dots$

$$(4) \quad \sum_{-1}^{m+1} t_{\mu+1} \tau_{m-\mu+1} = (m+1) t_{m+2}(x+\xi) + [t_1 + \tau_1] t_{m+1}(x+\xi),$$

und ebenso unter Benutzung von (2) für  $\lambda = 1$  statt (1.19')  $m = -2, -1, \dots$

$$(5) \quad \sum_{-1}^{m+2} \mu t_{\mu+1} \tau_{m-\mu+2} = \binom{m+2}{2} t_{m+3}(x+\xi) + (m+1) \tau_1 \cdot t_{m+2}(x+\xi) + [t_2 - \tau_2] t_{m+1}(x+\xi).$$

Bis zu diesem Punkt deckt sich die Theorie der  $t_s$ -Funktionen mit derjenigen der Bernoullischen Polynome  $g_s$ .

Vollzieht man aber jetzt in (4) mit Hilfe von (2) den Grenzübergang

$$(4') \quad -t_1^2 - 2t_2 = \lim_{\substack{x+\xi \rightarrow 1 \\ y+\eta \rightarrow 1}} \{t_2(x+\xi) + [t_1 + \tau_1] t_1(x+\xi)\},$$

so fehlt hier der Existenzbeweis für  $\lim t_j(x+\xi)$ , wo  $j = 1, 2$ , um die rechte Seite von (4') berechnen zu können, die im elementaren Falle wegen der Beschränktheit von  $g_1$  trivialerweise als  $\lim_{x+\xi \rightarrow 1} \{g_2(x+\xi)\} = \frac{\pi^2}{3}$  gefunden wurde.

Tatsächlich strebt rechter Hand in (4') der Summand  $t_2(x+\xi)$  durchaus keinem Grenzwert zu, woraus das Nichtbeschränkbleiben von  $t_1(x+\xi)$  unmittelbar folgt. Um für beliebig kleine Argumente das Verhalten von  $t_1, t_2$  zu überblicken, lösen wir uns von den Darstellungen (1'), können aber wegen (1) und (2.6.8.9) mit  $s$  auch jedes  $t_s$  durch die komplexen  $x$ - und  $y$ -Ebenen fortsetzen. Nach Cauchy wird für  $v = 0, 1, \dots; y - \omega x = z$

$$(6) \quad t_v = \frac{\partial'(0)}{\partial(z)} \frac{(-1)^{v-1}}{2\pi i} \oint_{0+} \frac{dv}{v^v} e^{-2\pi i s v} \frac{\partial(v+z)}{\partial(v)},$$

$$t_1 = \frac{\partial'}{\partial}(z) - 2\pi i x,$$

$$t_2 = \frac{\partial'''}{6\partial'}(0) - \frac{\partial''}{2\partial}(z) + 2\pi i x \frac{\partial'}{\partial}(z) + 2\pi^2 x^2,$$

$$(6') \quad 0 = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{z} + t_1 \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial'''}{3\partial'}(0) - \frac{2\pi i x}{z} + t_2 \right];$$

die Grenzwerte (6') schildern das gesuchte Verhalten von  $t_1, t_2$ , so daß prinzipiell die rechte Seite von (4') jetzt bekannt ist. Die dabei nötige Bildung partieller Ableitungen wie  $\frac{\partial}{\partial x} t_1$  zeigt aber, daß Darstellung (1) versagt, so daß im Gegensatz zu (1.19'') jetzt  $t_2$  nicht rational aus  $t_1$  allein bestimmt ist. Indessen ist damit aus (3) noch nicht die volle Konsequenz gezogen, und mit (5) fassen wir den nächsten Sonderfall  $\lambda = 1$  von (3)

ins Auge. Es könnte ja sein, daß die elementaren Rekursionen

$$\begin{aligned} -g_1^2 - 2g_2 &= \frac{\pi^2}{3} = \lim_{\substack{\omega \rightarrow \infty \\ 3(\omega) \rightarrow \infty}} \{-t_1^2 - 2t_2\} \\ g_1g_2 + 3g_3 &= \frac{\pi^2}{3}g_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

wenigstens vom zweiten Repräsentanten ab das formale Verhalten der entsprechenden  $t$ -Rekursion aufweisen. Das ist nicht der Fall, denn nach (6') und (2) existieren in

$$t_1t_2 + 3t_3 = \lim_{z+\zeta \rightarrow 1-\omega} \{[t_1 - t_2]t_1(x+\zeta) + t_1t_2(x+\zeta)\}$$

rechts die Grenzwerte der Summanden nicht einzeln. Dagegen gibt (5) für alle höheren Zeiger von  $\kappa$  wie im elementaren Fall rationale  $t$ -Beziehungen, nämlich

$$(7) \quad 2t_4 = t_2^2 - 2t_1t_3 - 3t_4(0),$$

$$(7') \quad 10t_5 = 2t_2t_3 - 3t_1t_2^2 + 6t_1^2t_3 + 15t_4(0)t_1,$$

$$(7'') \quad 10t_6 = -5t_2^2 + 5t_3^2 - 12t_1t_2t_3 + 3t_1^2t_2^2 - 6t_1^3t_3 - 15t_4(0)[t_1^2 + t_2] - 25t_5(0).$$

Nach Weierstraß setzt sich aus  $t_4(0)$  und  $t_5(0)$  jedes  $t_\nu(0)$  für  $\nu = 8, 10, \dots$  rational zusammen, was wir als Grenzfall aus (3) entnehmen können. Nach (7), (7'), ... gibt es für jedes  $\nu = 3$  ein Polynom  $P$  mit fünf Argumenten und rationalzahligen Koeffizienten, welches eine Darstellung

$$(8) \quad t_\nu = P\{t_2, t_3, t_1; t_5(0), t_4(0)\}$$

vermittelt. An Stelle der eingliedrigen Basis  $g_1$  der elementaren Polynomfolge  $g_\nu$ , wie sie aus (1.15) gezogen wurde, tritt im gegenwärtigen Fall für das Argumentpaar  $x, y$  der Funktionenfolge  $t_\nu$  die dreigliedrige Basis  $t_2, t_3, t_1$ , die auf rationale Weise jedes  $t_\nu$  zu erreichen gestattet.

Doch ist die Darstellung (8) nicht eindeutig; der Sonderfall  $\lambda = 2$ ;  $z + \zeta = 1 - \omega$  zeigt nämlich unabhängig von (4), (5) für  $m = 3, 4, \dots$

$$\sum_{-1}^{m+2} (-1)^{m-\mu} \cdot \mu(m-\mu+1) t_{\mu+1} t_{m-\mu+2} = \binom{m+2}{2} t_{m+2}(0) + 2m t_{m+1}(0) t_2.$$

Im einfachsten Fall  $m = 3$  wird ergänzend neben (7'') noch

$$5t_6 + 3t_2t_4 - 2t_3^2 = 5t_6(0) + 3t_4(0) \cdot t_2$$

treten; wiederholte Elimination zeigt zwischen  $t_1, t_2, t_3$  die Bindung

$$(9) \quad 9t_3^2 + 6t_2[t_1^2 + 3t_1t_2] - \{8t_2^2 + 3t_1^2t_2^2 + 15t_4(0)[t_1^2 + 2t_2] + 35t_5(0)\} = 0,$$

was wegen (8) das Vorhandensein einer Funktion  $A$  von vier Argumenten zeigt, so daß für  $\nu > 2$

$$t_\nu = A\{t_3, t_1; t_3(0), t_1(0)\}$$

gilt.

Der eingliedrig rationalen Basis des Grenzfalles  $\Im(\omega) \rightarrow \infty$  entspricht also endgültig eine zweigliedrige algebraische  $t_\nu$ -Basis des allgemeinen Falles.

Daß weitere Reduktionen nicht bestehen, daß also ein Polynom in  $t_1, t_3$  allein, dessen Koeffizienten von  $x, y$  unabhängig sind, nicht identisch in  $x, y$  verschwinden kann, folgt aus (6'), insofern  $t_1, t_3$  für  $z \rightarrow 0$  verschiedener Größenordnung bleiben.

Entfernt man  $x$  aus zweien der Ausdrücke (6), so muß für  $\kappa = 1, 2, \dots; \lambda = \kappa + 1, \kappa + 2, \dots$  eine Beziehung  $\psi(z, t_\kappa, t_\lambda) = 0$  bestehen, die wir für  $\kappa = 1; \lambda = 2$  berechnen:

$$2t_2 = \frac{\partial'''}{\partial \partial'}(0) - \frac{\partial''}{\partial}(z) + 2 \frac{\partial'}{\partial}(z) \left[ -t_1 + \frac{\partial'}{\partial}(z) \right] - t_1^2 + 2t_1 \frac{\partial'}{\partial}(z) - \frac{\partial'^2}{\partial^2}(z)$$

$$t_1^2 + 2t_2 = \frac{1}{8} \frac{\partial'''}{\partial'}(0) - \frac{d^2}{dz^2} [\log \partial(z)]$$

oder nach Weierstraß

$$(10) \quad t_1^2 + 2t_2 = \wp(z) = \wp(z; 1, \omega).$$

Daß  $t_1, t_2$  algebraisch unabhängig sind, erkennt man auch durch Vergleich von (6) und (10); daß obige Funktion  $\wp$  sich in  $z$  und den  $t_\nu$  separiert zeigt, war nicht voraus zu erwarten. Die Entwicklungskoeffizienten  $t_{\nu+1}$  in (1) erben von ihrer erzeugenden Funktion  $s$  die Periodizität (2.10') in  $x$ , so daß die doppelten Perioden von  $\wp(y - \omega x)$  aus der Darstellung (10) evident werden. Überraschend ist der Umstand, daß die Funktion zweier reeller Veränderlicher  $t_1^2 + 2t_2$ , welche durch die Darstellungen (1') bestimmt war, analytisch ist in  $y - \omega x$  allein; zur Kennzeichnung solchen Verhaltens im Kleinen dienen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Führt man die Bezeichnung

$$(11) \quad \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + \omega \frac{\partial}{\partial y} \right\} = \mathfrak{D}$$

ein, und betrachtet eine Funktion  $R(t_1, \dots, t_\nu)$ , die von jedem ihrer  $\nu$  Argumente rational abhängt, so bedeutet die Forderung

$$(11') \quad \mathfrak{D}R = 0$$

die Existenz einer analytischen Funktion  $\psi$  des einen Argumentes

$$(12) \quad y - \omega x = z,$$

so daß obiges

$$R(t_1, \dots, t_\nu) = \psi(z)$$

bleibt.

Andererseits führt die Operation (11) wegen (1') jedes  $t_v$  in seinen Nachbarn kleineren Zeigers über

$$\mathfrak{D} t_v = t_{v-1} \quad \text{für } v = 3, 4, \dots;$$

die konvergenzgehemmten Anfangsfälle  $v = 1, 2$  können aber nach (6) bestätigt werden, so daß (13) für jedes natürliche  $v$  gilt. Wird insbesondere  $R$  als Polynom des Grades  $n = 1, 2, \dots$  in  $t_1, \dots, t_v$  gewählt, so zeigt sich dieses nach (13) aus isobaren Summanden des Maximalgewichtes  $n$  linear zusammengesetzt. Zur Bestimmung von  $\psi(z)$ , welches nach (6') für  $z = 0$  einen Pol höchstens  $n$ -ter Ordnung hat, ist nach Riemannschen Prinzipien die Periodizität

$$\psi(z) = \psi(z+1) = \psi(z+\omega)$$

noch zu ergänzen durch Angabe des Verhaltens der Funktion in ihren singulären Stellen. Im Grundbereich 1,  $\omega$  mit geeigneter Randzuordnung kommt nur die eine Stelle  $z = 0$  in Betracht; durch Vorgabe einer rationalen Vergleichsfunktion

$$\psi^*(z) = \sum_0^n a_v z^{-v}$$

und die Grenzbedingung

$$\lim_{z \rightarrow 0} [\psi - \psi^*] = 0$$

ist mit  $\psi(z)$  also auch das Polynom  $R(t_1, \dots, t_v)$  eindeutig gegeben.

Beispiel: Aus  $\psi^*(z) = z^{-3}$  soll das  $R(t_1, \dots, t_v)$ -Polynom gefunden werden.

Hier lautet das Leitglied in  $t_1$  wegen (6')  $t_1^3$ ; also ist  $v \leq 3$ , und mit unbestimmten Koeffizienten kann

$$R(t_1, t_2, t_3) = t_1^3 + \alpha t_1 t_2 + \beta t_3$$

angesetzt werden. Nach (11), (11'), (13) bestimmen sich  $\alpha, \beta$  aus

$$0 = -3t_1^2 + \alpha t_1^2 - \alpha t_2 + \beta t_2$$

zu

$$\alpha = \beta = 3,$$

die gefundene elliptische Funktion zeigt sich bis auf einen numerischen Faktor mit  $\wp'(z)$  identisch, so daß neben (10) noch als Polynom in  $t_v$

$$-\frac{1}{2} \wp'(z) = t_1^2 + 3t_1 t_2 + 3t_3$$

dargestellt ist.

Allgemein ist so ein konstruktives Verfahren zum Aufbau der elliptischen Funktionen aus  $t_v$ -Reihen gegeben. Man verdankt dieses und insbesondere die schönen Beziehungen (9), (10) Herrn C. Siegel.

## § 5.

Teilung der  $x, y$ -Perioden.

Es sei eine natürliche Zahl  $v = 1, 2, \dots$ , und als bekannt vorausgesetzt werde die Folge  $t_{v+2}(0, 0) = d_{v+2}$ . Die für  $0 < x < 1$ ;  $0 < y < 1$  aufgestellten  $t_v$ -Reihen zeigten die Spiegeleigenschaft (4.2)

$$(1) \quad t_v(x, y) = (-1)^v t_v(1-x, 1-y).$$

Somit gilt

$$(1') \quad t_{2v-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0;$$

indem wir Gebrauch machen von der analytischen Fortsetzung von  $s\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u \end{smallmatrix}\right)$  in die  $x$ - und  $y$ -Ebenen, wie sie durch (2.9.10'.1\*) gegeben wurde, finden wir koeffizientenweise

$$(2) \quad t_v(x, y) = t_v(x+1, y) = t_v(x, y+1),$$

eine Periodizität also, welche (1') verallgemeinert zu

$$(1'') \quad t_{2v-1}\left(0, \frac{1}{2}\right) = t_{2v-1}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = t_{2v-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Die zweigliedrige algebraische Rekursion (4.9), welche alle  $t_v$  höheren Zeigers zurückbringt auf  $t_1$  und  $t_2$  allein, erlaubt uns die Beschränkung der weiteren Untersuchung auf diese zwei Anfangsfunktionen.

Wir suchen nämlich die Bestimmung der Werte  $t_v(x, y)$  für rationale  $x, y$ , die nicht beide ganz sind. Das so gestellte Problem der Periodenteilung für  $t$ -Funktionen führt auf algebraische Gleichungen, und es ist nur die spezielle Teilungstheorie der elliptischen Funktionen in naheliegender Weise zu verallgemeinern.

Eine kubische Gleichung leistet die Periodenhalbierung. Aus (1'') und (4.9) fließt nämlich in obiger Bezeichnung

$$(3) \quad 8t_2^3 + 30d_4 \cdot t_2 + 35d_6 = 0,$$

womit die drei Teilwerte  $t_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ;  $t_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ;  $t_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  aus  $d_4 = t_4(0, 0)$  und  $d_6 = t_6(0, 0)$  algebraisch herzuleiten sind. In der Schreibweise von Weierstraß werden durch (3) die Funktionswerte  $\wp\left(\frac{\Omega_j}{2}\right) = e_j$  mit  $j = 1, 2, 3$ ;  $\Omega_j = 1, \omega, 1 + \omega$  algebraisch aus den Invarianten  $g_2$  und  $g_3$  bestimmt.

Indem wir zur Dreiteilung weitergehen, benötigen wir neben (1) und (2) noch weitere Hilfsmittel. Aus (4.4) folgt für  $m = 0$

$$(4) \quad t_1 \tau_1 - t_2 - \tau_2 = [t_1 + \tau_1] t_1(x + \xi) + t_2(x + \xi),$$



wodurch eine Bindung gesetzt ist zwischen den  $2 \cdot [3^2 - 1] = 2 \cdot 8 = 16$  Werten der beiden Funktionen

$$t_r \left( \frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3} \right) = d_r(\alpha, \beta) \quad \begin{cases} r = 1, 2, \\ \alpha, \beta = 0, 1, 2, \\ \alpha + \beta > 0. \end{cases}$$

Sei zunächst  $x = \xi = \frac{\alpha}{3}$ ;  $y = \eta = \frac{\beta}{3}$ , so gibt (4)

$$\begin{aligned} d_1^3(\alpha, \beta) - 2d_2(\alpha, \beta) &= 2d_1(\alpha, \beta)d_1(2\alpha, 2\beta) + d_2(2\alpha, 2\beta) \\ &= -2d_1^2(\alpha, \beta) + d_2(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

somit

$$(5) \quad d_1^2(\alpha, \beta) = d_2(\alpha, \beta);$$

bei Vorgabe von  $d_2(\alpha, \beta)$  ist durch (5)  $d_1(\alpha, \beta)$  sogar eindeutig bestimmt, denn das gesuchte Vorzeichen kann im Grenzfall  $\omega \rightarrow \infty$  aus

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} d_1(\alpha, \beta) = g_1 \left( \frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3} \right) = \pi i \left( 1 - \frac{2\alpha}{3} \right)$$

entnommen werden, und der allgemeine Fall schließt sich stetig an die spezielle Lösung an.

Nun benutze man (4.10) zur eindeutigen Bestimmung der  $d_r(\alpha, \beta)$  und findet

$$\begin{aligned} (6) \quad d_1^2(\alpha, \beta) + 2d_2(\alpha, \beta) &= \wp \left( \frac{\beta - \omega \alpha}{3} \right), \\ d_3(\alpha, \beta) &= \frac{1}{3} \wp \left( \frac{\beta - \omega \alpha}{3} \right). \end{aligned}$$

Die acht Werte der rechten Seite in (6) sind durch eine Gleichung 4. Grades bestimmt, denn es ist

$$\wp \left( \frac{\beta - \omega \alpha}{3} \right) = \wp$$

eine gerade Funktion ihres Argumentes, was übrigens aus (1), (2) unmittelbar folgt. Die gewünschte spezielle Teilungsgleichung der  $\wp$ -Funktion lautet bekanntlich

$$\wp^4 - 30d_4\wp^2 - 140d_6\wp - 75d_4^2 = 0.$$

Im äquianharmonischen Fall, insbesondere, wird

$$t_4 = 0, \quad \omega = \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

und

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{e^{\frac{2\pi i}{3} \frac{h+k}{3}}}{h+\omega k} \right\}^6 = \frac{140}{27} \sum_{k=-n}^n \left( \frac{1}{h+\omega k} \right)^6 = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{e^{\frac{2\pi i}{3} \frac{h+k}{3}}}{(h+\omega k)^2} \right\}^3.$$

Allgemein sei  $n, r = 1, 2, \dots$ ;  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-1$ , so geben die Aussagen (1), (2), (4) zusammen mit (4.10) eine algebraische Bestimmungsgleichung für  $t_r \left( \frac{\alpha}{n}, \frac{\beta}{n} \right)$ ; die eingehenden Koeffizienten sind rational in  $d_4, d_6$ .

Im Sonderfall  $n = 5$ ;  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  bezeichne man

$$\begin{aligned} t_1\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) &= -t_1\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right) = \delta_1; & t_1\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) &= -t_1\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right) = \varepsilon_1; \\ t_2\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) &= t_2\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right) = \delta_2; & t_2\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) &= t_2\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right) = \varepsilon_2 \end{aligned}$$

und trage in (4) für  $\alpha, \beta$  die Kombinationen ein:

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & -\delta_1^2 + 2\delta_2 + 2\delta_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0, \\ (2.2) \quad & -\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1\delta_1 + \delta_2 = 0, \\ (2.4) \quad & \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2 + \delta_2 + [\varepsilon_1 - \delta_1]\delta_1 + \delta_2 = 0; \end{aligned}$$

so erkennt man, daß die obigen und alle weiteren  $(\alpha, \beta)$  Zusammenstellungen nur zwei linear unabhängige Aussagen liefern, nämlich

$$(7) \quad \begin{cases} -\delta_1^2 + 2\delta_1\varepsilon_1 & + 2\delta_2 + \varepsilon_2 = 0, \\ & -2\delta_1\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 + \delta_2 + 2\varepsilon_2 = 0. \\ \text{Weiter gilt} \\ \delta_1^2 & + 2\delta_2 = \wp\left(\frac{1-\omega}{5}\right), \\ & \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2 = \wp\left(\frac{2-2\omega}{5}\right), \end{cases}$$

und das System (7) ermöglicht die Elimination von  $\varepsilon_1, \delta_2, \varepsilon_2$ . Schreibt man  $\wp\left(\frac{1-\omega}{5}\right) = \wp_1$ ;  $\wp\left(\frac{2-2\omega}{5}\right) = \wp_2$ , so wird

$$\begin{aligned} 3\delta_1^2 - 8\delta_1\varepsilon_1 - 3\varepsilon_1^2 &= \wp_1 - \wp_2, \\ 5\delta_1^2 &+ 5\varepsilon_1^2 = 3\wp_1 + 3\wp_2, \end{aligned}$$

woraus

$$(7') \quad (5\delta_1)^4 - 6[3\wp_1 + 2\wp_2](5\delta_1)^2 + \{7\wp_1 + 2\wp_2\}^2 = 0.$$

Setzt man  $\wp_1 + \wp_2 = q$ ;  $\wp_1\wp_2 = r$ , so zeigt die spezielle Teilungstheorie der  $\wp$ -Funktion, daß  $6qr = q^3 + 30d_4q + 140d_6$  ist, so daß bei vorgegebenen  $\wp_1, d_4, d_6$  im Falle der Fünfteilung durch eine Kette von Quadratwurzeln  $\delta_1$  bestimmt ist.

Nach Galois ist die Gleichung 6. Grades für  $q$  mit rationalen Koeffizienten in  $d_4, d_6$  durch Wurzelzeichen allgemein nicht aufzulösen; sie wird aber durch Radikale lösbar im Sonderfall  $t_6 = 0$ , d. h. im lemnischen Fall.

Sei also das Eulersche Integral zweiter Gattung

$$z^{-\frac{q}{2}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \int_0^1 dv (1-v^4)^{-\frac{1}{2}} = 1,311028 \dots$$

gegeben, so ist aus ihm der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n {}' h, k \frac{e^{\frac{2\pi i (h+k)}{b}}}{h + i k}$$

allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Benutzt man (4.6), so gilt die gleiche Eigenschaft auch noch für  $\frac{\theta'}{\theta} \left( \frac{\alpha}{5} \right)$  mit  $\alpha = 1, \dots, 4; \omega = i$ .

Endlich noch eine Folgerung betreffend die komplexen Nullstellen von  $\theta'(v) = \theta'(v, \omega)$  mit  $\Re(\omega) = 0; |\Im(v)| > 0$ : Ist  $\frac{1}{\omega} J(v)$  rationalzahlig und  $\theta'(v) = 0$ , so sind die Zahlen  $\pi, d_4, d_6$  algebraisch abhängig. Im lemniskatischen Fall wäre dann  $A$  eine algebraische Funktion und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} {}' h, k (h + i k)^{-4} = A(\pi).$$

University of Chicago, 20. Oktober 1929.

(Eingegangen am 5. 8. 1930.)

## Die Nichtexistenz einfacher Gruppen der ungeraden Ordnungen $p^3 q^2 r$ und $p^4 q^2 r$ .

Von

W. K. Turkin in Moskau.

Ende des vorigen Jahrhunderts lenkte W. Burnside<sup>1)</sup> die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf den Umstand, daß es bis jetzt nicht gelungen ist, eine einfache Gruppe ungerader zusammengesetzter Ordnung zu finden. Die erste Erforschung dieser Frage stammt von G. A. Miller. Bekanntlich kann jede abstrakte Gruppe als Gruppe von Substitutionen dargestellt werden. G. A. Miller<sup>2)</sup> hat bewiesen, daß jede Substitutionsgruppe, die mit einer einfachen Gruppe ungerader zusammengesetzter Ordnung isomorph ist (in Zukunft werden wir die einfachen Gruppen ungerader zusammengesetzter Ordnung  $B$ -Gruppen nennen), mindestens den Grad 50 haben muß. Später wurde die untere Grenze des möglichen Grades für die mit  $B$ -Gruppen isomorphen Substitutionsgruppen von W. Burnside<sup>3)</sup> auf 100 und von H. L. Rietz<sup>4)</sup> auf 243 erhöht.

Schon G. Frobenius<sup>5)</sup> hatte bewiesen, daß keine  $B$ -Gruppe existieren kann, in deren Ordnung weniger als sechs ungerade Primfaktoren enthalten sind. In der schon erwähnten Arbeit hat W. Burnside bewiesen, daß auch keine  $B$ -Gruppe existieren kann, in deren Ordnung genau sechs Primfaktoren aufgehen. Zu dieser Schlußfolgerung gelangte er auf dem Wege über eine ganze Reihe von merkwürdigen Erwägungen, die auch für alle folgenden, leider nicht zahlreichen, Arbeiten auf diesem Gebiete große Bedeutung gehabt haben. Die nächste Frage ist die, ob es  $B$ -Gruppen gibt, deren Ordnung aus genau sieben Primfaktoren zusammengesetzt ist.

<sup>1)</sup> Theory of groups of finite order, I. edition, 1897, pp. 371, 379.

<sup>2)</sup> Proc. of the London Math. Soc. 33.

<sup>3)</sup> Loc. cit. 7).

<sup>4)</sup> Amer. Journ. of Math. 26.

<sup>5)</sup> Berl. Sitzungsber. 1895.

Es ist klar, daß die Ordnung einer  $B$ -Gruppe mindestens drei verschiedene Primfaktoren enthalten muß und daß der kleinste in einer höheren als der zweiten Potenz in die Ordnung eingehen muß. Die möglichen Typen von Ordnungen der  $B$ -Gruppen aus sieben Primfaktoren sind also:

$$p^3 q^2 r^2, p^5 q r, p^3 q^3 r, p^4 q^2 r, p^4 q r s, p^3 q^2 r s, p^3 q r s t,$$

wo  $p, q, r, s, t$  ungerade Primzahlen sind, von denen  $p$  die kleinste ist.

Daß der erste Ordnungstypus unmöglich ist, hat W. Burnside<sup>6)</sup> bewiesen, und die Unmöglichkeit des zweiten Typus bewies der Verfasser<sup>7)</sup> der vorliegenden Arbeit. Wir zeigen im folgenden, daß auch der dritte und vierte Typus unmöglich sind.

Wir wollen zuerst den dritten Typus untersuchen. Angenommen,  $\mathfrak{S}$  sei eine Gruppe der Ordnung  $p^3 q^3 r$ , wo  $p, q, r$  ungerade Primzahlen sind, von denen  $p$  die kleinste ist.

Wir setzen voraus, daß  $\mathfrak{S}$  eine  $B$ -Gruppe ist. Mit  $\mathfrak{R}$  wollen wir die Sylowsche Untergruppe von der Ordnung  $r$  unserer Gruppe  $\mathfrak{S}$  bezeichnen. In der Gruppe  $\mathfrak{S}$  müssen Elemente enthalten sein, deren Ordnung nicht durch  $r$  teilbar ist und die mit  $\mathfrak{R}$ , aber nicht mit jedem Element dieser Untergruppe vertauschbar sind. Nehmen wir an, daß  $m r$  die Ordnung des Normalisators von  $\mathfrak{R}$  in bezug auf  $\mathfrak{S}$  ist;  $n r$  die Ordnung derjenigen Untergruppe der Gruppe  $\mathfrak{S}$ , die aus den Elementen besteht, welche mit allen Elementen der Untergruppe  $\mathfrak{R}$  vertauschbar sind.

Es ist klar, daß

$$m > n, \text{ d. h. } m \geq n p.$$

Die Anzahl derjenigen Elemente der Gruppe  $\mathfrak{S}$ , deren Ordnung durch  $r$  teilbar ist, ist gewiß nicht größer als

$$\frac{p^3 q^3}{m} \cdot n(r-1) \leq \frac{p^3 q^3 (r-1)}{p}.$$

Wir wollen jetzt die obere Grenze der Anzahl derjenigen Elemente der Gruppe  $\mathfrak{S}$  feststellen, deren Ordnung durch  $q$  teilbar ist. Zuerst wollen wir beweisen, daß in der Gruppe  $\mathfrak{S}$  nicht  $p^3 r$  Sylowsche Untergruppen der Ordnung  $q^3$  enthalten sein können. Wäre dies nämlich der Fall, so hätte unsere Gruppe eine Untergruppe  $\mathfrak{Q}^{(1)}$  der Ordnung  $q$  oder eine Untergruppe  $\mathfrak{Q}^{(2)}$  der Ordnung  $q^2$ , die die Eigenschaft besitzt, daß man in  $\mathfrak{S}$  ein Element finden kann, dessen Ordnung nicht durch  $q$  teilbar ist und das mit  $\mathfrak{Q}^{(1)}$  (bzw. mit  $\mathfrak{Q}^{(2)}$ ), aber nicht mit allen Elementen dieser Untergruppe vertauschbar ist.

<sup>6)</sup> Loc. cit. <sup>2)</sup>.

<sup>7)</sup> Recueil de Math. 36.

Wir untersuchen zunächst den Fall, daß es sich um die Untergruppe  $\Omega^{(1)}$  handelt. Die Ordnung des Normalisators  $\mathfrak{N}$  der Untergruppe  $\Omega^{(1)}$  in bezug auf die Gruppe  $\mathfrak{S}$  ist entweder von der Gestalt  $q^3 u$  oder von der Gestalt  $q^2 u$ , wo  $u$  nicht durch  $q$  teilbar ist. Nehmen wir den ersteren Fall an. In diesem Falle besitzt  $\mathfrak{N}$  entweder einen Normalteiler vom Index  $q^3$ , dessen sämtliche Elemente mit allen Elementen von  $\Omega^{(1)}$  vertauschbar sind, was der Voraussetzung widerspricht, oder eine Untergruppe  $\mathfrak{N}'$  der Ordnung  $q^2 u'$  ( $u' \leq u$ ), in der eine invariante Untergruppe der Ordnung  $q^2$  enthalten ist, wobei  $\mathfrak{N}'$  nicht das direkte Produkt seiner Untergruppen der Ordnungen  $q^2$  und  $u'$  darstellt.

In letzterem Falle ist in der Gruppe  $\mathfrak{S}$  die Untergruppe  $\Omega^{(2)}$  enthalten. Wir wollen jetzt annehmen, daß die Ordnung von  $\mathfrak{N}$  gleich  $q^3 u$  ist. Die Zahl  $u$  kann nicht gleich  $p^3$  oder  $p^2 r$  sein, da in diesem Falle die Gruppe  $\mathfrak{S}$  eine Untergruppe von einfachem Index besäße und sich folglich als transitive Gruppe einfachen Grades darstellen ließe. Eine solche Gruppe ist bekanntlich immer entweder auflösbar oder zweifach transitiv. Die Zahl  $u$  kann auch nicht gleich  $p$  oder  $p^2$  sein, da diese Zahlen mod  $q$  nicht zu 1 kongruent sind. Die Zahl  $u$  kann nicht gleich  $r$  sein; denn wenn  $q > r$  ist, so kann  $r$  nicht mod  $q$  zu 1 kongruent sein, und wenn  $q < r$  ist, so kann die Gruppe  $\Omega^{(1)}$  mit keinem Element von der Ordnung  $r$  vertauschbar sein, welches nicht mit allen ihren Elementen vertauschbar ist. Ist  $u = pr$ , so wird, da  $p$  kleiner als  $q$  und  $r$  ist, die Sylowsche Untergruppe von der Ordnung  $p$  des Normalisators  $\mathfrak{N}$  notwendig im Zentrum ihres Normalisators in bezug auf  $\mathfrak{N}$  enthalten sein. Hieraus folgt, daß  $\mathfrak{N}$  einen Normalteiler der Ordnung  $q^3 r$  hat. In letzterem sind nach Voraussetzung  $r$  Sylowsche Untergruppen der Ordnung  $q^3$  enthalten. In diesem Falle jedoch ist  $r \equiv 1 \pmod{q}$ , und die Gruppe  $\Omega^{(1)}$  kann mit keinem Element von der Ordnung  $r$  vertauschbar sein, welches nicht mit allen ihren Elementen vertauschbar ist. Wenn also in der Gruppe  $\mathfrak{S}$   $p^3 r$  Sylowsche Untergruppen der Ordnung  $q^3$  enthalten sind, so muß in  $\mathfrak{S}$  eine Untergruppe  $\Omega^{(2)}$  von der Ordnung  $q^3$  enthalten sein, die mit einem Element von einer durch  $q$  nicht teilbaren Ordnung vertauschbar ist, welches nicht mit allen ihren Elementen vertauschbar ist. Nehmen wir an, die Ordnung des Normalisators von  $\Omega^{(2)}$  in bezug auf  $\mathfrak{S}$  sei gleich  $q^3 v$ ; ganz ebenso wie oben kann dann bewiesen werden, daß  $v$  keiner der Zahlen  $p$ ,  $p^2$ ,  $p^3$ ,  $r$ ,  $pr$ ,  $p^2 r$  gleich sein kann. Somit kann es in der Gruppe  $\mathfrak{S}$  nicht  $p^3 r$  Sylowsche Untergruppen der Ordnung  $q^3$  geben. Hieraus ersieht man auch, daß, vom Einheitsselement abgesehen, die Anzahl der Elemente der Gruppe  $\mathfrak{S}$ , deren Ordnung  $q^3$  teilt, nicht die Zahl

$$p^2(q^3 - 1)r$$

überschreiten kann. —

Jetzt wollen wir die obere Grenze der Anzahl der Elemente der Gruppe  $\mathfrak{G}$  finden, deren Ordnung durch  $p$  teilbar ist.

Vor allem kann es in  $\mathfrak{G}$  keine Elemente von der Ordnung  $pr$  geben, da die Sylowsche Untergruppe von der Ordnung  $p^3$  der Gruppe  $\mathfrak{G}$  gewiß eine Abelsche Gruppe vom Typus  $(1, 1, 1)$  ist; aus diesem Grunde müßte die Ordnung der Klasse der Elemente, die mit einem Element der Ordnung  $p$  konjugiert sind, welches mit einem Element von der Ordnung  $r$  vertauschbar ist, gleich  $q^4$  sein, was wegen der Voraussetzung der Einfachheit von  $\mathfrak{G}$  unmöglich ist.

Wenn die Gruppe  $\mathfrak{G}$  ein Element der Ordnung  $q$  enthält, das mit einem Element der Ordnung  $p$  vertauschbar ist, so ist es, wie wir beweisen wollen, auch mit allen Elementen irgendeiner Untergruppe der Ordnung  $p^3$  vertauschbar. Angenommen,  $P$  sei irgendein Element der Ordnung  $p$  aus  $\mathfrak{G}$ , welches mit irgendeinem Element der Ordnung  $q$  derselben Gruppe vertauschbar ist. Die Ordnung des Normalisators  $\mathfrak{N}$  des Elementes  $P$  in bezug auf  $\mathfrak{G}$  wird gleich  $p^3w$  sein, wobei aus oben angeführten Gründen  $w$  entweder gleich  $q$  oder gleich  $q^2$  sein muß.

Angenommen, es wäre  $w = q^2$ . Die Ordnung von  $\mathfrak{N}$  ist in diesem Falle gleich  $p^3q^2$ . Da weder  $p$  noch  $p^2$  nach dem Modul  $q$  kongruent zu 1 ist, so wäre die Sylowsche Untergruppe von der Ordnung  $q^3$  des Normalisators  $\mathfrak{N}$  der Normalteiler dieses Normalisators. Die Ordnung des Normalisators in bezug auf  $\mathfrak{G}$  dieser Untergruppe wäre gleich  $p^3q^3$ , was gewiß unmöglich ist.

Machen wir jetzt die Voraussetzung  $w = q$ . Die Ordnung von  $\mathfrak{N}$  ist dann gleich  $p^3q$ . Es bedeute  $\mathfrak{Q}'$  die Sylowsche Untergruppe der Ordnung  $q$  des Normalisators  $\mathfrak{N}$ . Es ist klar, daß  $\mathfrak{Q}'$  ein Normalteiler von  $\mathfrak{N}$  ist. Die Ordnung des Normalisators  $\mathfrak{N}'$  der Gruppe  $\mathfrak{Q}'$  in bezug auf  $\mathfrak{G}$  kann nur gleich  $p^3q^2$  sein. Bezeichnen wir mit  $\mathfrak{Q}''$  die Sylowsche Untergruppe der Ordnung  $q^2$  des Normalisators  $\mathfrak{N}'$ . Es ist klar, daß  $\mathfrak{Q}''$  entweder ein Normalteiler von  $\mathfrak{N}'$  oder im Zentrum seines Normalisators in bezug auf  $\mathfrak{N}'$  enthalten ist. Im ersteren Falle enthält  $\mathfrak{G}$  eine Untergruppe der Ordnung  $p^3q^2$  (Normalisator von  $\mathfrak{Q}''$ ), was, wie wir schon sahen, unmöglich ist. Im zweiten Falle dient als Normalteiler der Gruppe  $\mathfrak{N}'$  ihre Sylowsche Untergruppe der Ordnung  $p^3$ . Es ist klar, daß jedes Element dieser Untergruppe mit jedem Element der Gruppe  $\mathfrak{Q}'$  vertauschbar ist.

Wir sehen also: Wenn ein Element der Ordnung  $q$  der Gruppe  $\mathfrak{G}$  mit irgendeinem Element der Ordnung  $p$  derselben Gruppe vertauschbar ist, so ist es mit allen Elementen irgendeiner Untergruppe von der Ordnung  $p^3$  der Gruppe  $\mathfrak{G}$  vertauschbar.

$\mathfrak{P}$  sei die Sylowsche Untergruppe von der Ordnung  $p^3$  der Gruppe  $\mathfrak{G}$ . Nehmen wir an, daß  $\mu p^3$  die Ordnung des Normalisators von  $\mathfrak{P}$  in bezug

auf  $\mathfrak{H}$  ist und daß  $r p^3$  die Ordnung der Untergruppe  $\mathfrak{H}$  ist, die aus denjenigen Elementen von  $\mathfrak{H}$  besteht, welche mit allen Elementen von  $\mathfrak{P}$  vertauschbar sind. Da  $\mathfrak{P}$  eine Gruppe vom Typus  $(1, 1, 1)$  ist, so muß sein

$$\mu > r,$$

d. h.

$$\mu \geq r q$$

oder

$$\mu \geq r r.$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß die Anzahl der Elemente der Gruppe  $\mathfrak{H}$ , deren Ordnung durch  $p$  teilbar ist, nicht größer sein kann als

$$\frac{q^3 r}{\mu} \cdot r (p^3 - 1),$$

d. h. nicht größer sein kann als

$$q^3 r (p^3 - 1)$$

oder als

$$q^3 (p^3 - 1).$$

Es ergibt sich, daß die Anzahl aller Elemente der Gruppe  $\mathfrak{H}$  die Größe

$$p^2 q^3 (r - 1) + p^2 r (q^3 - 1) + q^3 r (p^3 - 1) + 1$$

oder die Größe

$$p^3 q^3 (r - 1) + p^2 r (q^3 - 1) + q^3 (p^3 - 1) + 1$$

nicht überschreitet. Da  $p \geq 3$  ist und  $q$  und  $r$  größer als  $p$  sind, so zeigt sich, daß unsere Gruppe weniger als

$$p^3 q^3 r$$

Elemente besitzt.

Hieraus ist ersichtlich, daß keine  $B$ -Gruppe von der Ordnung  $p^3 q^3 r$  existieren kann. —

Jetzt wollen wir den Fall einer  $B$ -Gruppe von der Ordnung  $p^4 q^3 r$  untersuchen ( $p$  ist selbstverständlich kleiner als  $q$  und  $r$ ). Da entweder  $q$  oder  $r$  ein Teiler von  $\vartheta(\mathfrak{P})$  sein muß ( $\mathfrak{P}$  ist die Sylowsche Untergruppe der Ordnung  $p^4$  unserer  $B$ -Gruppe  $\mathfrak{H}$  von der Ordnung  $p^4 q^3 r$ ) und

$$q^3 \equiv r \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, so ist entweder

$$q = 1 + p + p^2$$

oder

$$r = 1 + p + p^2.$$

In unserer Gruppe  $\mathfrak{H}$  kann es keine Elemente der Ordnung  $qr$  geben. Denn läge in der Gruppe ein solches Element, so wäre die Ordnung des Normalisators seiner  $r$ -ten Potenz in bezug auf  $\mathfrak{H}$  durch  $q^3 r$  teilbar, und



die Ordnung der entsprechenden Klasse konjugierter Elemente wäre gleich  $p^4$ , was unserer Voraussetzung, daß die Gruppe  $\mathfrak{H}$  eine  $B$ -Gruppe ist, widerspricht.

Wir wollen nun beweisen, daß keine zwei Sylowsche Untergruppen von der Ordnung  $q^2$  unserer Gruppe  $\mathfrak{H}$  ein vom Einheitsselement verschiedenes Element gemein haben können. Nehmen wir an, daß  $\Omega'$  eine Untergruppe der Ordnung  $q$  darstellt, die in mehr als einer Sylowschen Untergruppe von der Ordnung  $q^2$  der Gruppe  $\mathfrak{H}$  enthalten ist.  $\Omega''$  sei eine der Sylowschen Untergruppen, die  $\Omega'$  in sich einschließen. Bekanntlich muß in  $\mathfrak{H}$  ein Element liegen, dessen Ordnung nicht durch  $q$  teilbar ist und welches mit  $\Omega'$ , aber nicht mit  $\Omega''$  vertauschbar ist. Die Ordnung des Normalisators  $\mathfrak{N}$  der Untergruppe  $\Omega'$  in bezug auf  $\mathfrak{H}$  sei  $q^2 x$ . Es ist klar, daß  $\Omega''$  keine invariante Untergruppe von  $\mathfrak{N}$  darstellt. Da  $\Omega''$  eine Abelsche Gruppe ist, so besitzt  $\mathfrak{N}$  einen Normalteiler der Ordnung  $x$ <sup>9)</sup>; alle Elemente dieses Normalteilers sind gewiß mit allen Elementen der Gruppe  $\Omega'$  vertauschbar. Wir sahen, daß in  $\mathfrak{H}$  die Elemente der Ordnung  $q$  mit den Elementen der Ordnung  $r$  nicht vertauschbar sein können; daher kann  $x$  nicht durch  $r$  teilbar sein. Da  $x \bmod q$  zu 1 kongruent sein muß, so kann es weder gleich  $p$  noch gleich  $p^2$  sein.  $x$  kann auch nicht gleich  $p^4$  sein; denn dann müßte  $\mathfrak{H}$  eine Untergruppe von einfachem Index haben. Nehmen wir endlich an, daß  $x = p^3$ . Die Untergruppe  $\mathfrak{S}$  der Ordnung  $p^3$  des Normalisators  $\mathfrak{N}$  muß gewiß eine Abelsche Gruppe vom Typus  $(1, 1, 1)$  sein.  $\mathfrak{S}$  muß ein invariantes Element einer Sylowschen Untergruppe von der Ordnung  $p^4$  der Gruppe  $\mathfrak{H}$  enthalten. Die Ordnung des Normalisators dieses Elementes in bezug auf  $\mathfrak{H}$  muß gleich  $p^4 q$  sein. Die Sylowsche Untergruppe der Ordnung  $q$  dieses Normalisators ist mit dem oben erwähnten invarianten Element vertauschbar und stellt darum einen Normalteiler des erwähnten Normalisators dar. Die Ordnung des Normalisators dieser Untergruppe in bezug auf  $\mathfrak{H}$  ist im Höchsthalle gleich  $p^4 q^2$ , was natürlich unmöglich ist. Wir sehen also, daß die Sylowschen Untergruppen der Ordnung  $q^2$  der Gruppe  $\mathfrak{H}$  keine vom Einheitsselement verschiedenen gemeinsamen Elemente besitzen können.

Indem wir die Identität von Maillet benutzen, können wir schreiben:

$$\begin{aligned} p^u q^v &= 1 + k r, \\ p^v r^j &= 1 + l q^2. \end{aligned}$$

Hierin kann  $v$  nicht gleich 0 sein, da dann die Gruppe  $\mathfrak{H}$  eine Untergruppe von einfachem Index besäße.  $j$  kann nicht gleich 0 sein, da  $p^v$  nicht  $\bmod q^2$  zu 1 kongruent sein kann ( $v \leq 4$ ). Hieraus folgt, daß  $v < 4$  ist.

<sup>9)</sup> Es ist leicht zu beweisen, daß der Normalisator von  $\Omega''$  in bezug auf  $\mathfrak{N}$  mit  $\Omega''$  zusammenfällt.

Angenommen, es wäre  $i = 0$ . Dann wäre  $r \bmod pq$  zu 1 kongruent (ein Element von der Ordnung  $q$  der Gruppe  $\mathfrak{S}$  ist mit keinem Element von der Ordnung  $r$  derselben Gruppe vertauschbar). In diesem Falle jedoch ist  $r > 2p^2$ , und  $p^\mu$  ( $\mu \leq 4$ ) kann nicht  $\bmod r$  zu 1 kongruent sein. Folglich ist  $i > 0$ .

Ferner kann  $\mu$  nicht gleich 0 sein. Sonst wäre nämlich

$$q^2 = 1 + \lambda pr$$

und somit

$$p^v r = 1 + l + l\lambda pr.$$

Aus dem Umstand, daß  $v < 4$  ist, ergibt sich, daß  $l < p^2$  ist. Andererseits ist

$$l \equiv -1 \pmod{pr},$$

und es ergibt sich ein Widerspruch. Folglich ist

$$\mu > 0.$$

Nehmen wir zuerst an, daß  $i = 2$  ist. Wir haben folgende Relationen:

$$p^\mu q^2 = 1 + kr,$$

$$p^v r = 1 + lq^2.$$

Die Größen  $\mu$  und  $v$  können gleich den Zahlen 1, 2, 3 sein. Wir wenden die auf S. 205 und 206 der „Abstrakten Gruppentheorie“ von O. Schmidt\*) angeführte Methode an: Es wird

$$p^{\mu+v} q^2 = p^v + k + klq^2,$$

$$k = -p^v + nq^2.$$

Da

$$q^2 \equiv r \equiv 1 \pmod{p},$$

so ist

$$k \equiv -1 \pmod{p}$$

und

$$n \equiv -1 + mp.$$

Hieraus folgt

$$p^\mu q^2 = 1 - p^v r - q^2 r + mpq^2 r$$

und

$$\frac{p^{\mu-1}}{r} + \frac{p^{v-1}}{q^2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{pq^2 r} + m,$$

wo  $m$  eine ganze, gerade Zahl ist. Hieraus ergibt sich, daß  $r$  kleiner als  $p^2$  sein muß. Daraus folgt wieder

$$q = 1 + p + p^2 > r.$$

Ist  $v = 3$ , so muß  $r \bmod q$  zu 1 kongruent sein, was, wie oben bewiesen wurde, unmöglich ist. Ist jedoch  $v < 3$ , so ist

$$p^v r < q^2.$$

\*) Kiew 1916 (russisch).

Folglich kann  $i$  nicht gleich 2 sein. Nehmen wir an, es sei gleich 1. In diesem Falle haben wir:

$$p^\mu q = 1 + kr,$$

$$p^\nu r = 1 + lq^2.$$

Auf ebendieselbe Weise erhalten wir

$$\frac{p^{\mu-1}}{r} + \frac{p^{\nu-1}}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{pqr} + m,$$

wo  $m$  wieder eine ganze, gerade Zahl bezeichnet. In diesem Falle ist augenscheinlich

$$r = 1 + \alpha q = 1 + \beta pq > 2p^2.$$

Folglich ist

$$q = 1 + p + p^2,$$

$$r \geq 2p(1 + p + p^2).$$

Da  $\mu \leq 4$  und  $\nu \leq 3$  ist, so sehen wir, daß  $i$  nicht gleich 1 sein kann. —

Auf solche Weise kommen wir zu dem Ergebnis, daß eine  $B$ -Gruppe von der Ordnung  $p^4 q^2 r$  nicht existieren kann. —

Moskau, den 7. Juni 1930.

(Eingegangen am 21. 7. 1930.)

## Über die Anzahl der eigentlichen Untergruppen und der Elemente von gegebener Ordnung in $p$ -Gruppen.

Von

A. Kulakoff in Moskau.

In seiner bekannten Arbeit „Verallgemeinerung des Sylowschen Satzes“ hat Frobenius für die in der Gruppenordnung aufgehenden Primzahlpotenzen  $p^a$  den Satz bewiesen, daß die Anzahl der Untergruppen von der Ordnung  $p^a$  kongruent  $1 \pmod{p}$  ist.

Später ist das Theorem von Frobenius für nicht-zyklische Gruppen, deren Ordnungen Primzahlpotenzen sind, in einigen speziellen Fällen verschärft worden. So ist bewiesen worden, daß die Anzahl der Untergruppen von der Ordnung  $p^{m-1}$  in einer nicht-zyklischen Gruppe  $G$  von der Ordnung  $p^m$  ( $p \geq 2$ ) die Form

$$1 + p + p^2 + \dots + p^{\lambda}$$

hat, wo  $\lambda > 0$  eine ganze Zahl ist, so daß die Anzahl dieser Untergruppen kongruent  $1 + p \pmod{p^2}$  ist. Ferner hat Miller<sup>1)</sup> bewiesen, daß die Anzahl der Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  in einer nicht-zyklischen Abelschen Gruppe von der Ordnung  $p^m$  ( $p \geq 2$ ;  $1 \leq s < m$ ) kongruent  $1 + p \pmod{p^2}$  ist.

Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit wird dieser Millersche Satz auf den Fall einer *beliebigen* nicht-zyklischen Gruppe von der Ordnung  $p^m$  ( $p > 2$ ) erweitert.

In der oben erwähnten Arbeit von Frobenius ist als Hilfssatz folgendes Theorem bewiesen worden: Wenn  $G$  eine Gruppe von der Ordnung  $g$  und  $n$  ein Teiler von  $g$  ist, so ist die Anzahl aller Elemente der Gruppe  $G$ , deren Ordnungen in  $n$  aufgehen, durch  $n$  teilbar. Für nicht-zyklische Gruppen von der Ordnung  $p^m$  ( $p > 2$ ) kann dieses Resultat verschärft werden. Mit Anwendung des Satzes von Miller<sup>2)</sup>, nach welchem die Anzahl

<sup>1)</sup> Bulletin of the American Mathematical Society 1919.

<sup>2)</sup> Proc. L. M. S. 1904.

der zyklischen Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  in einer nicht-zyklischen Gruppe von der Ordnung  $p^m$  ( $p > 2$ ,  $1 < s < m$ ) durch  $p$  teilbar ist, und mit Anwendung des Satzes von Frobenius ist es leicht zu zeigen, daß die Anzahl aller Elemente in einer nicht-zyklischen Gruppe von der Ordnung  $p^m$  ( $p > 2$ ), deren Ordnungen in  $p^s$  aufgehen ( $1 \leq s < m$ ), durch  $p^{s+1}$  teilbar ist. Im zweiten Teile dieser Arbeit ist ein Beweis für diesen Satz gegeben, der von den Sätzen von Frobenius und Miller unabhängig ist.

## § 1.

Wir bezeichnen eine Gruppe, deren Ordnung eine Primzahlpotenz  $p^m$  ist, als  $p$ -Gruppe und beweisen folgenden

**Satz 1.** *Die Anzahl der eigentlichen Untergruppen von gegebener Ordnung in einer nicht-zyklischen  $p$ -Gruppe ( $p > 2$ ) ist  $\equiv 1 + p \pmod{p^2}$ .*

Im folgenden werden wir der Kürze halber folgende Bezeichnungen gebrauchen: die Anzahl der Untergruppen von der Ordnung  $p^\mu$  in einer Gruppe  $G$  von der Ordnung  $p^m$  ( $\mu < m$ ) werden wir mit  $\varrho_\mu(G)$  bezeichnen.

Bevor wir zum Beweise des Satzes 1 übergehen, wollen wir folgenden Hilfssatz aufstellen:

**Hilfssatz.** *Sind in einer Gruppe  $G$  von der Ordnung  $p^m$  ( $p \geq 2$ ) Untergruppen von der Ordnung  $p^h$  ( $h < m$ ) vorhanden, die eine Untergruppe  $H$  von der Ordnung  $p^{h_1}$  ( $h_1 \leq h$ ) als Normalteiler enthalten, so ist ihre Anzahl gleich  $\varrho_{h-h_1}(Q/H)$ , wo  $Q$  die größte Untergruppe von  $G$  ist, die  $H$  als Normalteiler enthält.*

Es seien

$$H_1, H_2, \dots, H_i$$

alle verschiedenen Untergruppen von der Ordnung  $p^h$  der Gruppe  $G$ , die  $H$  als Normalteiler enthalten. Jede dieser Untergruppen ist in  $Q$  enthalten, woraus folgt, daß jede Faktorgruppe  $H_{i'}/H$  ( $1 \leq i' \leq i$ ) Untergruppe der Gruppe  $Q/H$  ist. Nun kann man eine eindeutige Zuordnung zwischen den Untergruppen  $H_{i'}$  von  $Q$  und Untergruppen  $H_{j'}/H$  von  $Q/H$  herstellen, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

## § 2.

Der Satz 1 gilt für die nicht-zyklische Gruppe von der Ordnung  $p^3$  ( $p \geq 2$ ), denn die Anzahl ihrer Untergruppen von der Ordnung  $p$  ist bekanntlich gleich  $1 + p$ . Wir versuchen daher, die Methode der vollständigen Induktion anzuwenden. Wir setzen den angeführten Satz als bewiesen voraus für alle nicht-zyklischen  $p$ -Gruppen ( $p > 2$ ), deren Ordnung ein Teiler von  $p^m$  ist, und zeigen, daß er dann auch für die gegebene nicht-zyklische  $p$ -Gruppe von der Ordnung  $p^m$  gilt.

## § 3.

Wenn eine nicht-zyklische Gruppe  $G_m^{(m-1)}$  <sup>2)</sup> von der Ordnung  $p^m$  ( $p > 2$ ) Elemente von der Ordnung  $p^{m-1}$  besitzt, so ist die Anzahl der eigentlichen Untergruppen von gegebener Ordnung in  $G_m^{(m-1)}$  gleich  $1 + p$ . Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich für die Abelsche Gruppe  $G_m^{(m-1)}$  mit Hilfe des Basis-Begriffes der Abelschen Gruppen <sup>4)</sup>. Für eine nicht-Abelsche Gruppe  $G_m^{(m-1)}$  ist sie von Burnside <sup>5)</sup> bewiesen. Wir wollen jedoch hier einige Überlegungen hinzufügen, welche seinen nicht ganz beendeten Beweis vervollständigen und welche wir außerdem weiter benutzen werden (§ 10).

Burnside beweist, daß die nicht-Abelsche Gruppe  $G_m^{(m-1)}$  wenigstens  $1 + p$  Untergruppen von der Ordnung  $p^{m-1}$  enthält, und zwar eine nicht-zyklische Abelsche Untergruppe von der Ordnung  $p^{m-1}$  und  $p$  zyklische Untergruppen von derselben Ordnung. Die nicht-zyklische Untergruppe von der Ordnung  $p^{m-1}$  wollen wir mit  $G_{m-1}^{(m-2)}$  bezeichnen und die  $p$  zyklischen Untergruppen von der Ordnung  $p^{m-1}$  mit  $G_{m-1,1}, G_{m-1,2}, \dots, G_{m-1,p}$ . Wir erhalten also die Reihe von Untergruppen von der Ordnung  $p^{m-1}$ :

$$(1) \quad G_{m-1}^{(m-2)}, G_{m-1,1}, G_{m-1,2}, \dots, G_{m-1,p}.$$

Jetzt bietet es keine Schwierigkeit zu beweisen, daß

$$\varrho_s(G_m^{(m-1)}) = 1 + p \quad (1 \leq s < m).$$

Vor allem wollen wir beweisen, daß durch die erwähnten Untergruppen von der Ordnung  $p^{m-1}$  alle Untergruppen dieser Ordnung der Gruppe  $G_m^{(m-1)}$  erschöpft sind.

Man erkennt leicht, daß der Durchschnitt zweier beliebiger Untergruppen der Reihe (1) eine und dieselbe zyklische Gruppe  $G_{m-1}^{(m-2)}$  von der Ordnung  $p^{m-2}$  ist; hieraus folgt, daß die Anzahl der verschiedenen Elemente, die in den Untergruppen der Reihe (1) liegen, gleich

$$p^{m-2} + (1 + p)(p^{m-1} - p^{m-2}) = p^m$$

ist, d. h. in den Untergruppen der Reihe (1) befinden sich alle Elemente der Gruppe  $G_m^{(m-1)}$ . Man kann dabei beweisen, daß alle Elemente der Gruppe  $G_m^{(m-1)}$ , deren Ordnungen nicht größer als  $p^{m-2}$  sind, in  $G_{m-1}^{(m-2)}$  liegen. In der Tat, da jede der zyklischen Untergruppen der Reihe (1) genau  $\varphi(p^{m-1}) = p^{m-2}(p-1)$  <sup>6)</sup> Elemente von der Ordnung  $p^{m-1}$  ent-

<sup>2)</sup> Mit dem Symbol  $G_a^{(b)}$  werden wir überhaupt eine Gruppe von der Ordnung  $p^a$  bezeichnen, in welcher die höchste vorkommende Ordnung eines Elementes  $p^b$  ( $b < a$ ) ist.

<sup>4)</sup> Diese Bemerkung, sowie auch einige andere, die mir die Möglichkeit gaben, die ursprüngliche Redaktion meiner Arbeit zu vereinfachen, verdanke ich Herrn Prof. O. J. Schmidt.

<sup>5)</sup> The theory of groups of finite order (second edition), p. 135.

<sup>6)</sup>  $\varphi(p^{m-1})$  bezeichnet die bekannte Eulersche Funktion.

hält, so enthält  $G_m^{(m-1)}$  genau  $p^{m-1}(p-1)$  Elemente dieser Ordnung, woraus folgt, daß  $G_m^{(m-1)}$

$$p^m - p^{m-1}(p-1) = p^{m-1}$$

Elemente besitzt, deren Ordnungen nicht größer als  $p^{m-2}$  sind, w. z. b. w.

Nun sei  $G'_m$  irgendeine Untergruppe von der Ordnung  $p^{m-1}$  der Gruppe  $G_m^{(m-1)}$ . Wenn  $G'_m$  eine zyklische Untergruppe ist, so muß  $G'_m$  notwendig mit einer von den zyklischen Untergruppen der Reihe (1) übereinstimmen. Wenn nun  $G'_m$  eine nicht-zyklische Untergruppe von der Ordnung  $p^{m-1}$  ist, so sind die Ordnungen ihrer Elemente nicht größer als  $p^{m-2}$ , folglich sind sie alle in  $G_{m-1}^{(m-2)}$  enthalten, so daß  $G'_m = G_{m-1}^{(m-2)}$ .

Auf solche Weise haben wir bewiesen, daß

$$e_{m-1}(G_m^{(m-1)}) = 1 + p.$$

Jetzt wollen wir zeigen, daß auch

$$e_s(G_m^{(m-1)}) = 1 + p \quad (s \leq m-2).$$

In der Tat, alle Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  ( $s \leq m-2$ ) sind in  $G_{m-1}^{(m-2)}$  enthalten. Wenn dabei  $s < m-2$  ist, so sind alle diese Untergruppen in der einzigen nicht-zyklischen Untergruppe  $G_{m-2}^{(m-2)}$  von der Ordnung  $p^{m-2}$  der Gruppe  $G_{m-1}^{(m-2)}$  enthalten. Indem man so fortfährt, erhält man folgendes Resultat: Alle Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  ( $s \leq m-2$ ) der Gruppe  $G_m^{(m-1)}$  sind in einer nicht-zyklischen Untergruppe  $G_{s+1}^{(s)}$  von der Ordnung  $p^{s+1}$  enthalten, folglich ist

$$e_s(G_m^{(m-1)}) = e_s(G_{s+1}^{(s)}) = 1 + p,$$

w. z. b. w.

Also im Falle, daß die nicht-zyklische Gruppe  $G$  von der Ordnung  $p^m$  ( $p > 2$ ) Elemente von der Ordnung  $p^{m-1}$  besitzt, wird die Kongruenz

$$e_s(G) \equiv 1 + p \pmod{p^2} \quad (1 \leq s < m)$$

zur Gleichheit.

#### § 4.

Jetzt wollen wir zur Betrachtung des Falles übergehen, wo die Gruppe  $G$  keine Elemente von der Ordnung  $p^{m-1}$  enthält. Nehmen wir an, daß  $G_1$  und  $G_2$  zwei beliebige Untergruppen von der Ordnung  $p^{m-1}$  der Gruppe  $G$  sind. Ihr Durchschnitt sei  $D$ . Da  $G_1$  und  $G_2$  Normalteiler von  $G$  sind, so ist auch  $D$  Normalteiler von  $G$ , wobei, wie bekannt, die Ordnung von  $D$  gleich  $p^{m-2}$  ist. Die Faktorgruppe  $G/D$  von der Ordnung  $p^2$  ist Abelsche Gruppe und dabei vom Typus  $(p, p)$ .<sup>7)</sup> Bezeichnen wir jetzt mit

$$G_1, G_2, \dots, G_s$$

<sup>7)</sup> Burnside, Theory of groups, S. 127–128.

alle verschiedenen Untergruppen von der Ordnung  $p^{m-1}$  der Gruppe  $G$ , die  $D$  enthalten. Da jede dieser Untergruppen  $D$  als Normalteiler enthält, so ist auf Grund des Hilfssatzes von § 1 die Anzahl dieser Untergruppen der Anzahl der Untergruppen von der Ordnung  $p$  in  $G/D$  gleich, so daß  $x = 1 + p$ . Die Reihe von  $1 + p$  Untergruppen

$$G_1, G_2, \dots, G_{1+p}$$

werden wir „Fundamentalreihe“ nennen. Jetzt teilen wir alle eigentlichen Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  ( $1 \leq s < m$ ) der Gruppe  $G$  in zwei Kategorien ein. Die Untergruppen von der Ordnung  $p^s$ , die wenigstens in einer von den Untergruppen der Fundamentalreihe enthalten sind, wollen wir zur ersten Kategorie rechnen. Zur zweiten Kategorie rechnen wir die Untergruppen von der Ordnung  $p^s$ , die in keiner von den Untergruppen der Fundamentalreihe enthalten sind. Die Anzahl der Untergruppen der ersten Kategorie bezeichnen wir mit  $u_s$ , die Anzahl der Untergruppen der zweiten Kategorie mit  $u'_s$ , so daß

$$(I) \quad \varrho_s(G) = u_s + u'_s.$$

Es sei bemerkt, daß alle Untergruppen der zweiten Kategorie nicht-zyklische Gruppen sind. In den Untergruppen der Fundamentalreihe sind alle Elemente der Gruppe  $G$  enthalten. Daraus folgt, daß jede zyklische Untergruppe von  $G$  zur ersten Kategorie gehört, folglich ist jede Untergruppe der zweiten Kategorie nicht-zyklische Gruppe. Diese Bemerkungen werden wir später benutzen können. Wir wollen zuerst die Form der Anzahl der Untergruppen der ersten Kategorie untersuchen.

### § 5.

Indem wir den Satz 1 durch Induktion beweisen, nehmen wir an (§ 2), daß er für alle nicht-zyklischen Gruppen von jeder Ordnung  $p^{m-1} < p^m$ ,  $p > 2$ , richtig ist. Wir wollen nun zeigen, daß unter dieser Voraussetzung die Kongruenz

$$u_s = 1 + p \pmod{p^2} \quad (1 \leq s < m)$$

besteht. Nehmen wir zuerst an, daß  $s < m - 2$  ist. Dann müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

#### 1. $D$ ist eine nicht-zyklische Gruppe.

Für die nicht-zyklische Gruppe  $D$  von der Ordnung  $p^{m-2} < p^m$  gilt der Satz nach Voraussetzung, so daß

$$(1) \quad \varrho_s(D) = 1 + p \pmod{p^2} \quad (s < m - 2).$$

Für jede der Untergruppen der Fundamentalreihe ist der Satz ebenfalls als richtig vorausgesetzt, folglich

$$(2) \quad \varrho_i(G_i) = 1 + p \pmod{p^2} \quad (i = 1, 2, \dots, 1 + p).$$



Da  $D$  der Durchschnitt zweier beliebiger Untergruppen der Fundamentalreihe ist, so ist offenbar

$$(3) \quad u_s = \varrho_s(D) + \sum_{i=1}^{i=1+p} (\varrho_s(G_i) - \varrho_s(D)).$$

Aus den Kongruenzen (1) und (2) erhält man

$$\varrho_s(G_i) - \varrho_s(D) \equiv 0 \pmod{p^2} \quad (i = 1, 2, \dots, 1+p),$$

folglich

$$\sum_{i=1}^{i=1+p} (\varrho_s(G_i) - \varrho_s(D)) \equiv 0 \pmod{p^2},$$

und wir erhalten wegen (1) und (3)

$$u_s \equiv 1 + p \pmod{p^2} \quad (s < m-2).$$

2.  $D$  ist eine zyklische Gruppe.

In diesem Falle enthält jede Untergruppe der Fundamentalreihe, da sie eine nicht-zyklische Gruppe von der Ordnung  $p^{m-1}$  ist und Elemente von der Ordnung  $p^{m-2}$  besitzt, genau  $1+p$  Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  (§ 3). Die zyklische Gruppe  $D$  enthält nur eine Untergruppe von der Ordnung  $p^s$ , folglich

$$u_s = 1 + p(1+p) = 1 + p + p^2 \equiv 1 + p \pmod{p^2} \quad (s < m-2).$$

Setzen wir jetzt voraus, daß  $s = m-2$  ist. In diesem Falle, unabhängig davon ob  $D$  eine zyklische oder nicht-zyklische Gruppe ist, hat man

$$(4) \quad u_{m-2} = 1 + \sum_{i=1}^{i=1+p} (\varrho_{m-2}(G_i) - 1).$$

Außerdem haben wir

$$(5) \quad \varrho_{m-2}(G_i) \equiv 1 + p \pmod{p^2} \quad (1 \leq i \leq 1+p).$$

Aus (5) zieht man

$$\varrho_{m-2}(G_i) - 1 \equiv p \pmod{p^2} \quad (1 \leq i \leq 1+p),$$

also

$$\sum_{i=1}^{i=1+p} (\varrho_{m-2}(G_i) - 1) \equiv \sum_{i=1}^{i=1+p} p = p + p^2 \pmod{p^2},$$

woraus folgt

$$\sum_{i=1}^{i=1+p} (\varrho_{m-2}(G_i) - 1) \equiv p \pmod{p^2},$$

und wegen (4)

$$u_{m-2} \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

Wenn schließlich  $s = m-1$ , so ist es klar, daß

$$u_{m-1} = 1 + p.$$

Also, ist  $1 \leq s \leq m-1$ , so ist

$$(II) \quad u_s \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

## § 6.

Wir wollen jetzt beweisen, daß unter der Voraussetzung des § 2 die Kongruenz

$$u_s' \equiv 0 \pmod{p^2} \quad (1 \leq s \leq m-1)$$

besteht.

Wenn  $u_s' = 0$  (d. h. wenn die Gruppe  $G$  keine Untergruppe von der Ordnung  $p^s$  der zweiten Kategorie besitzt), so wird diese Kongruenz zur Gleichheit. Nehmen wir jetzt an, daß  $u_s' > 0$  ist.

Wir wollen zuerst den Fall  $s > 2$  betrachten.  $G'$  sei irgendeine Untergruppe von der Ordnung  $p^s$  der zweiten Kategorie; mit  $p^{s'}$  bezeichnen wir die Ordnung des Durchschnittes von  $G'$  und  $D$ .

Wir zeigen, daß  $s' = s - 2$ .

Wäre nämlich  $s' < s - 2$ , so wäre die Ordnung der Untergruppe  $G'D$  ( $G'D$  ist eine Gruppe, da  $D$  Normalteiler von  $G$  ist) gleich

$$p^s \cdot p^{m-2} / p^{s'} = p^{m+s-2-s'} > p^m,$$

was nicht möglich ist.

Wäre nun  $s' = s - 1$ , so würde die Ordnung der Untergruppe  $G'D$  gleich  $p^{m-1}$  sein, so daß  $G'$  in der Untergruppe  $G'D$  der Fundamentalreihe enthalten wäre, gegen die Voraussetzung. Also ist  $s' = s - 2$ . Hieraus folgt, daß jede Untergruppe von der Ordnung  $p^s$  der zweiten Kategorie immer eine und nur eine Untergruppe von der Ordnung  $p^{s-2}$  der Gruppe  $D$  enthält. Wir wollen jetzt alle Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  der zweiten Kategorie in Systeme einteilen, indem wir zu einem System solche Untergruppen rechnen, die eine und dieselbe Untergruppe von der Ordnung  $p^{s-2}$  der Gruppe  $D$  enthalten. Bezeichnen wir diese Systeme mit

$$X_{1s}, X_{2s}, \dots, X_{\sigma s}.$$

Die Anzahl der Untergruppen im System  $X_{\sigma s}$  ( $1 \leq \sigma' \leq \sigma$ ) bezeichnen wir mit  $n_{\sigma's}$ , und mit

$$G_1^{(\sigma')}, G_2^{(\sigma')}, \dots, G_{n_{\sigma's}}^{(\sigma')}$$

alle verschiedenen Untergruppen, die dem System  $X_{\sigma s}$  angehören.

Wie wir eben bewiesen haben, kann eine und dieselbe Untergruppe von der Ordnung  $p^s$  der zweiten Kategorie nicht gleichzeitig zwei Systemen angehören; hieraus folgt

$$u_s' = \sum_{\sigma'=1}^{\sigma'-\sigma} n_{\sigma's}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Kongruenz besteht

$$n_{\sigma's} \equiv 0 \pmod{p^2} \quad (1 \leq \sigma' \leq \sigma; s > 2).$$

Mit  $n_{\sigma's}$  haben wir die Anzahl der Untergruppen im System  $X_{\sigma s}$  bezeichnet. Wir wollen noch einige weitere Bezeichnungen einführen.

Ist  $D_{s-2}$  diejenige Untergruppe von der Ordnung  $p^{s-2}$  der Gruppe  $D$ , welche in jeder Untergruppe des Systems  $X_{\sigma'}$  enthalten ist, und ist  $F$  eine Untergruppe von der Ordnung  $p^f$  ( $s \leq f$ ) der Gruppe  $G$ , die  $D_{s-2}$  enthält, so werden wir die Anzahl aller Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  der Gruppe  $F$ , die  $D_{s-2}$  als Normalteiler enthalten, mit  $q_{F, D_{s-2}}$  bezeichnen.

Die Anzahl aller Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  der ersten Kategorie, die  $D_{s-2}$  als Normalteiler enthalten, bezeichnen wir mit  $\sigma_{D_{s-2}}$ ; die Anzahl der ebensolchen Untergruppen der zweiten Kategorie mit  $\sigma'_{D_{s-2}}$ , so daß

$$(I') \quad q_{G, D_{s-2}} = \sigma_{D_{s-2}} + \sigma'_{D_{s-2}}.$$

Wir zeigen nun, daß  $D_{s-2}$  als Normalteiler in jeder Untergruppe des Systems  $X_{\sigma'}$  enthalten ist.

Ist  $G$  Abelsche Gruppe, so ist unsere Behauptung selbstverständlich. Angenommen nun,  $G$  ist nicht-Abelsche Gruppe und  $D_{s-2}$  ist nicht als Normalteiler z. B. in der Untergruppe  $G_1^{(\sigma')}$  enthalten. Dann würde die Anzahl der Untergruppen von  $G_1^{(\sigma')}$ , die in  $G_1^{(\sigma')}$  mit  $D_{s-2}$  konjugiert sind, größer als 1 sein, und da  $D$  als Normalteiler von  $G$  alle mit  $D_{s-2}$  konjugierten Untergruppen enthalten muß, so würde die Anzahl der Untergruppen von der Ordnung  $p^{s-2}$  der Gruppe  $D$ , die in  $G_1^{(\sigma')}$  enthalten sind, größer als 1 sein, d. h.  $G_1^{(\sigma')}$  würde gegen die Voraussetzung eine Untergruppe der ersten Kategorie sein. Also ist  $D_{s-2}$  in jeder Untergruppe aus  $X_{\sigma'}$  als Normalteiler enthalten. Da außerdem die Untergruppen des Systems  $X_{\sigma'}$ , die einzigen Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  der zweiten Kategorie sind, die  $D_{s-2}$  enthalten, so ist

$$\sigma'_{D_{s-2}} = n_{\sigma' s}.$$

Indem wir dies in (I') einsetzen, erhalten wir

$$(I''). \quad q_{G, D_{s-2}} = \sigma_{D_{s-2}} + n_{\sigma' s} \quad (s > 2).$$

Wir bezeichnen nun mit  $D_{ik}^{(\sigma')}$  den Durchschnitt der Untergruppe  $G_i^{(\sigma')}$  ( $1 \leq i \leq n_{\sigma' s}$ ) aus dem System  $X_{\sigma'}$  und der Untergruppe  $G_k$  ( $1 \leq k \leq 1+p$ ) der Fundamentalreihe. Offenbar ist die Ordnung von  $D_{ik}^{(\sigma')}$  gleich  $p^{s-1}$ .  $D_{ik}^{(\sigma')}$  von der Ordnung  $p^{s-1}$  ist in einer Untergruppe  $G_{k_s}$  von der Ordnung  $p^s$  der Gruppe  $G_k$  enthalten. Man kann nun beweisen, daß  $D_{s-2}$  als Normalteiler in  $G_{k_s}$  enthalten ist und daß  $G_{k_s}$  nicht in  $D$  enthalten ist.

Wir setzen zunächst voraus, daß  $G$  nicht Abelsch ist.

Man bemerkt vor allem, daß  $D_{ik}^{(\sigma')}$  Normalteiler von  $G_{k_s}$  ist. Wäre nun  $D_{s-2}$  nicht Normalteiler von  $G_{k_s}$ , so müßte  $D_{ik}^{(\sigma')}$ , die  $D_{s-2}$  enthält, auch alle Untergruppen, die in  $G_{k_s}$  mit  $D_{s-2}$  konjugiert sind, enthalten, und da diese Untergruppen auch in  $D$  enthalten sein müssen, so würde die Anzahl der Untergruppen von der Ordnung  $p^{s-2}$  der Gruppe  $D$ , die in  $D_{ik}^{(\sigma')}$  und also auch in  $G_i^{(\sigma')}$  enthalten sind, größer als 1 sein, gegen die

Voraussetzung. Da  $D_{ik}^{(\sigma')}$  in  $D$  nicht enthalten ist, so ist natürlich auch  $G_k$ , nicht in  $D$  enthalten. Für Abelsche Gruppe  $G$  ist der erste Teil unserer Behauptung evident; der zweite Teil folgt wie für die nicht-Abelsche Gruppe. Also ist bewiesen, daß jede Untergruppe der Fundamentalreihe Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  besitzt, die nicht in  $D$  enthalten sind und die  $D_{s-1}$  als Normalteiler enthalten.

Hieraus folgt, daß

$$\sigma_{D_{s-1}} \geq 1 + p$$

ist. Folglich ist immer

$$\sigma_{D_{s-1}} > 1,$$

und a fortiori

$$\varrho_{G, D_{s-1}} = \sigma_{D_{s-1}} + n_{\sigma'} > 1.$$

Die Ungleichung  $\varrho_{G, D_{s-1}} > 1$  auf Grund des Hilfssatzes von § 1 und der Methode der vollständigen Induktion zieht nach sich

$$(II') \quad \varrho_{G, D_{s-1}} \equiv 1 + p \pmod{p^2} \quad (s > 2).$$

Wir wollen jetzt die Form der Zahl  $\sigma_{D_{s-1}}$  untersuchen.

Es ist klar, daß  $\sigma_{D_{m-1}} = 1 + p$ . Betrachten wir nun den Fall  $s < m - 1$ . Nehmen wir zuerst an, daß  $\varrho_{D, D_{s-1}} > 1$  ist. Dann wird die Kongruenz bestehen

$$\varrho_{D, D_{s-1}} \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

Wie oben bewiesen, besteht immer die Ungleichung

$$\varrho_{G_i, D_{s-1}} > \varrho_{D, D_{s-1}} \quad (1 \leq i \leq 1 + p),$$

und da nach Voraussetzung  $\varrho_{D, D_{s-1}} > 1$  ist, so ist a fortiori

$$\varrho_{G_i, D_{s-1}} > 1 \quad (1 \leq i \leq 1 + p).$$

Hieraus folgt, daß

$$\varrho_{G_i, D_{s-1}} \equiv 1 + p \pmod{p^2} \quad (1 \leq i \leq 1 + p).$$

Es ist ersichtlich, daß  $\sigma_{D_{s-1}}$  in der Form von

$$\sigma_{D_{s-1}} = \varrho_{D, D_{s-1}} + \sum_{i=1}^{i=1+p} (\varrho_{G_i, D_{s-1}} - \varrho_{D, D_{s-1}})$$

dargestellt werden kann.

Indem wir jetzt wörtlich die Überlegungen von § 5, die sich auf den Fall  $s < m - 2$ ,  $D$ -nicht-zyklische Gruppe beziehen, wiederholen, gelangen wir zur Kongruenz

$$\sigma_{D_{s-1}} \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

Nehmen wir jetzt an, daß  $\varrho_{D, D_{s-1}} = 1$  ist. Da immer  $\varrho_{G_i, D_{s-1}} > \varrho_{D, D_{s-1}}$  ist, so muß auch in diesem Falle  $\varrho_{G_i, D_{s-1}} > 1$  sein, so daß wie früher

$$\varrho_{G_i, D_{s-1}} \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

Ferner ergibt sich, daß im vorliegenden Falle

$$\sigma_{D_{s-1}} = 1 + \sum_{i=1}^{i=1+p} (\varrho_{G_i, D_{s-1}} - 1).$$

Indem wir nun ebenso wie im Falle  $s = m - 2$  von § 5 verfahren, erhalten wir wieder

$$\sigma_{D_{s-1}} \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

Angenommen endlich, daß  $\varrho_{D, D_{s-1}} = 0$  ist. Bezeichnen wir mit

$$(g) \quad G_{1,s}, G_{2,s}, \dots, G_{m,s} \quad (m_s = \sigma_{D_{s-1}})$$

alle verschiedenen Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  der ersten Kategorie, die  $D_{s-2}$  als Normalteiler enthalten. Mit  $D_{i,D}^{(s)}$  wollen wir den Durchschnitt von  $G_{i,s}$  und  $D$  ( $1 \leq i \leq m_s$ ) bezeichnen. Die Ordnung jedes  $D_{i,D}^{(s)}$  ist gleich  $p^{s-1}$ .

Wir wollen zuerst beweisen, daß

$$(d) \quad D_{1,D}^{(s)} = D_{2,D}^{(s)} = \dots = D_{m_s,D}^{(s)}.$$

Wir nehmen das Gegenteil an und setzen z. B. voraus, daß

$$D_{1,D}^{(s)} \neq D_{i,D}^{(s)} \quad (i+1).$$

Die Untergruppe  $D_{s-2}$  ist in jeder Untergruppe der Reihe (d) enthalten; dabei ist  $D_{s-2}$ , die Gruppe von der Ordnung  $p^{s-2}$ , Normalteiler jeder dieser Untergruppen von der Ordnung  $p^{s-1}$ . Speziell ist  $D_{s-2}$  Normalteiler beider Untergruppen  $D_{1,D}^{(s)}$  und  $D_{i,D}^{(s)}$ , woraus folgt, daß  $D_{s-2}$  auch Normalteiler von  $Q_d = \{D_{1,D}^{(s)}, D_{i,D}^{(s)}\}$  ist. Wenn aber  $D_{i,D}^{(s)} \neq D_{1,D}^{(s)}$  ist, so ist die Ordnung von  $Q_d$  nicht kleiner als  $p^s$ . Hieraus folgt, daß  $D_{s-2}$  als Normalteiler in einer Untergruppe von der Ordnung  $p^s$  der Gruppe  $D$  enthalten sein muß, was aber unserer Voraussetzung widerspricht. Also enthalten im vorliegenden Falle alle Untergruppen von (g) eine und dieselbe Untergruppe  $D_{1,D}^{(s)} = D_{s-1}$  von der Ordnung  $p^{s-1}$  der Gruppe  $D$ .

Es sei  $Q$  die größte Untergruppe der Gruppe  $G$ , die  $D_{s-2}$  als Normalteiler enthält. Jede der Untergruppen der Reihe (g) ist in  $Q$  enthalten; dabei sind die Untergruppen dieser Reihe die einzigen Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  der Gruppe  $Q$ , die  $D_{s-1}$  enthalten. In der Tat, da  $D_{s-2}$  in  $D_{s-1}$  enthalten ist, so muß jede Untergruppe von  $Q$ , die  $D_{s-1}$  enthält, zugleich auch  $D_{s-2}$  enthalten, und dabei als Normalteiler, denn  $D_{s-2}$  ist Normalteiler von  $Q$ ; aber keine der Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  der zweiten Kategorie kann  $D_{s-1}$  enthalten (§ 6), folglich sind durch die Untergruppen der Reihe (g) alle Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  der Gruppe  $Q$ , die  $D_{s-1}$  enthalten, erschöpft. Da dabei  $D_{s-1}$  als Normalteiler in jeder dieser Untergruppen enthalten ist, und  $\sigma_{D_{s-1}} > 1$  ist, so ist

$$(III') \quad \sigma_{D_{s-1}} \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

Also, ist  $2 < s < m$ , so ist die Kongruenz (III') in allen Fällen erfüllt. Indem wir (III') von (II') subtrahieren, erhalten wir, mit Berücksichtigung von (I''),

$$n_{s'} = \varrho_{G, D_{s-1}} - \sigma_{D_{s-1}} \equiv 0 \pmod{p^2} \quad (s > 2).$$

Diese Kongruenz gilt für beliebiges  $\sigma' \leq \sigma$ , also

$$u'_s = \sum_{\sigma'=1}^{\sigma'=\sigma} n_{\sigma',s} \equiv 0 \pmod{p^2} \quad (2 < s < m).$$

Außerdem hat man (§ 5)

$$u_s \equiv 1 + p \pmod{p^2} \quad (1 \leq s < m),$$

folglich

$$\varrho_s(G) = u_s + u'_s \equiv 1 + p \pmod{p^2} \quad (2 < s < m).$$

### § 7.

Es bleiben noch die Fälle  $s=2$  und  $s=1$  zu untersuchen.

Der Fall  $s=1$  ist der einfachste. In der Tat, da alle Untergruppen von der Ordnung  $p$  zyklische Gruppe sind, so gehören sie alle zur ersten Kategorie (§ 4), folglich ist  $u'_1 = 0$ ; und da  $u_1 \equiv 1 + p \pmod{p^2}$  ist (§ 5), so ist

$$\varrho_1(G) = u_1 + u'_1 = u_1 \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

Wir wollen nun den Fall  $s=2$  betrachten. Ist  $u'_2 = 0$ , so ist (§ 5)

$$\varrho_2(G) = u_2 \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

Nehmen wir nun an, daß  $u'_2 > 0$  ist.

Bezeichnen wir mit  $H_2$  eine der Untergruppen von der Ordnung  $p^2$  der zweiten Kategorie. Die Ordnung des Durchschnittes von  $H_2$  und  $D$  ist gleich  $p^{2-1} = 1$  (§ 6), d. h.  $H_2$  und  $D$  besitzen keine gemeinsamen Elemente außer  $E$ .

Es sei nun bemerkt, daß der Normalteiler  $D$  in einer Hauptreihe enthalten ist. Er enthält infolgedessen einen Normalteiler  $P$  von  $G$  von der Ordnung  $p$ . Da  $P$  in  $H_2$  nicht enthalten ist, so ist das System  $H_2 P = P H_2$  eine Gruppe von der Ordnung  $p^3$ .

Daß  $H_2 P$  die Abelsche Gruppe vom Typus  $(p, p, p)$  ist, folgt daraus, daß  $H_2$  als eine Untergruppe der zweiten Kategorie nicht-zyklische (§ 4) Gruppe ist und daß jedes Element aus  $P$  zum Zentrum von  $G$  gehört<sup>\*)</sup>, und folglich auch zum Zentrum von  $H_2 P$ . Es ist klar, daß  $H_2 P$  zur zweiten Kategorie gehört, woraus folgt (§ 6), daß die Ordnung des Durchschnittes von  $H_2 P$  und  $D$  gleich  $p$  ist; dieser Durchschnitt stimmt also mit  $P$  überein. Es gibt  $1 + p + p^2$  verschiedene Untergruppen von der Ordnung  $p^2$  in der Gruppe  $H_2 P$ .<sup>\*)</sup> Die Anzahl derjenigen Untergruppen von der Ordnung  $p^2$ , die  $P$  enthalten, ist gleich  $1 + p$  (Hilfssatz von § 1); folglich ist die Anzahl der Untergruppen von der Ordnung  $p^2$  der zweiten Kategorie, die in  $H_2 P$  enthalten sind, gleich  $p^2$ .

<sup>\*)</sup> Burnside, Theory of groups, S. 127.

<sup>\*)</sup> Davon kann man sich überzeugen, indem man zeigt, daß  $\varrho_2(H_2 P) = \varrho_1(H_2 P)$ .

Setzen wir jetzt voraus, daß eine Untergruppe  $H'_2$  von der Ordnung  $p^2$  der zweiten Kategorie existiert, die in  $H_2P$  nicht enthalten ist. Indem wir die soeben angeführten Überlegungen wiederholen, können wir beweisen, daß die Anzahl aller Untergruppen von der Ordnung  $p^2$  der zweiten Kategorie von  $G$ , die in der Gruppe  $H'_2P$  enthalten sind, gleich  $p^2$  ist. Dabei ist keine dieser Untergruppen in  $H_2P$  enthalten, weil sonst  $H'_2P$  mit  $H_2P$  identisch wäre. Die Gruppen  $H_2P$  und  $H'_2P$  besitzen also im ganzen  $2p^2$  verschiedene Untergruppen von der Ordnung  $p^2$  der zweiten Kategorie.

Eine Fortsetzung dieses Verfahrens liefert offenbar das folgende Resultat: Die Anzahl aller Untergruppen von der Ordnung  $p^2$  der zweiten Kategorie ist gleich  $rp^2$ , wo  $r$  die Anzahl derjenigen Untergruppen von der Ordnung  $p^2$  bezeichnet, die  $P$  und gleichzeitig einige Untergruppen von der Ordnung  $p^2$  der zweiten Kategorie enthalten.

Also hat man

$$u'_2 = rp^2 \equiv 0 \pmod{p^2};$$

außerdem

$$u_2 \equiv 1 + p \pmod{p^2},$$

folglich

$$\varrho_2(G) = u_2 + u'_2 \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

Damit ist der Satz 1 vollständig bewiesen.

In nahem Zusammenhang mit dem soeben bewiesenen Satze steht folgender

**Satz 1\*.** *Gibt es in einer Gruppe  $G$  von der Ordnung  $p^m$  ( $p > 2$ ) ( $p$ -Gruppe) Untergruppen von der Ordnung  $p^{m_1}$ , die eine Untergruppe  $G'$  von der Ordnung  $p^{m_1}$  ( $m_1 \leq m_2 < m$ ) als Normalteiler enthalten, so ist die Anzahl dieser Untergruppen von der Ordnung  $p^{m_1}$  entweder gleich 1 oder  $\equiv 1 + p \pmod{p^2}$ .*

Wenn  $G$  eine zyklische Gruppe ist, so ist die Richtigkeit dieses Satzes evident, wobei auch der Fall  $p = 2$  nicht ausgeschlossen ist. Wenn  $G$  eine nicht-zyklische Gruppe von der Ordnung  $p^m$  ( $p > 2$ ) ist, so folgt unmittelbar der Satz 1\* aus dem Satze 1 und aus dem Hilfssatze von § 1.

Andererseits, wenn wir in der Bedingung des Satzes 1\*  $G' = 1$  setzen, so werden wir zum Satz 1 geführt, so daß der Satz 1 einen speziellen Fall von Satz 1\* bildet.

## § 8.

Im Falle  $p = 2$  ist die Induktion unanwendbar, denn es enthält z. B. die Quaternionengruppe, eine nicht-zyklische Gruppe von der Ordnung  $2^3$ , nur eine Untergruppe von der Ordnung 2. Jedoch gilt für einige Typen von Gruppen von der Ordnung  $2^m$  ein dem Satze 1 analoger Satz.



Nehmen wir zunächst an, daß  $G_a$  eine nicht-zyklische Abelsche Gruppe von der Ordnung  $2^m$  ist. Es kann bewiesen werden, daß die Anzahl der eigentlichen Untergruppen von gegebener Ordnung in der Gruppe  $G_a$  kongruent  $3 \pmod{4}$  ist. Wenn  $G_a$  Elemente von der Ordnung  $2^{m-1}$  besitzt, so ist die Anzahl ihrer Untergruppen von jeder Ordnung  $2^s$  ( $1 \leq s < m$ ) gleich 3. Speziell ist dies richtig für die nicht-zyklische Abelsche Gruppe von der Ordnung  $2^2$ . Wir können also die Induktion anwenden, indem wir den angeführten Satz mit Hilfe von Überlegungen beweisen, die den Überlegungen der vorhergehenden Paragraphen analog sind.

Auf Grund des Satzes 1 ist die Anzahl der Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  in einer nicht-zyklischen Abelschen Gruppe von der Ordnung  $p^m$  ( $p > 2$ ,  $1 \leq s < m$ )  $= 1 + p \pmod{p^2}$ .

Wenn wir diese Resultate vereinigen, werden wir zum Millerschen Satze geführt. Betrachten wir noch die Gruppe  $G_4$  von der Ordnung  $2^m$ , wo  $m \geq 4$  ist, welche die Elemente von der Ordnung 8 nicht enthält. Die Ordnungen der Elemente in den Untergruppen und Faktorgruppen der Gruppe  $G_4$  sind ebenfalls nicht größer als 4. Ferner kann man sich unmittelbar überzeugen, daß in jeder Gruppe von der Ordnung  $2^4$ , die Elemente von der Ordnung 8 nicht enthält, die Anzahl der eigentlichen Untergruppen von gegebener Ordnung  $\equiv 3 \pmod{4}$  ist. Also ist auch in diesem Falle die Methode der vollständigen Induktion anwendbar, und der Satz gilt für  $G_4$ .

Speziell ist der Satz richtig für die Hamiltonsche Gruppe von der Ordnung  $2^m$  ( $m \geq 4$ ).

### § 9.

Nach dem Theorem von Frobenius ist die Anzahl der Untergruppen von der Ordnung  $p^s$  in einer Gruppe  $G$  von der Ordnung  $p^m$  ( $p \geq 2$ ,  $0 \leq s < m$ )  $\equiv 1 \pmod{p}$ .

Durch Überlegungen, die ihrem Wesen nach denjenigen analog sind, welche wir beim Beweise des Satzes 1 anwandten (die Worte „kongruent  $1 + p$  modulo  $p^2$ “ werden überall durch die Worte „kongruent 1 modulo  $p$ “ ersetzt werden müssen) können wir einen neuen Beweis dieses Satzes erhalten.

### § 10.

Wie schon angedeutet worden ist, ermöglichen die Sätze von Frobenius und Miller (siehe die Einleitung), den folgenden Satz zu beweisen:

**Satz 2.** Die Anzahl aller Elemente in einer nicht-zyklischen Gruppe  $G$  von der Ordnung  $p^m$  ( $p > 2$ ), deren Ordnungen in  $p^s$  aufgehen ( $1 \leq s < m$ ), ist durch  $p^{s+1}$  teilbar.



Der Kürze wegen wollen wir folgende Bezeichnungen gebrauchen. Wir bezeichnen die Elemente von  $G$ , deren Ordnungen in  $p^{m'}$  ( $m' < m$ ) aufgehen, mit  $e_{(p^{m'})}$ .

Nun sei  $n_s(G)$  die Anzahl aller  $e_{(p^s)}$  der Gruppe  $G$  (d. h. die Anzahl aller Elemente von  $G$ , durch deren Ordnungen  $p^s$  teilbar ist) und  $\eta_s(G)$  die Anzahl der Elemente von der Ordnung  $p^s$ . Vor allem bemerkt man, daß  $n_s(G)$  folgendermaßen dargestellt werden kann

$$(1) \quad n_s(G) = n_{s+1}(G) - \eta_{s+1}(G) \quad (1 \leq s < m).$$

Nach dem Theorem von Frobenius ist  $n_{s+1}(G)$  durch  $p^{s+1}$  teilbar.

Gibt es in  $G$  kein Element von der Ordnung  $p^{s+1}$ , d. h. ist  $\eta_{s+1}(G) = 0$ , so ist wegen (1)

$$n_s(G) = n_{s+1}(G),$$

folglich ist  $n_s(G)$  durch  $p^{s+1}$  teilbar.

Ist nun  $\eta_{s+1}(G) > 0$ , so ist nach dem Satze von Miller die Anzahl  $c_{s+1}$  aller zyklischen Untergruppen von  $G$  von der Ordnung  $p^{s+1}$  durch  $p$  teilbar, so daß  $c_{s+1} = kp$ , wo  $k$  eine ganze Zahl ist. Nun hat man

$$\eta_{s+1}(G) = \varphi(p^{s+1})c_{s+1} = p^{s+1}(p-1)k,$$

d. h.  $\eta_{s+1}(G)$  ist durch  $p^{s+1}$  teilbar; das gleiche gilt also auch für  $n_s(G) = n_{s+1}(G) - \eta_{s+1}(G)$ .

Wir wollen jetzt einen anderen Beweis von Satz 2 anführen. Wir schicken folgende Hilfsätze voraus.

Hilfssatz 1. Wenn eine nicht-zyklische Gruppe  $G = G_m^{(m-1)}$  (§ 3) von der Ordnung  $p^m$  Elemente von der Ordnung  $p^{m-1}$  besitzt, so ist die Anzahl aller  $e_{(p^s)}$  der Gruppe  $G_m^{(m-1)}$  gleich  $p^{s+1}$ .

Ist  $s = m - 1$ , so ist offenbar

$$n_{m-1}(G_m^{(m-1)}) = p^m = p^{(m-1)+1}.$$

Ist nun  $0 < s < m - 1$ , so sind alle  $e_{(p^s)}$  von  $G_m^{(m-1)}$  in der einzigen nicht-zyklischen Untergruppe  $G_{m-1}^{(m-2)}$  von  $G_m^{(m-1)}$  von der Ordnung  $p^{m-1}$  enthalten (§ 3). Ist dabei  $s < m - 2$ , so sind alle  $e_{(p^s)}$  in der nicht-zyklischen Untergruppe  $G_{m-2}^{(m-3)}$  von  $G_{m-1}^{(m-2)}$  enthalten. Indem man diese Überlegung fortsetzt, beweist man, daß alle  $e_{(p^s)}$  von  $G_m^{(m-1)}$  in der nicht-zyklischen Untergruppe  $G_{s+1}^{(s)}$  enthalten sind; also

$$n_s(G_m^{(m-1)}) = n_s(G_{s+1}^{(s)}) = p^{s+1} \quad (1 \leq s < m),$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 2. Wenn der Durchschnitt  $D'$  zweier Untergruppen von der Ordnung  $p^{m-1}$  der Gruppe  $G = G_m^{(m-2)}$  (§ 3) eine zyklische Gruppe ist, so ist

$$n_s(G_m^{(m-2)}) = p^{s+2} \quad (1 \leq s < m - 1).$$

Nehmen wir an, daß

$$G'_1, G'_2, \dots, G'_{1+p}$$

diejenige Fundamentalreihe (§ 4) der Gruppe  $G_m^{(m-s)}$  darstellt, deren Untergruppen  $D'$  enthalten. Bezeichnen wir mit  $n_s(G'_i)$  die Anzahl aller  $e_{(p^s)}$  in der Untergruppe  $G'_i$ . Auf Grund des Hilfssatzes 1 hat man

$$n_s(G'_i) = p^{s+1} \quad (1 \leq i \leq 1+p).$$

Nun beachte man, daß in den Untergruppen der Fundamentalreihe alle Elemente der Gruppe  $G$  liegen (§ 4); speziell sind in diesen Untergruppen alle  $e_{(p^s)}$  der Gruppe  $G$  enthalten, folglich

$$n_s(G_m^{(m-s)}) = p^s + \sum_{i=1}^{s+1+p} (n_s(G_i) - p^s) = p^s + (1+p)(p^{s+1} - p^s) = p^{s+2},$$

w. z. b. w.

Aus dem bewiesenen Hilfssatz folgt

$$\eta_s(G_m^{(m-s)}) = n_s(G_m^{(m-s)}) - n_{s-1}(G_m^{(m-s)}) = p^{s+2} - p^{s+1} = p^{s+1}(p-1) \\ (1 < s < m-1).$$

Jetzt wollen wir den Satz 2 beweisen.

Für die nicht-zyklische Gruppe von der Ordnung  $p^2$  gilt offenbar der Satz. Wir können folglich vollständige Induktion anwenden. Wir setzen den Satz als bewiesen voraus für alle nicht-zyklischen Gruppen, deren Ordnung ein echter Teiler von  $p^m$  ist, und beweisen ihn dann für die gegebene Gruppe von der Ordnung  $p^m$  ( $p > 2$ ).

Es sei

$$G_1, G_2, \dots, G_{1+p}$$

eine Fundamentalreihe der Gruppe  $G$  und  $D$  diejenige Untergruppe von der Ordnung  $p^{m-2}$ , die in jeder Gruppe  $G_i$  enthalten ist.

Die Fälle, wo die Gruppe  $G$  Elemente von der Ordnung  $p^{m-1}$  besitzt oder wo  $G = G_m^{(m-2)}$ ,  $D$  zyklische Gruppe ist, wurden schon in den Hilfssätzen 1 und 2 erörtert. Es bleibt nur der Fall zu untersuchen, wo  $G$  kein Element von der Ordnung  $p^{m-1}$  besitzt und  $D$  eine nicht-zyklische Gruppe ist. Vor allem bemerken wir, daß in diesem Falle

$$n_{m-1}(G) = n_{m-2}(G) = p^m.$$

Nehmen wir jetzt an, daß  $s \leq m-3$  ist. Für die nicht-zyklische Gruppe  $D$ , ebenso wie für die Untergruppen der Fundamentalreihe gilt der Satz nach Voraussetzung, so daß

$$2) \quad n_s(D) = k p^{s+1}$$

und

$$(3) \quad n_s(G_i) = k_i p^{s+1}$$

ist, wobei  $k, k_1, k_2, \dots, k_{1+p}$  ganze Zahlen sind. Nun ist aber

$$(4) \quad n_s(G) = n_s(D) + \sum_{i=1}^{i=1+p} (n_s(G_i) - n_s(D)).$$

Indem wir aus (2) und (3) in (4) einsetzen, erhalten wir

$$n_s(G) = k' p^{s+1},$$

wo

$$k' = k + \sum_{i=1}^{i=1+p} (k_i - k),$$

womit der Satz 2 vollständig bewiesen ist.

Moskau, 5. August 1930.

(Eingegangen am 11. 8. 1930.)

## Über die Verteilung der Primzahlen in Polynomen.

Von

Hans Heilbronn in Göttingen.

**Hauptsatz.** *Es sei  $f(x)$  ein ganzwertiges Polynom<sup>1)</sup> vom Grade  $n \geq 2$ .  $P(\xi, f) = P(\xi)$  bezeichne für  $\xi \geq 2$  die Anzahl der natürlichen Zahlen  $x \leq \xi$ , für die  $f(x) = p$  Primzahl ist. Dann ist*

$$(1) \quad P(\xi) \leq \alpha_1 \frac{\xi}{\log \xi}.$$

Hier und in der Folge bezeichnen lateinische Buchstaben ganze, rationale Zahlen,  $p$  Primzahlen, griechische Buchstaben reelle Zahlen,  $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$  positive Konstanten, die nur von den Koeffizienten von  $f(x)$  abhängen.

Der Beweis des Hauptsatzes erfolgt mit Hilfe der elementaren Siebmethode des Eratosthenes, die Herr Brun<sup>2)</sup> mit großem Erfolg in die moderne Zahlentheorie eingeführt hat und die von den Herren Schnirelmann<sup>3)</sup> und Landau<sup>4)</sup> in eine Fassung gebracht worden ist, die sich ohne weiteres zum Beweise des obigen Hauptsatzes benutzen läßt. Die Siebmethode ist zwar schon mehrfach auf das Problem der Verteilung der Primzahlen in Polynomen angewandt worden<sup>5)</sup>, doch ist das einzige bisher in der Richtung von (1) vorliegende Ergebnis das von Herrn Nagell<sup>6)</sup> bewiesene Resultat:

$$(2) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{P(\xi)}{\xi} = 0.$$

<sup>1)</sup> Ein Polynom heißt ganzwertig, wenn es für ganze, rationale Argumente ganze, rationale Werte annimmt.

<sup>2)</sup> Viggo Brun, Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences 168 (1919), S. 544–546.

<sup>3)</sup> L. Schnirelmann, Sur les propriétés additives des nombres, Izwestija Donaskowo Polytechnitschewskowo Instituta (Nowotscherkaak) 14 (1930), S. 3–28.

<sup>4)</sup> Edmund Landau, Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1930, S. 255–276.

<sup>5)</sup> Hans Rademacher, Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 3 (1924), S. 12–30.

<sup>6)</sup> Trygve Nagell, Zur Arithmetik der Polynome, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1 (1922), S. 179–194.

Ob (1) scharf ist, weiß ich nicht, da man bisher für kein Polynom

$$(3) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} P(\xi) = \infty$$

bewiesen hat.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf  $f(x)$  erstens als irreduzibel, zweitens ohne feste Primteiler angenommen werden.

$v(p)$  bezeichne die Anzahl der inkongruenten Wurzeln der Kongruenz

$$(4) \quad f(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dann ist

$$(5) \quad 0 \leq v(p) \leq n,$$

und es gibt  $v(p)$  Zahlen

$$(6) \quad 0 \leq w_{1,p} < \dots < w_{v(p),p} < p,$$

so daß aus (4)

$$(7) \quad x \equiv w_{u,p} \pmod{p} \text{ für ein } u \text{ mit } 1 \leq u \leq v(p)$$

folgt.

Ferner gibt es bekanntlich zu  $f(x)$  ein  $b$  mit  $b|n!$ , so daß  $bf(x)$  ein Polynom mit ganzen, rationalen Koeffizienten ist. Für  $p > n$  ändert also  $v(p)$  seinen Wert nicht, wenn man statt  $f(x)$  das Polynom  $bf(x)$  zugrunde legt. Hieraus ergibt sich, daß der folgende Hilfssatz, der für ganzahlige Polynome von Herrn Rademacher<sup>7)</sup> als Korollar aus einem Satze von Herrn Nagell<sup>8)</sup> gefolgert worden ist, auch für ganzwertige Polynome gilt.

Hilfssatz 1. Für  $\eta > n$  ist

$$(8) \quad \frac{\alpha_\eta}{\log \eta} \leq \prod_{n < p \leq \eta} \left(1 - \frac{v(p)}{p}\right) \leq \frac{\alpha_\eta}{\log \eta}.$$

Definition. Es sei  $d > 0$ ,  $h \geq 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $p_r \nmid d$  für  $1 \leq r \leq k$ ,  $q = q(\xi) > \alpha_k \geq 10n$ ;

$$(9) \quad 10n \leq \alpha_k < p_1 < \dots < p_k \leq q.$$

Dann bezeichne  $F_{h,\xi,f}(d; p_1, \dots, p_k) = F(d; p_1, \dots, p_k)$  ( $F(d)$  für  $k=0$ ) die Anzahl der  $x$  mit

$$(10) \quad 1 \leq x \leq \xi,$$

$$(11) \quad x \equiv h \pmod{d},$$

$$(12) \quad x \not\equiv w_{u,p_r} \pmod{p_r} \text{ für } 1 \leq r \leq k, \quad 1 \leq u \leq v(p_r).$$

<sup>7)</sup> loc. cit., S. 27.

<sup>8)</sup> T. Nagell, L'intermédiaire des mathématiciens (2) 1 (1922), S. 129–131.

Hilfssatz 2.<sup>9)</sup>

$$(13) \quad F(d; p_1, \dots, p_k) = F(d) - \sum_{1 \leq r_1 \leq k} v(p_{r_1}) F(d p_{r_1}) \\ + \sum_{1 \leq r_1 < r_2 \leq k} v(p_{r_1}) v(p_{r_2}) F(d p_{r_1} p_{r_2}; p_1, \dots, p_{r_2-1}).$$

Beweis. Es ist für  $k > 0$ 

$$(14) \quad F(d; p_1, \dots, p_k) = F(d; p_1, \dots, p_{k-1}) - v(p_k) F(d p_k; p_1, \dots, p_{k-1}).$$

Denn  $F(d; p_1, \dots, p_k)$  ist die Differenz der Lösungszahl von

$1 \leq x \leq \xi$ ,  $x \equiv h \pmod{d}$ ,  $x \not\equiv w_{u, p_r} \pmod{p_r}$  für  $1 \leq r \leq k-1$ ,  $1 \leq u \leq v(p_r)$   
minus der Lösungszahl von

$1 \leq x \leq \xi$ ,  $x \equiv h \pmod{d}$ ,  $x \not\equiv w_{u, p_r} \pmod{p_r}$  für  $1 \leq r \leq k-1$ ,  $1 \leq u \leq v(p_r)$ ,  
 $x \equiv w_{u, p_k} \pmod{p_k}$  für ein  $u$  mit  $1 \leq u \leq v(p_k)$ .

Wendet man (14) sukzessive auf  $F(d; p_1, \dots, p_{k-1})$ ,  $F(d; p_1, \dots, p_{k-2})$ ,  
 $\dots$ ,  $F(d; p_1)$  statt auf  $F(d; p_1, \dots, p_k)$  an, so erhält man

$$(15) \quad F(d; p_1, \dots, p_k) = F(d) - \sum_{1 \leq r_1 \leq k} v(p_{r_1}) F(d p_{r_1}; p_1, \dots, p_{r_1-1}).$$

Wendet man (15) mit  $r_1 - 1$  statt  $k$  auf die in (15) hinter dem  
Summenzeichen stehenden Glieder an, so folgt die Behauptung.

Hilfssatz 3. Es sei

$$(16) \quad t > 0, \quad k = k_0 > k_1 > \dots > k_t \geq 0,$$

$$(17) \quad r_1 > r_2 > \dots > r_{2t} > 0, \quad r_j \leq k \left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor \text{ für } 1 \leq j \leq 2t.$$

Dann ist

$$(18) \quad F(1; p_1, \dots, p_k) \leq F(1) + \sum_{i=1}^{2t-1} (-1)^i \sum_{r_1, \dots, r_i} v(p_{r_1}) \dots v(p_{r_i}) F(p_{r_1} \dots p_{r_i}) \\ + \sum_{r_1, \dots, r_{2t}} v(p_{r_1}) \dots v(p_{r_{2t}}) F(p_{r_1} \dots p_{r_{2t}}; p_1, \dots, p_{\min(r_{2t}-1, k)}).$$

Beweis. Für  $t = 1$  Hilfssatz 2.Für  $t > 1$  ist nach Hilfssatz 2

$$(19) \quad F(p_{r_1} \dots p_{r_{2t}}; p_1, \dots, p_{\min(r_{2t}-1, k)}) \\ = F(p_{r_1} \dots p_{r_{2t}}) - \sum_{r_{2t+1}} v(p_{r_{2t+1}}) F(p_{r_1} \dots p_{r_{2t+1}}) \\ + \sum_{r_{2t+1}, r_{2t+2}} v(p_{r_{2t+1}}) v(p_{r_{2t+2}}) F(p_{r_1} \dots p_{r_{2t+2}}; p_1, \dots, p_{r_{2t+2}-1}).$$

Aus (19) folgt Hilfssatz 3 durch Schluß von  $t$  auf  $t+1$ .

<sup>9)</sup> Vgl. Landau, loc. cit. § 2, wo die entsprechenden Hilfssätze in größter Breite entwickelt werden.

Hilfssatz 4. Voraussetzung: (16), (17),

$$(20) \quad \tau = 1 + \sum_{i=1}^{2t} (-1)^i \sum_{r_1, \dots, r_i} \frac{v(p_{r_1})}{p_{r_1}} \dots \frac{v(p_{r_i})}{p_{r_i}}.$$

Behauptung.  $F(1; p_1, \dots, p_k) \leq \xi \tau + n \prod_{m=0}^{t-1} (n k_m)^2$ .

Beweis. Da  $\left| F(d) - \frac{\xi}{d} \right| \leq 1$ , ist nach Hilfssatz 3

$$(21) \quad \begin{aligned} F(1; p_1, \dots, p_k) &\leq F(1) + \sum_{i=1}^{2t} (-1)^i \sum_{r_1, \dots, r_i} v(p_{r_1}) \dots v(p_{r_i}) F(p_{r_1} \dots p_{r_i}) \\ &\leq \xi + \sum_{i=1}^{2t} (-1)^i \sum_{r_1, \dots, r_i} v(p_{r_1}) \dots v(p_{r_i}) \frac{\xi}{p_{r_1} \dots p_{r_i}} + \sum_{i=1}^{2t} \sum_{r_1, \dots, r_i} v(p_{r_1}) \dots v(p_{r_i}) \\ &\leq \xi \tau + \sum_{i=1}^{2t} \sum_{r_1, \dots, r_i} n^i \leq \xi \tau + \sum_{i=1}^{2t} n^i \prod_{m=0}^{i-1} k_m^2 \leq \xi \tau + n \prod_{m=0}^{t-1} (n k_m)^2. \end{aligned}$$

Hilfssatz 5. Voraussetzung: (16), (17), (20),

$$(22) \quad L_m = \prod_{k_m < t \leq k_{m-1}} \left( 1 - \frac{v(p_t)}{p_t} \right) \geq \frac{4}{5} \text{ für } 1 \leq m \leq t.$$

Behauptung:  $\tau < 2 \prod_{m=1}^t L_m$ .

Beweis. Siehe Landau, loc. cit. § 1.

Hilfssatz 6. Das in (9) auftretende  $\alpha_4 \geq 10n$  sei so groß gewählt, daß, wenn  $\pi(\sigma)$  für  $\sigma \geq \alpha_4$  die Anzahl der  $\sigma$  nicht übersteigenden Primzahlen bezeichnet,

$$(23) \quad \pi(\sigma) \leq \frac{\sigma}{n}$$

ist. Es sei

$$(24) \quad \alpha_n = \frac{\alpha_9}{27 \alpha_3} \leq \frac{1}{27},$$

$$(25) \quad \varrho = \xi^{\alpha_n}.$$

$p_1, \dots, p_k$  durchlaufen alle durch (9) zugelassenen Primzahlen, also ist  $k = k(\xi)$  eindeutig bestimmt. Es sei

$$(26) \quad \xi \geq \alpha_n,$$

wo  $\alpha_n \geq 2$  passend wählbar ist, so daß stets

$$(27) \quad k \geq 1.$$

Dann können  $t, k_0, \dots, k_t$  so gewählt werden, daß sie (16), (22) und

$$(28) \quad \prod_{m=0}^{t-1} (n k_m)^2 \leq \xi^{\frac{1}{2}}$$

genügen.

Beweis.  $k_0 = k$ . Da für  $1 \leq s \leq k$   $1 - \frac{v(p_s)}{p_s} \geq \frac{4}{5}$ , gibt es ein kleinstes  $k_1$  mit

$$(29) \quad L_1 = \prod_{k_1 < s \leq k_2} \left(1 - \frac{v(p_s)}{p_s}\right) \geq \frac{4}{5}, \text{ falls } k_1 > 0,$$

ein kleinstes  $k_2$  mit

$$(30) \quad L_2 = \prod_{k_2 < s \leq k_3} \left(1 - \frac{v(p_s)}{p_s}\right) \geq \frac{4}{5}, \text{ falls } k_2 > 0,$$

ein kleinstes  $k_3$  und so fort, wodurch  $t, k_0, \dots, k_t$  eindeutig bestimmt sind und (16) und (22) erfüllen.

Dann ist

$$(31) \quad \left(1 - \frac{v(p_{k_i})}{p_{k_i}}\right) L_i < \frac{4}{5} \quad \text{für } 1 \leq i \leq t-1,$$

also

$$(32) \quad L_t < \frac{4}{5} \left(1 - \frac{n}{10n}\right)^{-1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{8}{9};$$

da nach (23) für  $0 \leq m \leq t-1$

$$(33) \quad nk_m \leq p_{k_m},$$

ist also nach Hilfssatz 1 für  $0 \leq m \leq t-1$

$$(34) \quad \log(nk_m) \leq \log p_{k_m} \leq \alpha_3 \prod_{n < p \leq p_{k_m}} \left(1 - \frac{v(p)}{p}\right)^{-1} \\ = \alpha_3 \prod_{n < p \leq \varrho} \left(1 - \frac{v(p)}{p}\right)^{-1} \prod_{i=1}^m L_i \leq \alpha_3 \frac{\log \varrho}{\alpha_2} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^m = \frac{\log \varrho}{27 \alpha_2} \left(\frac{8}{9}\right)^m,$$

$$(35) \quad \sum_{m=0}^{t-1} \log(nk_m) \leq \frac{\log \varrho}{27 \alpha_2} \sum_{m=0}^{t-1} \left(\frac{8}{9}\right)^m < \frac{1}{27} \log \xi \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^m = \frac{1}{3} \log \xi, \\ \prod_{m=0}^{t-1} (nk_m)^2 \leq \xi^{\frac{2}{3}}.$$

Beweis des Hauptsatzes. Es gibt ein  $\alpha_i \geq \sqrt{\alpha_s}$ , so daß

$$(36) \quad |f(x)| \geq x \quad \text{für } x \geq \alpha_i.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\xi \geq \alpha_i^2$ . Dann folgt aus  $f(x) = p$ ,  $\sqrt{\xi} < x \leq \xi$  (in den Bezeichnungen des Hilfssatzes 6)

$$(37) \quad p = f(x) \geq x > \sqrt{\xi} > \varrho,$$

$$(38) \quad p \nmid f(x) \quad \text{für } 1 \leq s \leq k,$$



also genügt  $x$  den Bedingungen (10), (11), (12) für  $d=1$ ; d. h. die Anzahl der  $x$  mit  $f(x)=p$ ,  $\sqrt{\xi} < x \leq \xi$  ist  $\leq F(1; p_1, \dots, p_k)$ , also gilt

$$(39) \quad P(\xi) \leq \sqrt{\xi} + F(1; p_1, \dots, p_k)$$

$$\leq \sqrt{\xi} + \xi \tau + n \prod_{m=0}^{t-1} (n k_m)^2 \quad (\text{Hilfssatz 4})$$

$$\leq \sqrt{\xi} + \xi \cdot 2 \prod_{a_1 < p \leq e} \left(1 - \frac{v(p)}{p}\right) + n \xi^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Hilfssatz 5 und 6})$$

$$\leq \alpha_9 \frac{\xi}{\log \xi} + \xi \alpha_9 \prod_{n < p \leq e} \left(1 - \frac{v(p)}{p}\right) + \alpha_{10} \frac{\xi}{\log \xi}$$

$$\leq (\alpha_9 + \alpha_{10}) \frac{\xi}{\log \xi} + \xi \alpha_9 \alpha_8 \frac{1}{\log e} \leq \alpha_1 \frac{\xi}{\log \xi} \quad (\text{Hilfssatz 1}).$$

(Eingegangen am 16. 12. 1930.)

## Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen der symmetrischen und der linearen Gruppe.

(Nachtrag zu meiner Arbeit in diesem Band, S. 92—95.)

Von

B. L. van der Waerden in Groningen (Niederlande).

Herr I. Schur macht mich aufmerksam, daß die Bezeichnung der in meiner obengenannten Note bewiesenen Tatsachen als „der Zusammenhang zwischen den Darstellungen ...“ vielleicht irreführend ist. Es handelt sich, wie man aus der Note selbst ersieht, nur um einen Teil des Zusammenhangs, der vollständig zuerst von I. Schur in seiner Dissertation (Berlin 1901), sodann von H. Weyl in der Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 271—309, und von I. Schur in den Sitzungsber. Berlin 1927, S. 58—75, dargestellt worden ist. In meiner Note werden nur die ersten zwei Drittel des Hilfssatzes V der Schurschen Arbeit von 1927 (zugleich mit einem Zusatz über die Charakterisierung der invarianten Unterräume durch idempotente Symmetriepoperatoren) neu bewiesen auf Grund einer von Weyl herrührenden Überlegung, welche den mehr rechnerischen Beweis der Schurschen Arbeit von 1927 zu ersetzen imstande ist, aber auf derselben begrifflichen Grundlage: der Vertauschbarkeit zweier Darstellungen, beruht.

Das auf S. 94 irrtümlich als Burnsidescher Satz bezeichnete Theorem über die Anzahl der linear-unabhängigen Matrizen in einer vollreduziblen Darstellung ist in Wirklichkeit eine von Frobenius und Schur (Berliner Sitzungsber. 1906) herrührende Verallgemeinerung des Burnsideschen Satzes.

Die Aufstellung aller mit einer vollreduziblen Darstellung vertauschbaren Matrizen kann auch (und zwar einfacher) ohne Anwendung des genannten Frobenius-Schurschen Satzes nach der Methode des § 3 der Schurschen Arbeit „Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere“ (Berliner Sitzungsber. 1905) geschehen, ebenso wie es beim Beweis des Hilfssatzes V der Schurschen Arbeit von 1927 geschieht.

(Eingegangen am 25. 2. 1931.)

1. 凡在本市范围内从事生产、经营活动的单位和个人，均须依法纳税。  
2. 纳税人应当按照国家规定的期限和方式缴纳税款，不得拖延或拒绝。  
3. 税务机关有权依法对纳税人的纳税情况进行检查，纳税人应当予以配合。  
4. 纳税人违反税收法律法规规定的，将依法受到处罚。  
5. 纳税人享有依法申请行政复议和提起行政诉讼的权利。  
6. 税务机关应当依法公开税收信息，接受社会监督。  
7. 纳税人应当依法履行纳税义务，维护国家税收秩序。  
8. 税务机关应当依法保护纳税人的合法权益，不得滥用职权。  
9. 纳税人应当依法提供真实、准确的涉税信息。  
10. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
11. 纳税人应当依法申报纳税，不得隐瞒收入。  
12. 税务机关应当依法加强税收宣传，提高纳税意识。  
13. 纳税人应当依法缴纳滞纳金，不得无故拖欠。  
14. 税务机关应当依法加强税收执法，维护税法权威。  
15. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得逃避纳税。  
16. 税务机关应当依法加强税收稽查，打击偷税漏税。  
17. 纳税人应当依法提供纳税担保，不得拒绝。  
18. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
19. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得抗拒。  
20. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管质量。  
21. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拖延。  
22. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
23. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拒绝。  
24. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
25. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得逃避。  
26. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管质量。  
27. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得抗拒。  
28. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
29. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拖延。  
30. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
31. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拒绝。  
32. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管质量。  
33. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得逃避。  
34. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
35. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得抗拒。  
36. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
37. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拖延。  
38. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管质量。  
39. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拒绝。  
40. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
41. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得逃避。  
42. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
43. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得抗拒。  
44. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
45. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拖延。  
46. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管质量。  
47. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拒绝。  
48. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
49. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得逃避。  
50. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
51. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得抗拒。  
52. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
53. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拖延。  
54. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管质量。  
55. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拒绝。  
56. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
57. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得逃避。  
58. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
59. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得抗拒。  
60. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
61. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拖延。  
62. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管质量。  
63. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拒绝。  
64. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
65. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得逃避。  
66. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
67. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得抗拒。  
68. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
69. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拖延。  
70. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管质量。  
71. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拒绝。  
72. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
73. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得逃避。  
74. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
75. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得抗拒。  
76. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
77. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拖延。  
78. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管质量。  
79. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拒绝。  
80. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
81. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得逃避。  
82. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
83. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得抗拒。  
84. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
85. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拖延。  
86. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管质量。  
87. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拒绝。  
88. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
89. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得逃避。  
90. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
91. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得抗拒。  
92. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
93. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拖延。  
94. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管质量。  
95. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得拒绝。  
96. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。  
97. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得逃避。  
98. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管水平。  
99. 纳税人应当依法履行纳税义务，不得抗拒。  
100. 税务机关应当依法加强税收征管，提高征管效率。



